

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАСТЯЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ЦИЛИНДРА¹

Александрин М. В.², Карякин М. И.³

ON THE STABILITY OF THE NONLINEAR-ELASTIC CYLINDER STRETCHING

Alexandrin M. V., Karyakin M. I.

Applying Blatz and Ko model of compressible nonlinear-elastic material some characteristic features of the cylinder stretching under extra-large deformations were studied. It provides a method to determine the area of constitutive parameters, which presuppose existence of the falling section within the tensile diagram. The analytical study of the stability of solutions corresponding to the falling section was carried out within the framework of the bifurcational approach.

Keywords: large deformations, nonlinear elasticity, Blatz and Ko materials, stretching, semi-inverse method, stability

Моделирование эксперимента по одноосному растяжению образцов является классической задачей механики деформируемого твердого тела, которая продолжает привлекать внимание широкого круга исследователей. Основная цель анализа при этом состоит, как правило, в изучении возможности адекватного описания процесса шейкообразования, причем не только для традиционных конструкционных материалов, но и для полимерных волокон [1], полукристаллических полимеров [2] и т. д. Другая причина интереса к описанию классического эксперимента при учете больших деформаций связана с развитием новых экспериментальных методик определения механических свойств мягких биологических тканей [3].

Препятствием на пути численного анализа подобных задач является отсутствие практических данных о физической и математической корректности большинства используемых моделей в зоне очень больших деформаций. Важным в этой связи представляется использование подходов, позволяющих получать решение задач в аналитическом виде.

В рамках плоской деформации для упрощенной модели материала Блейтца и Ко ана-

литическое решение уравнений нейтрального равновесия для задачи о растяжении прямоугольного образца представлено в [4]. В настоящей работе аналогичные результаты получены для трехмерной постановки задачи о растяжении нелинейно-упругого цилиндра. При использовании для описания его механических свойств модели Блейтца и Ко показана возможность существования падающего участка на диаграмме нагружения и проведен анализ устойчивости растяжения на этом участке. Для упрощенного варианта материала Блейтца и Ко решение задачи об устойчивости дано в аналитическом виде. Для общего случая приведены результаты численных расчетов процесса растяжения и его устойчивости. В качестве иллюстрации, демонстрирующей связь потери устойчивости при растяжении с вычислительной неустойчивостью, приведен пример конечно-элементного анализа задачи о растяжении цилиндра в пакете ANSYS.

1. Однородное растяжение цилиндра

Для изучения возможности существования падающего участка на диаграмме на-

¹Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (П361).

²Александрин Максим Викторович, аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: Aleksandrin-M@mail.ru

³Карякин Михаил Игоревич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: karyakin@math.sfedu.ru

гружения опишем деформацию растяжения сплошного кругового цилиндра высоты l и радиуса a полуобратным представлением вида

$$R = P(r), \quad \Phi = \varphi, \quad Z = \lambda z, \quad (1.1)$$

где r, φ, z и R, Φ, Z — цилиндрические координаты отсчетной и текущей конфигурации соответственно. Цилиндр растягивается в жестком нагружающем устройстве [5], что соответствует следующим граничным условиям: боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, на торцах отсутствуют касательные напряжения, задано осевое смещение, т. е. величина λ в (1.1). Случай $\lambda < 1$ соответствует эксперименту на сжатие, а случай $\lambda > 1$ формально соответствует растяжению.

В качестве функции удельной потенциальной энергии будем использовать трехконстантное выражение модели Блейтца и Ко [6]

$$W = \frac{1}{2}\mu\beta(I_1 + \frac{1}{\alpha}(I_3^{-\alpha} - 1) - 3) + \frac{1}{2}\mu(1 - \beta)(I_2I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha}(I_3^{\alpha} - 1)), \quad (1.2)$$

где $\alpha = \nu/(1 - 2\nu)$; μ, ν, β — материальные константы, причем при малых деформациях μ имеет смысл модуля сдвига, а ν — коэффициента Пуассона; $I_k = I_k(\mathbf{G})$, $k = 1, 2, 3$ — главные инварианты меры деформации Коши $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$, $\mathbf{C}$ — градиент деформации. С учетом (1.1) для последнего получим

$$\mathbf{C} = P'e_re_R + \frac{P}{r}e_\varphi e_\Phi + \lambda e_z e_Z; \quad (1.3)$$

штрихом обозначено дифференцирование по переменной r .

