

УДК 517.947

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ РАССЕЙНИЕ ПРИМЕСИ В АТМОСФЕРЕ, МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Захаров М. Ю.¹, Семенчин Е. А.²

DEVELOPMENT OF AN APPROXIMATE SOLUTION FOR BOUNDARY VALUE PROBLEM DESCRIBING DISPERSION OF IMPURITY IN ATMOSPHERE BY DOT-POTENTIALS METHOD

Zakharov M. Y., Semenchin E. A.

The article describes a new development method of an approximate solution for the impurity dispersion two-dimensional problems, based on the dot potentials method and time discretization. It also includes a standard form of an approximate solution for two-dimensional problems and proves the offered approximate solution stability to indignations of entry functions. An actual example shows stability and convergence of the approximate solution to the exact.

Keywords: boundary value problems impurity dispersion, approximate solution, dot potentials method, stability of the approximate solution.

Введение

В настоящее время значительно увеличались объемы выбросов в атмосферу вредных веществ промышленными предприятиями и автотранспортом. В связи с этим в экономически развитых странах большое внимание уделяется разработке методов моделирования рассеяния субстанций, загрязняющих атмосферу и подстилающую поверхность. Рассеяние загрязняющих веществ является результатом совместного протекания следующих процессов: выброса субстанции источниками примеси, переноса ветровыми потоками воздуха с учетом их мелкомасштабных флуктуаций, ее взаимодействия (реакции) с внешней средой и другими субстанциями. Краевые задачи, описывающие совместное протекание данных процессов, приведены в [1].

В [1] показано, что указанные трехмерные задачи можно свести, при определенных ограничениях, к двумерным, решаемым численно методом расщепления. В данной работе предлагается метод построения приближенных (с заданной степенью точности) решений аналогичных двумерных задач, ос-

нованный на методе точечных потенциалов [2–4].

1. Постановка задач

Задача 1. Начально-граничная задача, описывающая рассеяние субстанции в атмосфере, имеет вид [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} \psi + \sigma \psi = D \psi + f, \\ \mathbf{x} \in G \subset R^3, \\ \psi = \psi_0 \text{ при } t = 0, \\ \psi = \psi_S \text{ на } \Sigma, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = \alpha \psi \text{ на } \Sigma_0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \text{ на } \Sigma_H. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $\psi = \psi(t, x, y, z)$ — интенсивность аэрозольной легкой субстанции, мигрирующей вместе с потоком воздуха в атмосфере; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y, z)$ — вектор скорости частиц воздуха с компонентами u_1, u_2, u_3 , для которого $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$,

¹Захаров Михаил Юрьевич, ведущий математик сектора математического обеспечения автоматизированных систем управления (АСУ) технологических процессов отдела проектирования АСУ технологических процессов и комплексной автоматизации ОАО «НПО «Промавтоматика»; e-mail: zakharovmyu@mail.ru.

²Семенчин Евгений Андреевич, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии Кубанского государственного университета; e-mail: es14@mail.ru.

$u_3(t, x, y, 0) = u_3(t, x, y, H) = 0$; G — цилиндрическая область с границей, состоящей из боковой поверхности цилиндра Σ , его нижнего Σ_0 (при $z = 0$) и верхнего Σ_H (при $z = H > 0$) оснований; $f = f(t, x, y, z)$ — функция, аналитически описывающая источник субстанции; D — оператор вида

$$D = \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z},$$

$\mu = \mu(t, x, y, z) \geq 0$, $(\nabla_{xy}\mu, \nabla_{xy}\psi) = 0$ и $\nu = \nu(t, x, y, z) \geq 0$ — соответственно горизонтальный и вертикальный коэффициенты диффузии; $\alpha = \alpha(t, x, y) \geq 0$ — величина, характеризующая взаимодействие субстанции с подстилающей поверхностью; $\sigma = \sigma(t, x, y) \geq 0$ — величина, характеризующая поглощение субстанции или ее распад.

