УДК 518.8:53

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОНВЕКЦИИ В МАЛОЙ КАПЛЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Лесев В. Н.[1]

STUDY OF CONVECTION IN A SMALL DROP LYING ON A SOLID HORIZONTAL SURFACE

Lesev V. N.

The process of the stationary natural convection in a small drop has been studied in the case of partial wetting. The usual differential equation without special points in given area has been built, the solution of which determines the shape of the profile of free surface of a drop. It is shown that the drop motion depends on the edge angle of wetting. Basing on the analytical solutions we carried out numerical experiments, calculated water-surface profiles and flux functions.

Keywords: drop, convection, water-surface profile, angle of wetting, mathematical model, numerical experiment.

Введение

Процессы смачивания и растекания жидких фаз по твердой поверхности в различных средах являются начальными и важнейшими стадиями многих физико-химических явлений, сопутствующих современным технологиям [1–3], а задача управления этими процессами через внешние поля (температурные, электрические, магнитные и т. д.) является одной из наиболее актуальных на сегодняшний день. При этом движение жидкости малого объема со свободной поверхностью обладает существенным своеобразием, поскольку потоки массы, импульса и энергии на границе раздела фаз газ–жидкость связаны с динамикой самой поверхности жидкости [4, 5]. На этом своеобразие не исчерпывается. В жидких каплях и тонких пленках около свободной поверхности имеют место различные явления со сложной физико-химической природой, в частности, явления, определяемые поверхностным натяжением.

На сегодняшний день хорошо известно, что явление поверхностного натяжения легко может быть описано системой уравнений гидродинамики [6]. Также не вызывают затруднений и методы его определения экспериментальным путем [7–9]. Однако успехи капиллярной теории относятся к случаям, когда форма профиля поверхности либо определена заранее, либо является стационарной.

Существенно отличаются от указанных процессы, протекающие в жидкостях со свободной границей, которые в значительной степени зависят от явления смачивания. Причем одной из основных характеристик в подобных случаях выступает угол смачивания θ, т. е. угол, образованный касательной к поверхности жидкой фазы и подложкой в точке их соприкосновения и отсчитываемый со стороны жидкости.

Остановимся на исследовании одной из задач, относящихся к проблемам смачивания твердых поверхностей малыми каплями, пренебрегая силами, действующими по касательной к линии соприкосновения жидкой и твердой сред, и считая постоянным химический состав контактирующих фаз. Такое ограничение приводит к математическому упрощению задач теории капиллярности и влечет замену капли цилиндром, сводя трехмерную задачу к двухмерной.

1. Постановка задачи

Рассмотрим процесс естественной конвекции в жидкой капле при квазиодномерном ее растекании со свободной поверхностью по го-

[1]Лесев Вадим Николаевич, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; e-mail: lvn_kbsu@mail.ru.

ризонтальной твердой подложке с температурой T_S. При неполном смачивании жидкостью ограниченного объема V поверхности твердого тела и симметрии профиля капли относительно плоскости $x = 0$ в приближении теории смазки исследуемый процесс может быть описан следующей системой уравнений:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + g\left[1 + \beta\left(T_S - T\right)\right] = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \tag{1.4}$$

где $T(x,z)$ — температура, $P(x,z)$ — давление, $u_1 = \vartheta_x$, $u_2 = \vartheta_z$ — составляющие вектора скорости $\boldsymbol{\vartheta}(x,z)$, $z = h(x)$ — уравнение профиля свободной поверхности, $h_0 = h(0)$ — высота капли в апексе, $\pm x_0$ — неизвестные абсциссы точек трехфазного контакта, g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения, ν, ρ — кинематическая вязкость и плотность жидкой капли.

Дополним систему (1.1)–(1.4) следующими условиями:

$$\left(P - P_0\right)\big|_{z=h(x)} = -\sigma h''(x), \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=h(x)} = 0, \tag{1.6}$$

$$u_2\big|_{z=h(x)} - u_1\big|_{z=h(x)} h'(x) = 0, \tag{1.7}$$

$$\left.\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \alpha T\right)\right|_{z=h(x)} = 0, \tag{1.8}$$

$$u_1(x,z)\big|_{z=0} = u_2(x,z)\big|_{z=0} = 0, \tag{1.9}$$

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} h(x)\,dx = S, \tag{1.10}$$

где P_0 — внешнее давление, σ — межфазное поверхностное натяжение на границе жидкость – окружающая среда, α — коэффициент теплоотдачи, S — площадь радиального сечения капли.