С использованием компонентов тензора напряжений Пиола $\mathbf{D} = W_{,\mathbf{C}}$ описанные выше граничные условия записываются в виде соотношений

$$D_{rR} = 0, \quad D_{r\Phi} = 0, \quad D_{rZ} = 0, \quad \text{при } r = a, \quad (1.4)$$

$$D_{zR} = 0, \quad D_{z\Phi} = 0, \quad Z = \lambda z, \quad \text{при } z = \pm l/2. \quad (1.5)$$

С учетом (1.1) нетривиальными условиями являются только два

$$D_{rR}(a) = 0, \quad (1.6)$$

$$Z(\pm l/2) = \pm \lambda l/2. \quad (1.7)$$

Уравнения равновесия $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ сводятся, учитывая (1.3), к одному нелинейному дифференциальному уравнению для определения функции $P(r)$, аналитическое решение которого, удовлетворяющее краевым условиям (1.6), имеет вид

$$P(r) = \lambda^{-\frac{\alpha}{2\alpha+1}} r.$$

Постановка рассматриваемой задачи эквивалентна задаче о растяжении цилиндра приложенной к его торцам постоянной нагрузкой. Пусть p — величина этой нагрузки. Тогда, удовлетворяя условию $D_{zZ} = p$ при $z = \pm l/2$, получим

$$(\beta - 1) \left(\lambda^{\frac{6\alpha+2}{2\alpha+1}-3} - \frac{1}{\lambda^3} \right) + \beta \left(\lambda^{\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}-3} - \lambda \right) = \frac{p}{\mu}. \quad (1.8)$$

Для упрощенного варианта материала Блейтца и Ко [7], модель которого описывается потенциалом (1.2) при значениях материальных констант $\alpha = 1/2, \beta = 0$, равенство (1.8) переписывается в виде

$$\lambda^{-1/2} - \frac{1}{\lambda^3} = \frac{p}{\mu}. \quad (1.9)$$

Легко видеть, что описываемая соотношением (1.9) диаграмма нагружения (зависимость приложенной силы от удлинения) является немонотонной: за возрастающим участком следует падающий. Его началу соответствует значение коэффициента удлинения $\lambda_m = 6^{2/5} \approx 2,047$. Наличие падающего участка может означать неустойчивость процесса растяжения.

Для общего случая модели наличие или отсутствие падающего участка на диаграмме нагружения определяется наличием экстремальных точек у зависимости $p(\lambda)$ (1.8). Дифференцируя (1.8) по λ , получаем уравнение для определения экстремальных удлинений λ

$$\begin{aligned} & 2\beta\lambda^4\alpha + \beta\lambda^4 + (4\alpha + 1)\beta\lambda^{\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}} + \\ & + \lambda^{\frac{6\alpha+2}{2\alpha+1}}\beta - \lambda^{\frac{6\alpha+2}{2\alpha+1}} + 6\alpha + 3 - \\ & + 6\beta\alpha - 3\beta = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для существования падающего участка необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1.10) имело вещественный корень, больший единицы.

Определение границ области материальных параметров, при которых существует падающий участок, может быть произведено с учетом допустимых значений этих параметров: $0 \leq \beta \leq 1$, $0 < \alpha < \infty$. При $\alpha \rightarrow 0$ из уравнения (1.10) получаем

$$\beta = \frac{\lambda^2 - 3}{2\lambda^2 + \lambda^4 - 3}.$$

Элементарный анализ данного уравнения показывает, что оно имеет требуемые корни при $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,670$. Второму предельному случаю $\alpha \rightarrow \infty$ соответствует уравнение

$$\beta = -\frac{3}{\lambda^4 + 2\lambda - 3},$$

не имеющее решений, больших единицы, при положительных значениях параметра β . Это означает, что с увеличением параметра α высота области на плоскости материальных параметров (β, α) , в которой существует падающий участок, стремится к нулю. Численно построенная область существования падающего участка на рис. 1 отмечена штриховкой.

2. Устойчивость деформирования на падающем участке

Исследование устойчивости проведем на основе линеаризации уравнений равновесия в окрестности полученного решения. Будем использовать бифуркационный подход и точку потери устойчивости отождествлять с точкой существования нетривиального решения линейной однородной краевой задачи.

Ограничиваясь упрощенным вариантом модели Блейтца и Ко и осесимметричным случаем потери устойчивости, заменим (1.1) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} R &= \lambda^{-1/4} r + \varepsilon w_1(r, z), \\ \Phi &= \varphi, \\ Z &= \lambda z + \varepsilon w_3(r, z). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь ε — малый параметр.

