

УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СРЕДАХ С ПОКРЫТИЯМИ¹

Павлова А. В.², Колесников М. Н.³

ON THE PROBLEM OF MODELING DYNAMIC PROCESSES IN MEDIUMS WITH COATING

Pavlova A. V., Kolesnikov M. N.

A method of study dynamic problems of semi-bounded medium with coating is discussed. The coating is considered as a plate which motion is described by systems of linear differential equations in displacements.

Keywords: coating, foundation, layered medium, inclusion.

Контактные задачи для тел с покрытиями и прослойками затрагивают как вопросы контактного взаимодействия накладок и включений с массивными деформируемыми телами, так и проблемы взаимодействия тел, армированных тонкими покрытиями или прослойками. Такие задачи возникают при исследовании передачи нагрузок от тонкостенных элементов к деформируемым телам в инженерной практике, например, при создании методов расчета фундаментов и оснований, дорожных покрытий, гидротехнических сооружений и т.п. Одним из путей повышения износоустойчивости конструкций является использование в них слоистых композиций с покрытием, где подложка обеспечивает демпфирование, а покрытие — антифрикционные свойства. Такие многослойные материалы и элементы конструкций находят широкое применение в различных отраслях строительства и промышленности. В этой связи развитие методов исследования напряженно-деформированного состояния тел с покрытиями является актуальным.

Проблема передачи нагрузки на массивные тела через тонкостенные покрытия на практике сводится к исследованию деформации пластин, лежащих на деформируемой подложке, при этом рассматриваются раз-

личные механические модели покрытия [1–4]. В качестве основания, на котором находится покрытие, можно принимать деформируемое полупространство, слой, многослойную среду, в том числе, содержащую внутренние неоднородности, и т.д. Учет сложных свойств подложки (неоднородность, анизотропия и пр.) даже в рамках линейной теории упругости приводит к увеличению математических трудностей при исследовании указанных задач.

В работе рассматривается модель колебаний пластины, лежащей без отрыва на трехмерном линейно-деформируемом основании. На поверхности пластины в произвольной области задана осциллирующая нагрузка. Основание представляет собой пакет слоев на упругом полупространстве в условиях неидеального контакта между ними. На границе раздела слоев расположены плоские включения, в области которых вектор напряжений претерпевает разрыв. Плоскости включений параллельны недеформированной поверхности упругой среды. Ключевым моментом в решении данной задачи является построение системы функционально-матричных уравнений, связывающих перемещения и напряжения на верхней границе подложки, а также скачки напряжений на границах неоднород-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-01-99013, 08-01-99016, 08-08-00669, 09-01-96503, 09-08-00170, 09-08-00294) и гранта Президента РФ (НШ-2298.2008.1).

²Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

³Колесников Максим Николаевич, студент факультета компьютерных технологий и прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: kolesnikov@kubsu.ru.

ностей, на основе которых строится система интегральных уравнений на границе раздела между покрытием и подложкой.

1. Постановка задачи. Целесообразность рассмотрения кусочно-неоднородных сред может быть обоснована структурой реальных объектов или удобством соответствующей дискретизации неоднородной среды. Исследование динамических контактных задач для многослойных сред с внутренними дефектами связано с рядом трудностей как чисто теоретического, так и практического характера. Используемый подход позволяет преодолеть сложности, связанные с нарастанием размерности, при построении систем интегральных уравнений в случае множественных неоднородностей.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат, где плоскость x_1Ox_2 параллельна поверхности среды ($x_3 = h_{N+1} \geq 0$, $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$), а ось Ox_3 направлена вверх, рассматривается задача об установившихся гармонических колебаниях многослойной среды. Пакет, составленный из N монослоев, ограниченных плоскостями $x_3 = h_i$, $x_3 = h_{i+1}$ ($i = \overline{1, N}$), расположен на поверхности упругого полупространства. При этом $x_3 = h_1$ совпадает с нижней границей пакета. Физико-механические свойства подложки предполагаются кусочно-однородными по координате x_3 и однородными по x_1, x_2 . Обозначим индексом i соответственно параметры Ламе и плотность λ_i, μ_i, ρ_i , относящиеся к i -му слою, упругие характеристики и плотность полупространства — λ_1, μ_1, ρ_1 соответственно.