2. Распространение температуры в жидкости

В рамках исследуемой модели получим закон распространения температуры внутри жидкой капли.

Дважды интегрируя (1.4), учетывая (1.8) и принимая во внимание, что $T(x,z)\big|_{z=0} = T_S$, будем иметь

$$T(x,z) = T_S - \alpha z T(x,h), \tag{2.1}$$

где температура свободной поверхности $T(x,h)$ определяется равенством

$$T(x,h) = \frac{T_S}{1+\alpha h}. \tag{2.2}$$

Таким образом, на основании (2.1) и (2.2) можем записать

$$T(x,z) = T_S\left(1 - \frac{\alpha z}{1+\alpha h}\right). \tag{2.3}$$

Из последнего соотношения следует, что температура внутри жидкой капли прямо пропорциональна температуре подложки, а ее распространение представляет собой нелинейный процесс, существенно зависящий от профиля межфазной поверхности.

3. Определение профиля капли

Принимая во внимание (2.3), представим соотношение (1.2) в виде

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g\left(1 + \frac{\alpha\beta T_S z}{1+\alpha h}\right). \tag{3.1}$$

Дифференцируя по переменной x равенство (3.1), будем иметь

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial x} = \frac{\alpha^2\,\rho\,g\,\beta\,T_S}{\left(1+\alpha\,h\right)^2}\,z\,h'.$$

Интегрируя последнее от 0 до z, получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\alpha^2\rho g\beta T_S}{2\left(1+\alpha h\right)^2}h'z^2 + f(h), \tag{3.2}$$

где $f(h)$ — неизвестная пока функция.

Из (1.1), с учетом (3.2), приходим к соотношению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \frac{f(h)}{\nu\rho} + \frac{\alpha^2\,g\beta T_S}{2\nu\left(1+\alpha h\right)^2}h'z^2.$$

В результате интегрирования от z до h, с учетом граничного условия (1.6), последнее равенство примет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{(h-z)\,f(h)}{\nu\,\rho} + \frac{\alpha^2 g\beta T_S h'}{6\nu\left(1+\alpha h\right)^2}\left(h^3 - z^3\right).$$

Отсюда, интегрируя от 0 до z и принимая во внимание (1.9), будем иметь

$$u_1(x,z) = \frac{\left(2hz - z^2\right) f(h)}{2\nu\rho} + \\ + \frac{\alpha^2 g\,\beta T_S\, h'}{24\nu\,(1+\alpha h)^2}\left(4h^3 z - z^4\right). \quad (3.3)$$

Из (3.3) с учетом условия неразрывности получим

$$\int_0^h u_1(x,z)\,dz = \frac{f(h)}{2\nu\rho}\left(2h\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}\right) + \\ + \frac{\alpha^2 g\beta T_S h'}{24\nu\,(1+\alpha h)}\left(4h^3\frac{h^2}{2} - \frac{h^5}{5}\right) = 0,$$

откуда находим

$$f(h) = -\frac{9\alpha^2\rho g\beta T_S h' h^2}{40\,(1+\alpha h)^2}. \quad (3.4)$$

Учитывая (3.4), уравнение (3.2) можно представить

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\alpha^2\rho g\beta T_S h'}{40\,(1+\alpha h)^2}\left(20z^2 - 9h^2\right). \quad (3.5)$$

В свою очередь, из (1.5) имеем

$$\left(P_0 - \sigma h''\right)' = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{z=h(x)} + \left.\frac{\partial P}{\partial z}\right|_{z=h(x)} h'.$$

Отсюда, принимая во внимание соотношения (3.1) и (3.5), находим

$$\sigma h''' = \rho g h' + \frac{\alpha\rho g\beta T_S h' h}{1+\alpha h} - \\ - \frac{11\alpha^2\rho g\beta T_S h' h^2}{40\,(1+\alpha h)^2}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) окончательно получим уравнение свободной поверхности

$$\sigma h''' - \rho g h' - \alpha\rho g\beta T_S h' h\times \\ \times\left(1 + \frac{29}{40}\alpha h\right)[1+\alpha h]^{-2} = 0. \quad (3.7)$$