Задача 2. В условиях задачи 1 будем полагать, что компоненты u_1 и u_2 вектора \mathbf{u} , а также горизонтальный коэффициент диффузии μ , не зависят от z :

$$u_1 = u_1(t, x, y), \quad u_2 = u_2(t, x, y);$$

$$\mu = \mu(t, x, y).$$

Пусть решение задачи (1.1) удовлетворяет условию

$$\psi|_{z=0} \approx \frac{1}{H} \int_0^H \psi dz.$$

Тогда (1.1) можно преобразовать к виду [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}\varphi + \bar{\sigma}\varphi = \mu\Delta\varphi + \bar{f}, \\ \mathbf{x} \in G' \subset R^2, \\ \varphi = \varphi_0 \text{ при } t = 0, \\ \varphi = \varphi_S \text{ на } \Sigma', \end{cases} \quad (1.2)$$

где

$$\varphi = \varphi(t, x, y) = \int_0^H \psi(t, x, y, z) dz \quad (1.3)$$

— интегральная интенсивность аэрозолей;

$$\bar{\mathbf{u}} = \{u_1(t, x, y), u_2(t, x, y)\};$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t, x, y) = \sigma + \frac{\alpha \nu|_{z=0}}{H};$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$\bar{f} = \bar{f}(t, x, y) = \int_0^H f(t, x, y, z) dz$$

— интегральная функция источников аэрозольной субстанции; G' — круг (проекция цилиндра G на плоскость xOy) с границей Σ' ;

$$\varphi_0 = \varphi_0(x, y) = \int_0^H \psi_0(x, y, z) dz;$$

$$\varphi_S = \varphi_S(t, x, y) = \int_0^H \psi_S(t, x, y, z) dz.$$

Положим, что $\mu(t, \mathbf{x}) \geq a > 0$, $a = \text{const}$ при $t \geq 0$ и $\mathbf{x} \in G'$. Существование решения (1.2) следует, в частности, из интегрального представления (1.3) для $\varphi(t, x, y)$ и существования решения задачи (1.1). Предполагается, что все вышеуказанные функции имеют требуемую для дальнейших рассуждений гладкость.

В [1] задача (1.2) решалась численно методом расщепления. Цель данной работы — исследовать и построить приближенное решение задачи (1.2) методом точечных потенциалов, развитым в работах [2–4].

Получаемые приближенные решения обладают рядом преимуществ по сравнению с решениями, полученными численно. Они позволяют наглядно продемонстрировать основные свойства точного решения, их удобнее использовать в прикладных исследованиях.

2. Общая схема построения приближенного решения задачи 2

Процесс построения приближенного решения задачи (1.2) разобьем на два этапа.

2.1. Заменяем исходную задачу (1.2) на ее разностный по времени аналог.

Пусть $\Psi_k(\mathbf{x})$ — приближение решения задачи (1.2) в момент времени t_k , $k = 0, 1, \dots$, $t_0 = 0$, $\Psi_0(\mathbf{x}) \equiv \varphi_0(\mathbf{x})$, $t_{k+1} - t_k = \tau$, $\bar{\mathbf{u}}_k = \bar{\mathbf{u}}(t_k, x, y)$, $f_k = \bar{f}(t_k, x, y)$, $\bar{\sigma}_k = \bar{\sigma}(t_k, x, y)$, $\mu_k = \mu(t_k, x, y)$. Используя неявную аппроксимационную схему [5], запишем для определения $\Psi_{k+1}(\mathbf{x})$, $k = 0, 1, \dots$,

3. Устойчивость приближенного решения

Используя результаты работы [2], покажем устойчивость приближенного решения (2.4) задачи (2.1) к возмущениям функций \bar{f} и φ_0 . Будем предполагать, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Psi_{k+1}^{(i)}(x_1, x_2) - \tilde{\Psi}_{k+1}^{(i)}(x_1, x_2) \right), \quad j = 1, 2$$

удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Psi_{k+1}^{(i)}(x_1, x_2) - \tilde{\Psi}_{k+1}^{(i)}(x_1, x_2) \right) \right\|_{L_2(G')} \leq \text{а значит,} \\ & \leq C_{k+1j}^{(i)} \left\| \Psi_{k+1}^{(i)}(x_1, x_2) - \tilde{\Psi}_{k+1}^{(i)}(x_1, x_2) \right\|_{L_2(G')}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\tilde{\Psi}_{k+1}^{(i)}(x_1, x_2)$ — возмущенное приближенное решение (2.2), $C_{k+1j}^{(i)} = \text{const} \geq 0$, $j = 1, 2$, $i = 1, \dots, l_{k+1}$ и $k = 0, 1, \dots$.