Учитывая установившийся характер движения среды, все параметры задачи представляются в виде $g_1(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Далее рассматриваются амплитудные значения заданных и искомых функций, временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен.

Перемещения точек среды, вызванные вибрацией границ жестких включений, описываются системой уравнений Ламе

$$(\lambda_k + \mu_k) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_k + \mu_k \Delta \mathbf{u}_k + \rho_k \omega^2 \mathbf{u}_k = 0, \quad (1)$$

$$k = \overline{1, N+1}.$$

В плоскостях раздела упругих сред на высотах h_n имеются однородные включения, занимающие области Ω_n . На поверх-

ностях $x_3 \rightarrow h_n \pm 0$ указанных плоскостей действуют напряжения $\boldsymbol{\tau}_n^\pm(x_1, x_2, h_n) \equiv \boldsymbol{\tau}_n(x_1, x_2, h_n \pm 0) = (\tau_{n1}^\pm, \tau_{n2}^\pm, \tau_{n3}^\pm)$, перемещения точек поверхностей определяются векторами $\mathbf{u}_n^\pm = (u_{n1}^\pm, u_{n2}^\pm, u_{n3}^\pm)$, причем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^+(x_1, x_2, h_n) &= \mathbf{u}_n^-(x_1, x_2, h_n) = \\ &= \mathbf{u}_n(x_1, x_2, h_n), \\ -\infty &< x_1, x_2 < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_n^+(x_1, x_2, h_n) - \boldsymbol{\tau}_n^-(x_1, x_2, h_n) &= \\ &= \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_n, \\ \boldsymbol{\tau}_n, & (x_1, x_2) \in \Omega_n. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}_n$ — амплитуда скачка напряжений на включении в области Ω_n в плоскости $x_3 = h_n$. Подобные совокупности неоднородностей относятся к «вирусам» вибропрочности класса 1 [5]. Излагаемый ниже подход также применим в случае идеального контакта между слоями, когда $\boldsymbol{\tau}_n^+(x_1, x_2, h_n) = \boldsymbol{\tau}_n^-(x_1, x_2, h_n)$.

Далее будем предполагать, что поверхность подложки совмещена с плоскостью x_1Ox_2 , т. е. $h_1 < \dots < h_{N+1} = 0$, и заданы $\mathbf{u}_n(x_1, x_2, h_n)$, $(x_1, x_2) \in \Omega_n$, $n = \overline{1, N}$.

Особенностью общих закономерностей, относящихся к задачам для тонких оболочек и пластин, является сведение уравнений трехмерной задачи теории упругости к уравнениям для двух измерений. В качестве покрытия рассматривается двумерная деформируемая пластина с усредненными по толщине параметрами.

Для однослойной однородной оболочки координатную плоскость x_1Ox_2 свяжем с ее срединной поверхностью. В [3] построены нелинейные уравнения в перемещениях, описывающие поведение тонкостенных оболочек. В [6] приводится метод решения задач для упругих сред с плоскими покрытиями. В результате линеаризации уравнения движения пластины в случае установившегося с частотой ω режима колебаний принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \\ + \beta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \beta_2 u_1 + \beta_5 (t_1 + b_1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \beta_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \\ + \beta_2 u_2 + \beta_5 (t_2 + b_2) = 0, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\beta_4 \nabla^2 \nabla^2 u_3 - \beta_2 u_3 - \beta_5 (t_3 + b_3) = 0,$$