Для решения (3.7) введем новую функцию $w(h) = h'$, в результате чего это уравнение примет вид

$$w\left(\frac{dw}{dh}\right)^2 + w^2\frac{d^2w}{dh^2} - \\ - \frac{w\rho g}{\sigma}\left[1 + \alpha\beta T_S h\frac{1+\frac{29}{40}\alpha h}{(1+\alpha h)^2}\right] = 0.$$

В силу того, что $h'(x)|_{x=\pm x_0} = \mp\operatorname{tg}\theta \neq 0$, а следовательно, $w \neq 0$, можем представить последнее равенство в форме

$$d\left(w\frac{dw}{dh}\right) = F_0(h)\,dh, \quad (3.8)$$

где

$$F_0(h) = \frac{\rho g}{\sigma}\left[1 + \alpha\beta T_S h\frac{1+\frac{29}{40}\alpha h}{(1+\alpha h)^2}\right].$$

Интегрируя (3.8) с учетом принятых обозначений, будем иметь

$$d\left(w^2\right) = 2c\,dh + F_1(h)\,dh, \quad (3.9)$$

где

$$F_1(h) = \frac{2\rho g h}{\sigma} + \frac{1,45\rho g\beta T_S}{\sigma}h + \\ + \frac{\rho g\beta T_S}{\sigma}\left[\frac{0,55}{\alpha\,(1+\alpha h)} - \frac{0,9}{\alpha}\ln|1+\alpha h|\right].$$

Принимая во внимание, что $w|_{h=h_0} = 0$ из (3.9), получим

$$w^2 = 2c\,(h-h_0) - \int_h^{h_0} F_1(h)\,dh. \quad (3.10)$$

Производя обратную замену искомой функции $w = dh/dx$, после разделения переменных перепишем (3.10) в виде

$$dx = \frac{dh}{\sqrt{2c\,(h-h_0) + F_2(h)}}, \quad (3.11)$$

где

$$F_2(h) = -\int_h^{h_0} F_1(h)\,dh.$$

Из соотношения (3.11) и (1.10) получим

$$V = SL = 2L\int_{-x_0}^{0} h(x)\,dx = \\ = \int_0^{h_0}\frac{2Lh(x)\,dh}{\sqrt{2c\,(h-h_0) + F_2(h)}},$$

где L — характерная длина капли.

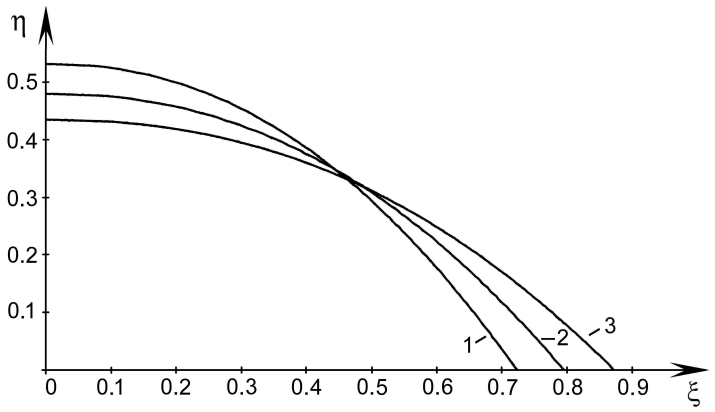


Рис. 1. Деформация профиля свободной поверхности капли с изменением температуры подложки: 1 — 293°K; 2 — 298°K; 3 — 303°K

Последнее равенство свидетельствует о том, что в рамках исследуемой модели задание объема капли V равносильно заданию её высоты h_0.

Далее, принимая во внимание, что

$$h'(x)\big|_{x=-x_0} = \sqrt{2c\left(h|_{x=-x_0} - h_0\right) + F_2\left(h|_{x=-x_0}\right)} = \operatorname{tg}\theta,$$

будем иметь

$$\operatorname{tg}^2\theta = F_2(0) - 2ch_0$$

или

$$c = -\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{2h_0} - \frac{\rho g h_0}{\sigma}\left(1 + 0,725\beta T_S\right) + \frac{\rho g \beta T_S}{2h_0\sigma}\left[\frac{0,9}{\alpha}h_0 - \left(\frac{0,35}{\alpha^2} + \frac{0,9}{\alpha}h_0\right)\ln\left|1+\alpha h_0\right|\right]. \quad (3.12)$$