Пусть для заданного $\delta > 0$ выполняются неравенства

$$\|\varphi_0(\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x})\|_{L_2(G')} \leq \delta, \quad (3.2)$$

$$\|\bar{f}_{k+1}(\mathbf{x}) - \tilde{f}_{k+1}(\mathbf{x})\|_{L_2(G')} \leq \delta, \quad (3.3)$$

где $k = 0, 1, \dots$, $\tilde{\varphi}_0(\mathbf{x})$ и $\tilde{f}_{k+1}(\mathbf{x})$ — возмущенные $\varphi_0(\mathbf{x})$ и $f_{k+1}(\mathbf{x})$ из (2.1).

Методом математической индукции докажем справедливость неравенства

$$\left\| \Psi_{k+1}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_{k+1}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} \leq C_{k \text{ реш.}} \delta, \quad (3.4)$$

где $C_{k \text{ реш.}} = \text{const} \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$.

3.1. Пусть $k = 0$, $i = 1$. Начальное приближение

$$\frac{1}{\mu_1(\mathbf{x})} \Phi_1^{(1)}(\mathbf{x})$$

правой части в первом уравнении (2.2) — одно и то же для возмущенной и невозмущенной задач. Следовательно, решение $\Psi_1^{(1)}(\mathbf{x})$ будет невозмущенным. Используя (2.3), (3.2) и (3.3), получим

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\mu_1(\mathbf{x})} \left(\Phi_1^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Phi}_1^{(2)}(\mathbf{x}) \right) \right\|_{L_2(G')} \leq \\ & \leq \max_{\mathbf{x} \in G'} \frac{1}{\mu_1(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{|\tau|} \|\varphi_0(\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x})\|_{L_2(G')} + \right. \\ & \left. + \left\| \bar{f}_1(\mathbf{x}) - \tilde{f}_1(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} \right) \leq C_{0 \text{ п.ч.}}^{(2)} \delta, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\frac{1}{\mu_1(\mathbf{x})} \tilde{\Phi}_1^{(2)}(\mathbf{x})$ — возмущенная правая часть в первом уравнении (2.2), $C_{0 \text{ п.ч.}}^{(2)} = \text{const} \geq 0$.

В силу устойчивости получаемого методом точечных потенциалов приближенного решения (2.4) к возмущению правой части уравнения из (3.5) следует, что

$$\left\| \Psi_1^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_1^{(2)}(\mathbf{x}) \right\|_{C(\bar{G}')} \leq C_{C(\bar{G}')} \delta,$$

$$\left\| \Psi_1^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_1^{(2)}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} \leq C_{0 \text{ реш.}}^{(2)} \delta, \quad (3.6)$$

где $C_{C(\bar{G}')} = \text{const} \geq 0$ и $C_{0 \text{ реш.}}^{(2)} = \text{const} \geq 0$.

Из (3.2), (3.3) и (3.6) вытекает устойчивость приближенного решения $\Psi_1^{(2)}(\mathbf{x})$ к возмущениям $\varphi_0(\mathbf{x})$ и $f_{k+1}(\mathbf{x})$.

3.2. Пусть $k = 0$, $i = 2$. Используя (3.1), оценим сверху следующую норму:

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^2 u_{j1}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Psi_1^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_1^{(2)}(\mathbf{x}) \right) \right\|_{L_2(G')} \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^2 \max_{\mathbf{x} \in G'} |u_{j1}(\mathbf{x})| \times \\ & \times \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Psi_1^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_1^{(2)}(\mathbf{x}) \right) \right\|_{L_2(G')} \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^2 \max_{\mathbf{x} \in G'} |u_{j1}(\mathbf{x})| C_{1j}^{(2)} \times \\ & \times \left\| \left(\Psi_1^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_1^{(2)}(\mathbf{x}) \right) \right\|_{L_2(G')} = \\ & = \left(\sum_{j=1}^2 C_{u_{j1}} C_{1j}^{(2)} \right) \times \\ & \times \left\| \left(\Psi_1^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_1^{(2)}(\mathbf{x}) \right) \right\|_{L_2(G')}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$C_{u_{j1}} = \max_{\mathbf{x} \in G'} |u_{j1}(\mathbf{x})| = \text{const} \geq 0,$$

$$C_{1j}^{(2)} = \text{const} \geq 0, \quad j = 1, 2.$$

Используя (2.3), (3.2), (3.3), (3.6) и (3.7), получим оценку сверху для нормы возмущения правой части уравнения