где

$$\beta_1 = \frac{1 - \nu}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\omega^2 \rho (1 - \nu)}{2\mu},$$

$$\beta_3 = \frac{1 + \nu}{2}, \quad \beta_4 = \frac{h^2}{12}, \quad \beta_5 = \frac{1 - \nu}{2\mu h},$$

h — толщина покрытия, μ, ν — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала, $u_{1,2}(\mathbf{x}, t)$ — перемещения точек срединной поверхности в плоскости $x_1 O x_2$, $u_3(\mathbf{x}, t)$ — прогиб срединной поверхности, $t_i(\mathbf{x}, t)$ — компоненты вектора усилий $\mathbf{t}$ на нижней грани пластины, $b_i(\mathbf{x}, t)$ — на верхней грани, $i = \overline{1, 3}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, причем заданная нагрузка $\mathbf{b} \neq 0$ при $(x_1, x_2) \in \Omega_{N+1}$ и $\mathbf{b} \equiv 0$ при $(x_1, x_2) \notin \Omega_{N+1}$.

В матричном виде уравнения (2) записываются

$$\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u} - \mathbf{S} \mathbf{t} = \mathbf{g}, \quad (3)$$

$\mathbf{u}$ — вектор перемещений точек срединной поверхности с компонентами $u_i(\mathbf{x}, t)$, $i = \overline{1, 3}$, $\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2)$ — дифференциальный оператор с компонентами

$$R_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \beta_2,$$

$$R_{12} = R_{21} = \beta_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$R_{22} = \beta_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \beta_2,$$

$$R_{33} = \beta_4 \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \beta_2,$$

$$R_{13} = R_{23} = R_{31} = R_{32} = 0;$$

$$\mathbf{S} = \|S_{ij}\|_{i,j=1}^3, \quad S_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$S_{11} = S_{22} = -\beta_5, \quad S_{33} = \beta_5,$$

$$\mathbf{g}(x_1, x_2) = \mathbf{S} \mathbf{b}.$$

Условия сопряжения покрытия и подложки имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_2) &= \mathbf{u}_{N+1}^-(x_1, x_2, 0), \\ \mathbf{t}(x_1, x_2) &= \mathbf{t}_{N+1}^-(x_1, x_2, 0). \end{aligned} \quad (4)$$

При построении решения задачи применяется принцип предельного поглощения, приводящий к замене ω на $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$ ($0 < \varepsilon \leq 1$)

и поиску решения в классе функций, убывающих на бесконечности.

3. Функционально-матричные соотношения для подложки. Следуя методу исследования задач для слоистых сред с дефектами, представленному в [7–9], задача для подложки сводится к системе функционально-матричных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{n,k}^\pm \mathbf{U}_n^\pm - \mathbf{L}_{n+1,k}^\pm \mathbf{U}_{n+1}^\pm &= \\ &= \mathbf{D}_{n,k}^\pm \mathbf{T}_n^\pm - \mathbf{D}_{n+1,k}^\pm \mathbf{T}_{n+1}^\pm, \end{aligned} \quad (5)$$

$$n, k = \overline{1, N}.$$

Здесь $\mathbf{T}_n^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{U}_n^\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{U}_n(\alpha_1, \alpha_2)$ — двумерные преобразования Фурье по переменным x_1, x_2 вектор-функций амплитуд напряжений $\boldsymbol{\tau}_n^\pm$ и перемещений $\mathbf{u}_n^\pm$ в плоскостях $x_3 \rightarrow h_n \pm 0$, $n = \overline{1, N}$. Элементы матриц $\mathbf{L}_{n,k}^\pm$, $\mathbf{D}_{n,k}^\pm$ [7, 9] зависят от параметров преобразования Фурье α_1, α_2 , частоты установившихся колебаний, параметров слоя ρ_k, ν_k, μ_k и высот расположения включений h_n , первый нижний индекс указывает на номер включения, второй — на номер слоя.