Вычисляя градиент деформации $\mathbf{C}$ для (2.1), и линеаризуя его по формуле $\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{C}|_{\varepsilon=0}$, находим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}} &= \frac{\partial w_1}{\partial r} e_r e_R + \frac{\partial w_3}{\partial r} e_r e_Z + \\ &+ \frac{w_1}{r} e_\varphi e_\Phi + \frac{\partial w_1}{\partial z} e_z e_R + \frac{\partial w_3}{\partial z} e_z e_Z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Линеаризованная мера деформации Коши вычисляется по формуле

$$\dot{\mathbf{G}} = \dot{\mathbf{C}} \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \dot{\mathbf{C}}^T. \quad (2.3)$$

Подставив выражения (2.2) и (1.3) в (2.3), получим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}} &= 2\lambda^{-1/4} \frac{\partial w_1}{\partial r} e_r e_r + 2 \frac{\lambda^{-1/4}}{r} w_1 e_\varphi e_\varphi + \\ &+ \left(\lambda \frac{\partial w_3}{\partial r} + \lambda^{-1/4} \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) (e_r e_z + e_z e_r) + \\ &+ 2\lambda \frac{\partial w_3}{\partial z} e_z e_z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вычисляя линеаризованный тензор напряжений Пиолы $\dot{\mathbf{D}}$ и подставляя его в уравнения равновесия $\text{div } \dot{\mathbf{D}} = 0$, получаем линейную однородную систему относительно возмущений $w_1(r, z)$ и $w_3(r, z)$ вида

$$\begin{aligned} 3\lambda^4 r \frac{\partial w_1}{\partial r} + \left(\lambda^{11/4} + \lambda^{1/4} \right) r^2 \frac{\partial^2 w_3}{\partial z \partial r} + \\ + r^2 \lambda^{3/2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + 3\lambda^4 r^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} - \\ - 3\lambda^4 w_1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{11/4} r \frac{\partial^2 w_3}{\partial r^2} + r \left(\lambda^4 + \lambda^{3/2} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial z \partial r} + \\ + \left(\lambda^4 + \lambda^{3/2} \right) \frac{\partial w_1}{\partial z} + \lambda^{11/4} \frac{\partial w_3}{\partial r} + \\ + 3\lambda^{1/4} r \frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Линеаризованные краевые условия на боковой поверхности ($r = a$) примут вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 w_1 + r \lambda^{3/4} \frac{\partial w_3}{\partial z} + 3r \lambda^2 \frac{\partial w_1}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} + \lambda^{5/4} \frac{\partial w_3}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение системы (2.5), (2.6) проводим методом разделения переменных

$$\begin{aligned} w_1(r, z) &= F(r) \cos(\gamma z), \\ w_3(r, z) &= G(r) \sin(\gamma z), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\gamma = (n\pi)/L$. При этом автоматически удовлетворяются граничные условия на торцах. Подставляя (2.7) в систему (2.5), получаем

$$\begin{aligned} 3\lambda^4 r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 3r \lambda^4 \frac{\partial F}{\partial r} - \\ - \left(3\lambda^4 + r^2 \lambda^{3/2} \gamma^2 \right) F + \\ + \left(\lambda^{1/4} + \lambda^{11/4} \right) \frac{\partial G}{\partial r} \gamma r^2 = 0, \end{aligned}$$