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\mu_1(\mathbf{x})} \left(\Phi_1^{(3)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Phi}_1^{(3)}(\mathbf{x}) \right) \right\|_{L_2(G')} \leq \\ & \leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{G}'} \frac{1}{\mu_1(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{|\tau|} \|\varphi_0(\mathbf{x}) - \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x})\|_{L_2(G')} + \right. \\ & \quad \left. + \|\bar{f}_1(\mathbf{x}) - \tilde{f}_1(\mathbf{x})\|_{L_2(G')} \right) + \\ & \quad \max_{\mathbf{x} \in \bar{G}'} \frac{1}{\mu_1(\mathbf{x})} \left(\left(\frac{1}{|\tau|} + \max_{\mathbf{x} \in \bar{G}'} |\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x})| + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + |\bar{\sigma}_1| + \left(\sum_{j=1}^2 C_{u_{j1}} C_{1j}^{(2)} \right) \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \left\| \left(\Psi_1^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_1^{(2)}(\mathbf{x}) \right) \right\|_{L_2(G')} \right) \leq \\ & \leq C_{0\text{п.ч.}}^{(3)} \delta, \quad (3.8) \end{aligned}$$

где $C_{0\text{п.ч.}}^{(3)} = \text{const} \geq 0$.

Из (3.8) следует, что

$$\left\| \Psi_1^{(3)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_1^{(3)}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} \leq C_{0\text{реш.}}^{(3)} \delta, \quad (3.9)$$

где $C_{0\text{реш.}}^{(3)} = \text{const} \geq 0$.

Из (3.2), (3.3) и (3.9) вытекает устойчивость приближенного решения $\Psi_1^{(3)}(\mathbf{x})$ к возмущениям $\varphi_0(\mathbf{x})$ и $f_{k+1}(\mathbf{x})$.

Для $i = 4, \dots, l_1$ устойчивость приближенного решения $\Psi_1^{(i)}(\mathbf{x})$ доказывается аналогично (3.8)–(3.9). Следовательно, при выполнении условий (3.1)–(3.3) неравенство (3.4) справедливо для $\Psi_1(\mathbf{x})$

$$\left\| \Psi_1(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} \leq C_{0\text{реш.}} \delta, \quad (3.10)$$

где $C_{0\text{реш.}} = \text{const} \geq 0$.

Из (3.2), (3.3) и (3.10) вытекает устойчивость приближенного решения $\Psi_1(\mathbf{x})$ к возмущениям $\varphi_0(\mathbf{x})$ и $f_{k+1}(\mathbf{x})$.

3.3. Пусть для $k = k_0$, $i = 1$, приближенное решение $\Psi_{k_0}(\mathbf{x})$ устойчиво, то есть

$$\begin{aligned} & \left\| \Psi_{k_0}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_{k_0}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} \leq \\ & \leq C_{k_0-1\text{реш.}} \delta, \quad (3.11) \end{aligned}$$

где $C_{k_0-1\text{реш.}} = \text{const} \geq 0$, при выполнении условий (3.1)–(3.3).

Возможны две ситуации.

1. Начальное приближение

$$\frac{1}{\mu_{k_0+1}(\mathbf{x})} \Phi_{k_0+1}^{(1)}(\mathbf{x})$$

правой части в первом уравнении (2.2) — одинаково для возмущенной и невозмущенной задач. Тогда решение $\Psi_{k_0+1}^{(1)}(\mathbf{x})$ будет невозмущенным и, используя (2.3), (3.3) и (3.11), получим

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\mu_{k_0+1}(\mathbf{x})} \left(\Phi_{k_0+1}^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Phi}_{k_0+1}^{(2)}(\mathbf{x}) \right) \right\|_{L_2(G')} \leq \\ & \leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{G}'} \frac{1}{\mu_{k_0+1}(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{|\tau|} \left\| \Psi_{k_0}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_{k_0}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} + \right. \\ & \quad \left. + \left\| \bar{f}_{k_0+1}(\mathbf{x}) - \tilde{f}_{k_0+1}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} \right) \leq \\ & \leq C_{k_0\text{п.ч.}}^{(2)} \delta, \quad (3.12) \end{aligned}$$

где $C_{k_0\text{п.ч.}}^{(2)} = \text{const} \geq 0$.