Путем ряда преобразований система (5) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{i,N+1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{U}_{N+1}(\alpha_1, \alpha_2) - \\ - \sum_{j=1}^N \mathbf{Q}_{i,j}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{T}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = \mathbf{Q}_{i,N+1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{T}_{N+1}^-(\alpha_1, \alpha_2) - \\ - \sum_{j=1}^N \mathbf{Y}_{i,j}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$i = \overline{1, N+1},$$

где

$$\mathbf{Q}_{i,i} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}_{i,j} = \Lambda_{j-i+1}^+ \text{ для } j > i;$$

$$\mathbf{Q}_{i,j} = \Lambda_{i-j+1}^- \text{ для } j < i;$$

$$\mathbf{Y}_{i,i} = \mathbf{M}_N^0, \quad \mathbf{Y}_{i,j} = \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{M}_{j-i+1}^+ \text{ для } j > i;$$

$$\mathbf{Y}_{i,j} = \mathbf{Q}_{i,j} \mathbf{M}_{i-j+1}^+ \text{ для } j < i;$$

$$\mathbf{Q}_{N+1,N+1} = -\mathbf{I}; \quad \mathbf{Y}_{i,N+1} = -\Lambda_{N-i+2}^+ \mathbf{C}_{N+1}^+,$$

$$\mathbf{Y}_{N+1,j} = \Lambda_{N-j+2}^- \mathbf{M}_j^-, \quad i, j = \overline{1, N};$$

$$\mathbf{Y}_{N+1,N+1} = -\mathbf{B}_N^-; \quad \mathbf{Q}_{i,N+1} = -\Lambda_{N-i+2}^+,$$

$$\mathbf{Q}_{N+1,j} = \Lambda_{N-j+2}^-, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Здесь использованы следующие обозначения [9]:

$$\begin{aligned}\Lambda_j^- &= \prod_{i=1}^j \mathbf{A}_{j-i+1}^-, \quad \Lambda_j^+ = \prod_{i=2}^j \mathbf{A}_i^+, \\ \mathbf{A}_i^+ &= \left(\mathbf{D}_{i-1,i}^+ \right)^{-1} \mathbf{D}_{i,i}^+, \\ \mathbf{A}_i^- &= \left(\mathbf{D}_{i,i}^- \right)^{-1} \mathbf{D}_{i-1,i}^-, \\ \mathbf{C}_i^\pm &= \left(\mathbf{D}_{i-1,i}^\pm \right)^{-1} \mathbf{L}_{i,i}^\pm, \\ \mathbf{M}_i^\pm &= \mathbf{B}_{i+1}^\pm - \mathbf{B}_i^\pm, \quad \mathbf{M}_i^0 = \mathbf{B}_{i+1}^+ - \mathbf{B}_i^-, \\ \mathbf{B}_i^\pm &= \left(\mathbf{D}_{j,i}^\pm \right)^{-1} \mathbf{L}_{j,i}^\pm,\end{aligned}$$

$\mathbf{T}_i(\alpha_1, \alpha_2) = F_{x_1 x_2}[\tau_i]$ — Фурье-образ скачка амплитуды напряжения.

Если области Ω_n , $n = \overline{1, N}$ представляют собой плоскости, исключая в (6) неизвестные образы скачков напряжения на включениях, для $i = N+1$ получим функционально-матричное соотношение на границе покрытие/подложка

$$\mathbf{U}_{N+1} = \mathbf{K}_{N+1} \mathbf{T}_{N+1}^- + \mathbf{K}_N \mathbf{U}_N, \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{N+1} = \mathbf{P}_{N+1}^{-1} \mathbf{R}_{N+1}, \quad \mathbf{K}_N = \mathbf{P}_{N+1}^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_{N+1}^0,$$

$$\mathbf{P}_{N+1} = \mathbf{C}_{N+1}^+ - \mathbf{C}_{N+1}^-,$$

$$\mathbf{R}_{N+1} = \mathbf{A}_{N+1}^+ - \left(\mathbf{A}_{N+1}^- \right)^{-1},$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{N+1}^0 = \mathbf{B}_{N+1}^+ - \mathbf{B}_{N+1}^-,$$

где $\mathbf{T}_{N+1}^-(\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathbf{U}_{N+1}(\alpha_1, \alpha_2)$ — Фурье-образы амплитуд напряжений и перемещений на поверхности подложки, $\mathbf{U}_N(\alpha_1, \alpha_2)$ — образ Фурье амплитуды перемещений, заданных в плоскости верхнего включения.