В свою очередь

$$F_2(h) = \frac{2\rho g + 1,45\rho g\beta T_S}{2\sigma}\left(h^2 - h_0^2\right) + \frac{\rho g\beta T_S}{\sigma}\left[\frac{0,9}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\ln\frac{(1+\alpha h_0)^{1+\alpha h_0}}{(1+\alpha h)^{1+\alpha h}} - h_0 + h\right) - \frac{0,55}{\alpha^2}\ln\left(\frac{|1+\alpha h_0|}{|1+\alpha h|}\right)\right]. \quad (3.13)$$

Интегрируя (3.11) и принимая во внимание, что $h(x)|_{x=\pm x_0} = 0$, окончательно получим

$$x = x_0 - \int_0^h \frac{dh}{\sqrt{2c(h-h_0) + F_2(h)}}, \quad (3.14)$$

где c и $F_2(h)$ определяются формулами (3.12), (3.13).

После перехода к безразмерным переменным $\xi = x/a$, $\eta = h/a$, $a^2 = \sigma/\rho g$, на основе (3.14) был проведен ряд вычислительных экспериментов, результаты одного из которых приведены на рис. 1.

Расчетные профили представленные на рис. 1, были построены в пакете MathCAD. При этом были использованы экспериментальные данные для капель дистиллированной воды при различных значениях температуры поверхности бариево-боратного стекла марки X230, которое является конструкционным материалом микроканальных пластин [10].

4. Расчет компонент вектора скорости и функции тока

Принимая во внимание (3.4), из (3.3)

$$u_1(x,z) = \frac{\alpha^2 g\beta T_S h'}{240\nu(1+\alpha h)^2}\times \left(27h^2z^2 - 14h^3z - 10z^4\right). \quad (4.1)$$

Полагая здесь $z = h$, получим

$$u_1(x,h) = \frac{\alpha^2 g\beta T_S h' h^4}{80\nu(1+\alpha h)^2}. \quad (4.2)$$

С другой стороны, из кинематического условия (1.7) (4.2)

$$u_2(x,h) = \frac{\alpha^2 g\beta T_S h' h^4}{80\nu(1+\alpha h)^2}.$$

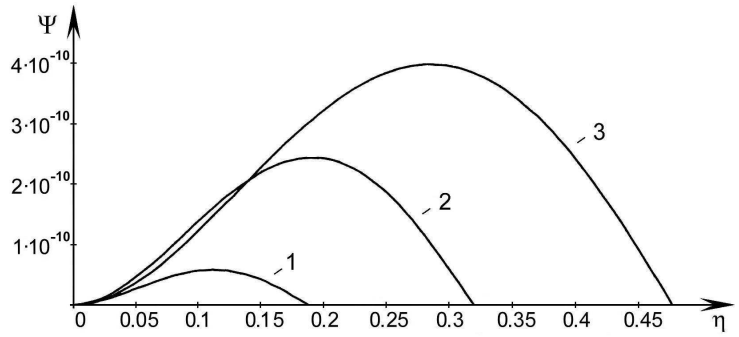


Рис. 2. Изменение функции тока с высотой капли: 1 — $\eta = 0,186$; 2 — $\eta = 0,319$; 3 — $\eta = 0,479$

Дифференцируя (4.1) по x, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\alpha^2 g\beta T_S}{240\nu\left(1+\alpha h\right)^3}\times \\ \times\left\{\left[h''\left(1+\alpha h\right)-2\alpha\left(h'\right)^2\right]\times \right. \\ \times\left(27h^2z-14h^3-10z^3\right)z+ \\ \left.+\,6zh\left(h'\right)^2\left(1+\alpha h\right)\left(9z-7h\right)\right\}. \quad (4.3)$$

Из уравнения (1.3), учитывая (4.3) и граничное условие (1.9), будем иметь

$$u_2\left(x,z\right) = \frac{\alpha^2\, g\,\beta\, T_S}{240\nu\left(1+\alpha h\right)}\times \\ \times\left\{\left[h''\left(1+\alpha h\right)-2\alpha\left(h'\right)^2\right]\times \right. \\ \times\left(9h^2z^3-7h^3z^2-2z^5\right)+ \\ \left.+\,3\,h\left(h'\right)^2\left(6z^3-7hz^2\right)\right\}.$$