Из (3.12) следует, что

$$\begin{aligned} & \left\| \Psi_{k_0+1}^{(2)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_{k_0+1}^{(2)}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} \leq \\ & \leq C_{k_0\text{реш.}}^{(2)} \delta, \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$C_{k_0\text{реш.}}^{(2)} = \text{const} \geq 0.$$

Из (3.2), (3.3) и (3.13) вытекает устойчивость приближенного решения $\Psi_{k_0+1}^{(2)}(\mathbf{x})$ к возмущениям $\varphi_0(\mathbf{x})$ и $f_{k+1}(\mathbf{x})$.

2. Начальное приближение правой части в первом уравнении (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_{k_0+1}(\mathbf{x})} \Phi_{k_0+1}^{(1)}(\mathbf{x}) \text{ — для невозмущенной и} \\ & \frac{1}{\mu_{k_0+1}(\mathbf{x})} \tilde{\Phi}_{k_0+1}^{(1)}(\mathbf{x}) \text{ — для возмущенной задачи,} \\ & \text{причем} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\mu_{k_0+1}(\mathbf{x})} \left(\Phi_{k_0+1}^{(1)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Phi}_{k_0+1}^{(1)}(\mathbf{x}) \right) \right\|_{L_2(G')} \leq \\ & \leq C_{k_0\text{п.ч.}}^{(1)} \delta, \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$C_{k_0\text{п.ч.}}^{(1)} = \text{const} \geq 0.$$

Тогда из (3.14) следует, что

$$\begin{aligned} & \left\| \Psi_{k_0+1}^{(1)}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_{k_0+1}^{(1)}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} \leq \\ & \leq C_{k_0\text{реш.}}^{(1)} \delta, \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$C_{k_0 \text{реш.}}^{(1)} = \text{const} \geq 0.$$

Учитывая (3.2), (3.3) и (3.15), заключаем, что приближенное решение $\Psi_{k_0+1}^{(1)}(\mathbf{x})$ устойчиво к возмущениям $\varphi_0(\mathbf{x})$ и $f_{k+1}(\mathbf{x})$.

Для $i = 2, 3, \dots, l_{k_0+1}$ устойчивость приближенного решения $\Psi_{k_0+1}^{(i)}(\mathbf{x})$ доказывается аналогично (3.7)–(3.9). Следовательно, при выполнении условий (3.1)–(3.3) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \Psi_{k_0+1}(\mathbf{x}) - \tilde{\Psi}_{k_0+1}(\mathbf{x}) \right\|_{L_2(G')} &\leq \\ &\leq C_{k_0 \text{реш.}} \delta, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$C_{k_0 \text{реш.}} = \text{const} \geq 0.$$

Из (3.2), (3.3) и (3.16) вытекает устойчивость приближенного решения $\Psi_{k_0+1}(\mathbf{x})$ к возмущениям $\varphi_0(\mathbf{x})$ и $f_{k+1}(\mathbf{x})$.

4. Пример

Приведем пример построения вышеописанным методом (с использованием среды Borland Delphi 7 и вычислительных библиотек компилятора Compaq Fortran) приближенного решения задачи (1.2).

Пусть область G' представляет собой круг единичного радиуса с центром в начале координат: $G' = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. В G' рассмотрим функцию

$$\varphi(t, x, y) = \exp(-(x^2 + y^2 + t)). \quad (4.1)$$

Она является точным решением задачи (1.2) если

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, x, y) &= \exp(-(x^2 + y^2 + t)) \times \\ &\times (\bar{\sigma} - 1 - 2(u_1 x + u_2 y) - 4\mu(x^2 + y^2 - 1)), \end{aligned}$$

$$\varphi_0(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)),$$

$$\varphi_S(t) = \exp(-(1 + t)).$$

Пусть $u_1 = 2, 5$, $u_2 = 0$, $\bar{\sigma} = 0, 005$, $\mu = 2, 5$, $t \in [0, 1; 1]$, шаг дискретизации по времени $\tau = 0, 1$, $\|\varphi(t_{k+1}, \mathbf{x}) - \Psi_{k+1}(\mathbf{x})\|_{C(\bar{G}')} < \varepsilon$, $k = 0, 1, \dots, 9$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