4. Определение напряжений на границе подложки и покрытия. Из (7) перемещения на поверхности подложки можно представить

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{N+1}(x_1, x_2, 0) &= F^{-1}[\mathbf{U}_{N+1}] = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}_{N+1}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ &\quad \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2.\end{aligned}$$

Следуя (4), подставим интегральное представление перемещений поверхности подложки в уравнения движения покрытия (3)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times \\ &\quad \times \mathbf{K}_{N+1}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{S}) \mathbf{T}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ &\quad \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \mathbf{g} - \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times \\ &\quad \times \mathbf{K}_N \mathbf{U}_N(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (8)\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = - \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \alpha_1^2 + \beta_1 \alpha_2^2 - \beta_2, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \beta_3 \alpha_1 \alpha_2, \\ \gamma_{22} &= \alpha_2^2 + \beta_1 \alpha_1^2 - \beta_2, \quad \gamma_{33} = -\beta_4 \alpha^4 + \beta_2, \\ \alpha^2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2.\end{aligned}$$

Если покрытие представляет собой бесконечную пластину, применив преобразование Фурье к (8), получим функционально-матричное соотношение для интегральных характеристик амплитуд напряжений на границе покрытие/подложка

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{N+1}^- &= \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) - \\ &\quad - \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{W}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{K}_{N+1}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{S}, \\ \mathbf{W}(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{K}_N \mathbf{U}_N,\end{aligned}$$

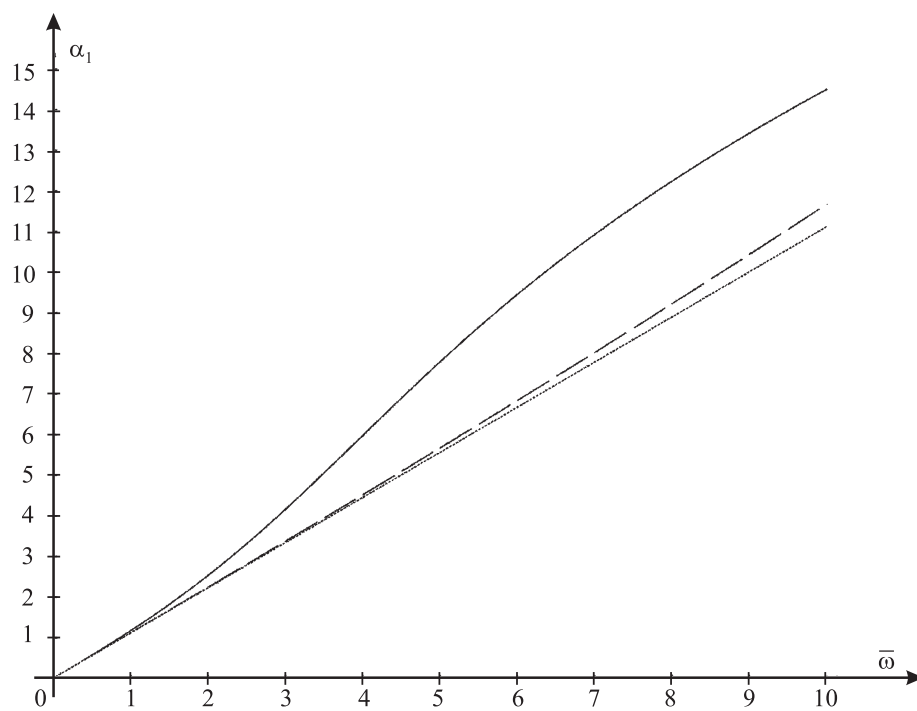
где $\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = F_{x_1 x_2}[\mathbf{g}]$.