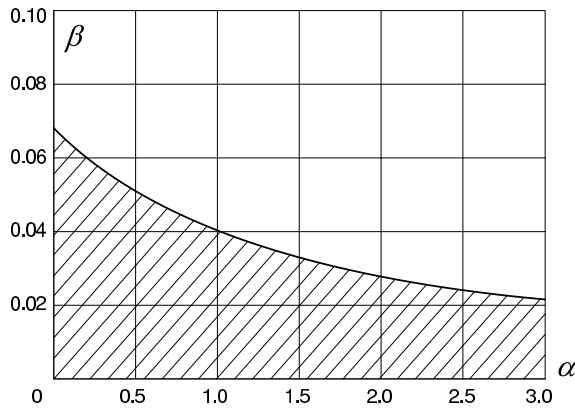


Рис. 1. Область существования падающего участка

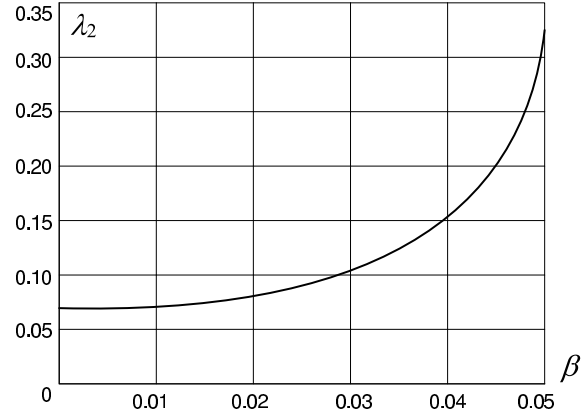


Рис. 2. Размер области устойчивости на падающем участке

$$\lambda^{11/4} \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} r + \lambda^{11/4} \frac{\partial G}{\partial r} - 3\lambda^{1/4} G \gamma^2 r - \left(\lambda^4 + \lambda^{3/2} \right) r \gamma \frac{\partial F}{\partial r} - \left(\lambda^{3/2} + \lambda^4 \right) F \gamma = 0. \quad (2.8)$$

Решение системы (2.8), удовлетворяющее условию ограниченности в нуле, ищем в виде

$$\begin{aligned} F(r) &= C_1 J_1(A\gamma r), \\ G(r) &= C_2 J_0(A\gamma r), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где J_k — функции Бесселя, A , C_1 , C_2 — подлежащие определению постоянные. Подставляя (2.9) в (2.8), получаем

$$\begin{aligned} &\left(3\lambda^4 A^2 + \lambda^{3/2} \right) C_1 + \\ &\quad + \left(\lambda^{1/4} + \lambda^{11/4} \right) A C_2 = 0, \\ &\left(\lambda^{3/2} + \lambda^4 \right) A C_1 + \\ &\quad + \left(\lambda^{11/4} A^2 + 3\lambda^{1/4} \right) C_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Условие нетривиальной разрешимости системы (2.10) относительно C_1 и C_2 является уравнением для определения константы A

$$3\lambda^5 A^4 - (\lambda^5 - 8\lambda^{5/2} + 1)A^2 + 3 = 0.$$

Это уравнение имеет четыре корня

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sqrt{6}\theta^+}{6} \lambda^{-5/2}, & A_2 &= -\frac{\sqrt{6}\theta^+}{6} \lambda^{-5/2}, \\ A_3 &= \frac{\sqrt{6}\theta^-}{6} \lambda^{-5/2}, & A_4 &= -\frac{\sqrt{6}\theta^-}{6} \lambda^{-5/2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \theta^\pm &= \sqrt{\xi \pm i\zeta}, \quad \xi = \lambda^5 - 8\lambda^{5/2} + 1, \\ \zeta &= (\lambda^{5/2} - 1) \sqrt{14\lambda^{5/2} - \lambda^5 - 1} \\ (14\lambda^{5/2} - \lambda^5 - 1 > 0 \text{ при } 1 \leq \lambda \leq 2, 86). \end{aligned}$$

Решение системы (2.8) тогда принимает вид

$$F(r) = C_1 J_1(A_3 \gamma r) + C_2 J_1(A_1 \gamma r),$$

$$\begin{aligned} G(r) &= C_1 B_1 A_4 J_0(A_4 \gamma r) + \\ &\quad + C_2 B_2 A_2 J_0(A_2 \gamma r), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где C_1 , C_2 , B_1 и B_2 — неизвестные пока комплексные постоянные. Константы B_i находятся подстановкой решения (2.11) в систему (2.8)

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{3\lambda^{15/4}(1 + \lambda^5 - 6\lambda^{5/2} - \zeta)}{7(\lambda^5 + \lambda^{5/2}) - 1 - \lambda^{15/2} + (1 + \lambda^{5/2})\zeta}, \\ B_2 &= \frac{6\lambda^{13/4}(\sqrt{\lambda} + \lambda^3)}{\lambda^5 + 10\lambda^{5/2} + \zeta + 1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Выражение (2.11) с учетом (2.12) представляет собой общее аналитическое решение системы (2.8).