Таким образом, функция тока $\Psi\left(x,z\right)$, связанная с компонентами скорости соотношениями $u_1 = -\partial\Psi/\partial z$ и $u_2 = -\partial\Psi/\partial x$, определяется равенством

$$\Psi\left(x,z\right) = \frac{g\beta T_S\alpha^2}{240a}\sqrt{c\left(h-h_0\right)+F_2\left(h\right)}\times \\ \times\frac{z^2\left(7h^3+2z^3-9zh^2\right)}{\left(1+\alpha h\right)^2}.$$

На рис. 2 приведены графики функции тока для системы дистиллированная вода – бариево-боратное стекло, при температуре $T = 293$°K в безразмерных переменных.

Заключение

Проблема описания явления неполного смачивания твердых поверхностей жидкими фазами представляется одной из наиболее актуальных. При рассмотрении смачивания как процесса интенсивного переноса появляется возможность обоснованно учесть реальные силы, действующие вблизи линии раздела фаз. Такой подход к явлению смачивания позволяет проверить экспериментальным путем с высокой степенью наглядности основные физико-химические зависимости исследуемой системы.

В частности, расчеты показывают, что с увеличением температуры твердой поверхности краевой угол смачивания уменьшается вместе с высотой капли в апексе, абсцисса точки трехфазного контакта увеличивается, а функция тока пропорциональна величине dh/dx. Эти результаты проведенного вычислительного эксперимента согласуются с экспериментальными наблюдениями и свидетельствуют о том, что интенсивность движения жидкости в капле при прочих равных условиях определяется углом смачивания θ.

Следует также отметить, что полученные результаты могут быть использованы при решении задач [11, 12], связанных с расчетом температурной зависимости физико-химических параметров (a, σ, θ) трехфазной системы по деформации профиля свободной поверхности капли.

Литература

1. *Попель С. И.* Поверхностные явления в расплавах. М.: Металлургия, 1994. 440 с.
2. *Anderson M. A., Hung A. Y. C., Mills D., Scott M. S.* Factors affecting the surface tension of soil solutions and solutions of humic acids // Soil Sci. 1995. Vol. 160. P. 111–116.
3. *Ахкубеков А. А., Оркваcов Т. А., Созаев В. А.* Контактное плавление металлов и наноструктур на их основе. М.: Физматлит, 2008. 152 с.

4. *Калинин В. В., Старов В. М.* Растекание капель жидкости с учетом действия поверхностных сил // Коллоидный журнал. 1988. Т. 50. № 1. С. 25–32.
5. *Лесев В. Н.* Аналитическое решение задачи о нахождении стационарного профиля малой «плоской» капли лежащей на неровной поверхности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 2. С. 38–42.
6. *Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 398 с.
7. *Русанов А. И., Порхаев В. А.* Межфазная тензиометрия. СПб.: Химия. 1994. 400 с.
8. *Goebel M.-O., Bachmann J., Woche S. K., Fischer W. R., Horton R.* Water potential and aggregate size effects on contact angle and surface energy // Soil Sci. Soc. Am. J. 2004. Vol. 68. P. 383–393.
9. *Glorieux B., Millot F., Rifflet J. C.* Surface Tension of Liquid Aluminia from Contactless Techniques // Int. Journal of Thermophisics. 2002. Vol. 23. № 5. P. 1249–1257.
10. *Керефов А. Х., Калинина Н. В., Ашхотов О. Г.* Кинетика травления бариево-боратного стекла Х-230 в кислотных смесях // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2005. № 5. С. 55–58.
11. *Аникин Д. Ю., Филонов М. Р., Иванов С. В., Левин Ю. Б.* Алгоритм расчета плотности и поверхностного натяжения расплавов методом большой капли при формировании изображения в цифровом формате // Изв. вузов. Черная металлургия. 2003. № 7. С. 10–13.
12. *Канчукоев В. З., Лесев В. Н., Созаев В. А.* Оценка возможных погрешностей при анализе профилей поверхности малых капель металлов // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2009. № 4. С. 44–48.

Ключевые слова: капля, конвекция, профиль поверхности, угол смачивания, математическая модель, вычислительный эксперимент.

Статья поступила 17 декабря 2009 г.
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик
© Лесев В. Н., 2009