Для использования метода точечных потенциалов значения $\Phi_{k+1}^{(i+1)}(\mathbf{x})$ вычислялись с помощью (2.3) во всех узлах интегрирования по G' . В качестве первого приближения правой части в первом уравнении (2.2) для каждого временного слоя был выбран лапласиан

решения, полученного на предыдущем временном слое

$$\Delta \Psi_{k+1}^{(1)}(\mathbf{x}) = \Delta \Psi_k(\mathbf{x}), \quad k = 0, 1, \dots, 9,$$

где

$$\Delta \Psi_k(\mathbf{x}) = \Delta \Psi_k^{(l_k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu} \Phi_k^{(l_k)}(\mathbf{x}),$$

$$\left\| \varphi(t_k, \mathbf{x}) - \Psi_k^{(l_k)}(\mathbf{x}) \right\|_{C(\bar{G}')} < \varepsilon,$$

$$k = 1, \dots, 9.$$

С учетом (2.4) приближенное решение (2.1) в данном случае примет вид

$$\begin{aligned} \Psi_{k+1}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{A} \left(- \int_{G'} \frac{1}{\mu} \Phi_{k+1}^{(l_{k+1})}(\mathbf{y}) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} - \right. \\ &- \int_{\Sigma'} \left[\exp(-(1 + t_{k+1})) \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{y}}} \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \right. \\ &\left. \left. - \left(\sum_{j=1}^{40} c_j^{(k+1)} \alpha_j(\mathbf{y}) + C \right) \ln \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right] ds_{\mathbf{y}} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $k = 0, 1, \dots, 9$, $|\mathbf{x}^j| = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, 40$.

Приближенные решения задачи (1.2) вида (4.2) были построены как для указанных (точных) входных функций задачи, так и для возмущенной функции из начального условия $\varphi_{0 \text{возм.}}(x, y) = 1, 03\varphi_0(x, y)$ и интегральной функции источников $\bar{f}_{\text{возм.}}(t, x, y) = 1, 01\bar{f}(t, x, y)$.