Подставляя (2.11) в граничные условия (2.6) на боковой поверхности, получим однородную линейную систему относительно констант C_k , $k = 1, 2$, которая имеет нетривиальные решения, если ее определитель $\Delta(\lambda)$ равен нулю. Выражение $\Delta(\lambda)$ чрезвычайно громоздко и в работе не приводится. Для достаточно длинных цилиндров ($\eta = a/l \ll 1$) можно получить асимптотику его корней, используя асимптотические формулы для функций Бесселя. Представляя λ в виде $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \eta + \lambda_2 \eta^2$ и

раскладывая $\Delta(\lambda)$ в ряд по параметру η , т. е. $\Delta(\lambda) = \Delta_0 + \Delta_1\eta + \Delta_2\eta^2 + \dots$, из равенств $\Delta_i = 0$ последовательно находим $\lambda_0 = \lambda_m = 6^{2/5}$, $\lambda_1 = 0$. Константа λ_2 является корнем линейного уравнения

$$k_1\lambda_2 + \pi^2 k_2 = 0, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 = & -8100\lambda_0^{53/2} + 240\lambda_0^{29} + 92040\lambda_0^{24} + \\ & + 121320\lambda_0^{23/2} - 565680\lambda_0^{33/2} + 59160\lambda_0^{14} - \\ & + 44760\lambda_0^9 - 410280\lambda_0^{43/2} + 753480\lambda_0^{19} + \\ & + 2580\lambda_0^{13/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 = & -\lambda_0^{30} + 6465\lambda_0^{45/2} + 49545\lambda_0^{10} - \\ & + 776\lambda_0^{25} + 15 - 26823\lambda_0^{20} - 28032\lambda_0^{15} + \\ & + 6072\lambda_0^5 - 27894\lambda_0^{25/2} - 27047\lambda_0^{15/2} + \\ & + 48954\lambda_0^{35/2} - 523\lambda_0^{5/2} + 45\lambda_0^{55/2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lambda_0 = 6^{2/5}$, из (2.13) получаем $\lambda_2 \approx 0,070$.

Таким образом, с точностью до η^3 критический коэффициент удлинения цилиндра λ_* определяется соотношением

$$\lambda_* \approx \lambda_m + 0,070\eta^2. \quad (2.14)$$

Из (2.14) видно, что в начале падающего участка диаграммы нагружения есть малый отрезок длины $h \approx 0,070\eta^2$, на котором цилиндр остается устойчивым. Данный факт уточняет результат Н. Оуэна [8] для рассматриваемой модели материала. Бесконечно длинный цилиндр, как и предсказано в [5], теряет устойчивость в точке максимума диаграммы нагружения.

Исследование устойчивости растяжения цилиндра для двухконстантного варианта модели Блейтца и Ко ($\alpha = 1/2$, $0 \leq \beta \leq 1$) проводится аналогично исследованию для упрощенного типа материала. В этом случае система (2.8) примет вид

$$\begin{aligned} & 3(-\lambda^4 + \lambda^4\beta - \lambda^3\beta)r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \\ & + 3(-\lambda^4 + \lambda^4\beta - \lambda^3\beta)r\frac{\partial F}{\partial r} + \\ & + (3\lambda^3\beta + r^2\lambda^3\gamma^2\beta + r^2\lambda^{3/2}\gamma^2)F + \\ & + (-r^2\lambda^{3/2}\gamma^2\beta - 3\lambda^4\beta + 3\lambda^4)F + \\ & + (\beta\lambda^{1/4} - 2\lambda^{7/4}\beta)\gamma r^2\frac{\partial G}{\partial r} + \\ & + (\beta\lambda^{11/4} - \lambda^{1/4} - \lambda^{11/4})\gamma r^2\frac{\partial G}{\partial r} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\lambda^{11/4}\beta - \lambda^{11/4} - \lambda^{17/4}\beta)r\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \\ & + (\lambda^{11/4}\beta - \lambda^{11/4} - \lambda^{17/4}\beta)\frac{\partial G}{\partial r} + \\ & + (2\beta\lambda^{7/4} + \beta\lambda^{17/4} - 3\beta\lambda^{1/4})\gamma^2 rG + \\ & + 3\lambda^{1/4}\gamma^2 rG + (\lambda^{3/2} - \lambda^{3/2}\beta)r\gamma\frac{\partial F}{\partial r} + \\ & + (-\lambda^4\beta + \lambda^4 + 2\beta\lambda^3)r\gamma\frac{\partial F}{\partial r} + \\ & + (-\lambda^{3/2}\beta - \lambda^4\beta + 2\beta\lambda^3)\gamma F + \\ & + (\lambda^{3/2} + \lambda^4)\gamma F = 0. \end{aligned}$$

Ее анализ может быть проведен аналогично случаю упрощенного типа материала, но итоговые формулы на порядок объемнее. Некоторые результаты этого анализа приведены на рис. 2, где представлена величина коэффициента λ_2 , определяющего размер области устойчивости на падающем участке диаграммы нагружения.