Найдя $\mathbf{T}(\alpha_1, \alpha_2)$, можно вычислить перемещения $\mathbf{u}(x_1, x_2) = F^{-1}[\mathbf{U}]$ различных точек пластины, где

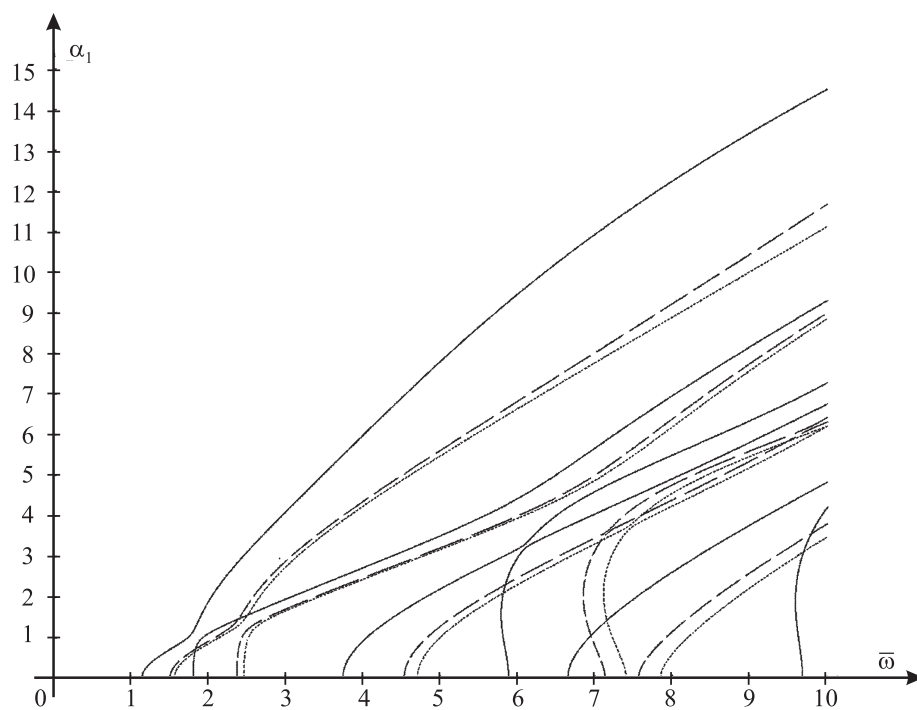
$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \mathbf{U}_{N+1} = \bar{\mathbf{K}}_1(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) - \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{U}_N, \\ \bar{\mathbf{K}}_1 &= \mathbf{K}_{N+1} \tilde{\mathbf{K}}^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{K}}_2 &= \left(\mathbf{K}_{N+1} \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) - \mathbf{I} \right) \mathbf{K}_N.\end{aligned}$$

На рис. 1 приведены кривые полюсов определителя матрицы $\bar{\mathbf{K}}_1(\alpha_1, 0)$ для простейших моделей основания: полупространства (рис. 1а) и слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием (рис. 1б).



а)



б)

Рис. 1

Для проведения расчетов использовался переход к системе безразмерных параметров

$$\bar{h}_i = \frac{h_i}{a}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_1}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\rho \omega^2 a^2}{\mu},$$

где a — характерный линейный размер. Рисунки соответствуют следующим значениям параметров: $\bar{\rho} = 3,858$, $\bar{\mu} = 2,609$, $\nu = 0,25$ — для покрытия; $\nu_1 = 0,16$ — для подложки, толщина слоя $H = \bar{h}_2 - \bar{h}_1 = 1$.

Кривые для покрытия толщиной $\bar{h} = 0,1$ представлены сплошной линией, для покрытия толщиной $\bar{h} = 0,01$ — крупным пунктиром. Полюса для среды, укрепленной пластиной, тем сильнее отличаются от полюсов для подложки (мелкий пунктир), чем больше толщина покрытия.