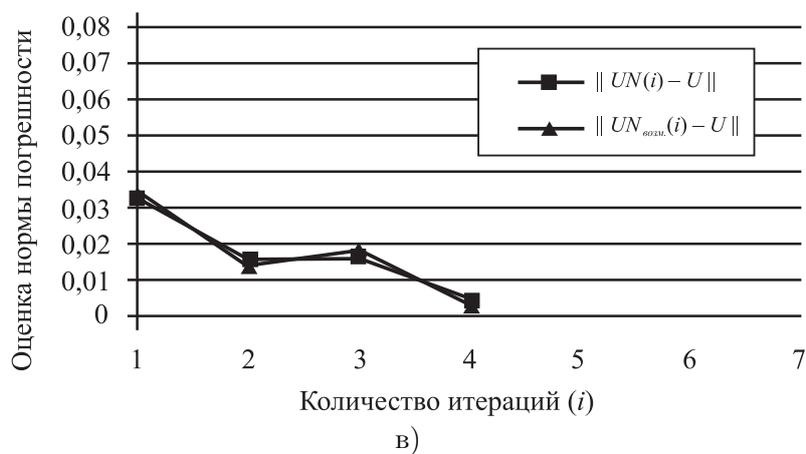
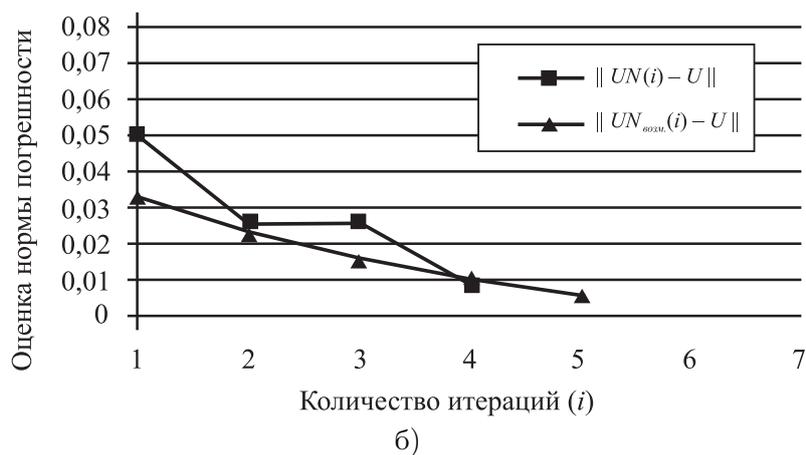
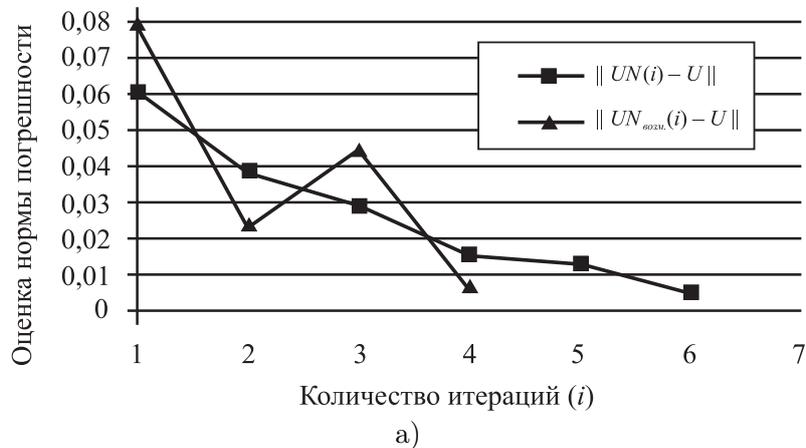
Результаты сходимости невозмущенного и возмущенного приближенных решений задачи (1.2) к точному (4.1) для различных моментов времени приведены в таблице и на рисунке.

Здесь введены следующие обозначения: $UN(i)$, $UN_{\text{возм.}}(i)$ — соответственно невозмущенные и возмущенные приближенные решения после i -й итерации; U — точное решение. Нормы понимаются в смысле $C(\bar{G}')$.

Выводы

В работе предложен метод построения приближенных решений задачи (1.2).

На основании проведенных контрольных расчетов, результаты которых приведены в таблице и на рисунке, можно утверждать, что как при невозмущенных, так и при возмущенных входных данных приближенные



Сходимость приближенных решений задачи 2 к точному

Сходимость приближенных решений задачи 2 к точному

Момент времени, t_k	Кол-во итераций (i)	$\ UN(i) - U\ $	$\ UN_{\text{возм.}}(i) - U\ $
0,1	1	0,060	0,079
	2	0,038	0,024
	3	0,029	0,045
	4	0,015	0,007
	5	0,013	
	6	0,005	
0,5	1	0,049	0,033
	2	0,026	0,023
	3	0,025	0,015
	4	0,008	0,010
	5		0,006
1,0	1	0,031	0,033
	2	0,015	0,013
	3	0,016	0,018
	4	0,004	0,003

решения (4.2) достаточно быстро сходятся к точному решению (4.1) на рассматриваемом интервале времени: норма абсолютной ошибки погрешности порядка 10^{-3} достигается за 3–6 итераций (причем для достаточно большого шага дискретизации по времени $\tau = 0,1$).

Литература

1. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
2. Захаров М. Ю., Семенчин Е. А. О построении приближенного решения плоской задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом точечных потенциалов // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16. Вып. 3. С. 463–464.
3. Лежнев В. Г. Метод решения краевых задач уравнения Пуассона // Численный анализ: методы и алгоритмы. М.: МГУ, 1998. С. 36–44.
4. Захаров М. Ю. Обратная задача определения плотности логарифмического потенциала двойного слоя и применение к решению краевой задачи // Численный анализ: теория, приложения, программы. М.: МГУ, 1999. С. 113–120.
5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

Ключевые слова: краевые задачи рассеяния примеси, интенсивность аэрозольной субстанции, подстилающая поверхность, метод точечных потенциалов, устойчивость решения.