3. Вычислительный эксперимент

В [4] показано, что потеря устойчивости при растягивающих нагрузках может проявляться в форме неустойчивости вычислительных схем, используемых для анализа задач теории упругости для тел, испытывающих большие деформации. В качестве демонстрации подобного эффекта приведем результаты конечно-элементного решения в пакете ANSYS задачи о растяжении цилиндра, торцы которого жестко сцеплены с захватами растягивающего устройства. Аналогичная задача о растяжении прямоугольного образца решалась с использованием пакета FlexPDE в [9], где для упрощенной модели материала Блейтца и Ко продемонстрировано наличие падающего участка на диаграмме нагружения приблизительно при таких же (в зависимости от формы образца разница находится в пределах $\pm 25\%$) величинах удлинений. Результаты использования для цилиндра этой же модели материала в конечно-элементном комплексе ANSYS приведены на рис. 3 и рис. 4. Для моделирования использовался восьмиузловой трёхмерный твердотельный элемент SOLID185, имеющий в каждом узле три степени свободы. В недеформированном состоянии диаметр цилиндра совпадал с его высотой. На рис. 3

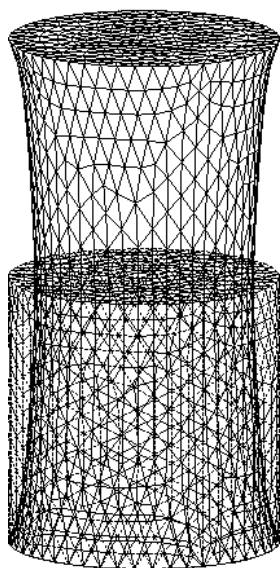


Рис. 3. Моделирование растяжения в ANSYS:
 $\lambda = 1,9$, устойчивое растяжение

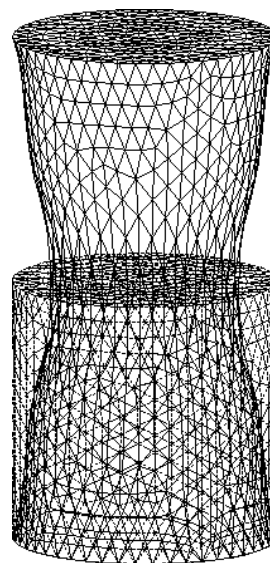


Рис. 4. Моделирование растяжения в ANSYS:
 $\lambda = 1,95$, начало вычислительной
неустойчивости

изображено исходное и деформированное состояние цилиндра при удлинении, составляющем 90 % от исходной длины. Данное удлинение соответствует устойчивому (возрастающему) участку деформирования. На рис. 4 изображена форма цилиндра при достижении величиной удлинения точки максимума на диаграмме растяжения (около 95%); при этом стандартная вычислительная схема перестает работать. Интересно отметить, что на поверхности цилиндра в этот момент возникает явно различимая шейка.

Литература

1. Coleman B.D. Necking and Drawing in Polymeric Fibers Under Tension // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1983. Vol. 83. P. 115–137.
2. Leonov A.I. A theory of necking in semi-crystalline polymers // Int. Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39. P. 5913–5926.
3. Miller K. How to test very soft biological tissues in extension? // Journal of Biomechanics. 2001. P. 651–657.
4. Карякин М.И. Равновесие и устойчивость растягиваемого нелинейно-упругого стержня // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2007. № 4. С. 22–27.
5. Spector S.J. On the Absence of Bifurcation for Elastic Bars in Uniaxial Tension // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1984. Vol. 85. P. 171–199.
6. Blatz P.J., Ko W.L. Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials // Trans. Soc. Rheology. 1962. Vol. 6. P. 223–251.
7. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
8. Owen N. Some remarks on the stability of the homogeneous deformation for an elastic bar // Journal of Elasticity. 1990. Vol. 23. P. 113–125.
9. Карякин М.И. Об особенностях растяжения нелинейно-упругих образцов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 4. С. 43–48.

Ключевые слова: большие деформации, нелинейная упругость, материал Блейтца и Ко, растяжение, полуобратный метод, устойчивость

Статья поступила 5 марта 2010 г.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

© Александрин М. В., Карякин М. И., 2010