Если покрытие представляет собой ограниченную пластину или систему m пластин, занимающих области Ξ_j с границами $\partial\Xi_j = \Gamma_j$, необходимо сформулировать условия стыковки и граничные условия на краях пластин Γ_j , $j = \overline{1, m}$. В общем случае характер этих условий определяется видом контактного взаимодействия. Возможные граничные условия приведены в работе [3]. Затем полученное представление перемещений подложки $\mathbf{u}(x_1, x_2, 0)$, при условии, что на всей ее верхней границе заданы однотипные граничные условия, например, напряжения τ_{N+1}^- , следует подставить в уравнения движения пластин в каждой из областей Ξ_j [9]

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{K}}_j(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{i=1}^m \mathbf{T}_i(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 = \mathbf{g}_j - \mathbf{w}_j, \quad (10)$$

$$j = \overline{1, m},$$

$$(x_1, x_2) \in \Xi_j, \quad \mathbf{T}_j(\alpha_1, \alpha_2) = F[\mathbf{t}_j],$$

$$\mathbf{t}_j(x_1, x_2) = P_j \mathbf{t}(x_1, x_2),$$

$$\mathbf{g}_j(x_1, x_2) = P_j \mathbf{g}(x_1, x_2),$$

P_j — проектор на область Ξ_j .

Решение подобных систем интегральных уравнений является непростой задачей для ограниченных и полуограниченных областей, занимаемых покрытиями, так как она связана с проблемой обращения матричных операторов высокого порядка, имеющих ядра с осциллирующими символами. Кроме того, элементы $\tilde{\mathbf{K}}(\alpha_1, \alpha_2)$ имеют степенной рост при $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty$.

Для случая произвольного числа областей, занимаемых пластинами, в работе [10] построено приближенное решение системы (10) в интегральной форме. Чтобы получить убывающие на бесконечности элементы символа ядра системы, в каждой области Ξ_p вводится в рассмотрение дифференциальный оператор $\mathbf{V}_p(\partial x_1, \partial x_2)$, представляемый в виде

$$\mathbf{V}_p(\partial x_1, \partial x_2) = \|v_{ik}^p\|_{i,k=1}^3, \quad v_{ik}^p = 0, \quad i \neq k,$$

$$v_{ii}^p(\partial x_1, \partial x_2) \psi_{pi} \equiv (-\Delta + a_{p1}) \psi_{pi} = w_{pi},$$

$$\psi_{pi}|_{\partial\Xi_p} = f_{pi}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2,$$

$$v_{33}^p(\partial x_1, \partial x_2) \psi_{p3} \equiv$$

$$\equiv (-\Delta + a_{p2})(-\Delta + a_{p3}) \psi_{p3} = w_{p3},$$

$$\psi_{p3}|_{\partial\Xi_p} = f_{p3}(x_1, x_2),$$

$$\left. \frac{\partial \psi_{p3}}{\partial n} \right|_{\partial\Xi_p} = f_{p4}(x_1, x_2).$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$a_{pi} = \text{const}, \quad a_{pi} > 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Гладкие функции f_{pj} , $j = \overline{1, 4}$ впоследствии определяются из условий на границах пластин Γ_p , $p = \overline{1, m}$.

Применяя к обеим частям (9) оператор $\mathbf{V}_j^{-1}$, получаем систему интегральных уравнений, элементы матрицы-символа которой $\mathbf{V}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \tilde{\mathbf{K}}_j(\alpha_1, \alpha_2)$ убывают на бесконечности как α^{-1} . Для решения таких уравнений могут быть использованы методы, основанные на факторизации матриц-функций, одним из которых является метод фиктивного поглощения [11, 12] применимый для любых односвязных областей.

Литература

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

5. *Бабешко В. А.* Среда с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
6. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Об одной модели расчета концентрации напряжений в литосферных плитах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 2. С. 16–22.
7. *Бабешко В. А.* Теория «вирусов» вибропрочности для совокупности включений // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 21–23.
8. *Бабешко В. А., Бужан В. В., Павлова А. В., Ратнер С. В.* Упругое пространство с совокупностью неоднородностей // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск. С. 26–29.
9. *Павлова А. В., Рубцов С. Е.* К решению динамических задач для слоистого полупространства с дефектами // Наука технологии: труды XXIV Рос. Школы. М.: Изд. РАН, 2004. С. 283–290.
10. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме исследования материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 49–52.
11. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
12. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Прякина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.

Ключевые слова: покрытие, подложка, слоистая среда, включение.

Статья поступила 30 ноября 2009 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Павлова А. В., Колесников М. Н., 2009