УДК 539.3

О БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР И ОБЪЕКТОВ[1]

Бабешко В. А.[2], Евдокимова О. В.[3], Бабешко О. М.[4], Федоренко А. Г.[5], Рядчиков И. В.[6], Лозовой В. В.[7], Горшкова Е. М.[8]

USE OF BLOCK ELEMENTS MODELING OF COMPLEX STRUCTURES AND OBJECTS

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Fedorenko A. G., Ryadchikov I. V., Lozovoy V. V., Gorshkova E. M.

The article considers use of the block-level elements for solving boundary problems of continuum mechanics, which arise when modeling compound crustal structures and objects consisting of the blocks set. Functional and pseudodifferential equations are derived that describe the parameters of blocks of structures and objects studied, as well as general solutions. Different ways for formulating and solving of problems are considered.

Keywords: block-level elements, boundary problems, slips, faults, elasticity theory

Обсуждается вопрос использования блочных элементов для решения граничных задач механики сплошных сред, возникающих при моделировании сложных структур земной коры и объектов, состоящих из набора блоков. К числу таких объектов относятся сооружения сложного строения. Из структур коры Земли в работе моделируются такие объекты, как каньоны, грязевые вулканы, имеющие кратеры, полости различной природы, допускающие переменные размеры. Последние включают в себя как общепринятые полости в форме трещин, описываемых теорией Ирвина, так и полости, крайне редко изучаемые, но более реально описывающие естественные структуры, получаемые извлечением из сплошной среды конечных геометрических объемов. С целью выработки навыков моделирования указанных объектов в настоящей работе исследование проводится в акустическом приближении, что даже в этом варианте оказывается достаточно громоздким и сложным для восприятия. Тем не менее, именно эти исследования оказываются необходимыми для правильного переноса теории блочных элементов на более сложные реологические среды, описываемые граничными задачами для систем дифференци-

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (09-08-00170, 08-08-00468, 09-08-00171), (08-08-00669), программы Юг России, проекты (09-01-96500, 09-01-96503, 09-08-96522, 09-08-96527, 09-08-00294), проекта НШ-3765.2010.1, проекта ФЦП (2009-1.5-503-004-006), Гранта Президента МД-1554.2009.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru

[3]Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru

[4]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru

[5]Федоренко Алексей Григорьевич, научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru

[6]Рядчиков Игорь Викторович, младший научный сотрудник НИИ предупреждения геоэкологических катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: ryafchikov@kubsu.ru

[7]Лозовой Виктор Викторович, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru

[8]Горшкова Елена Михайловна, старший научный сотрудник НИИ предупреждения геоэкологических катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: gm@kubsu.ru

альных уравнений. Отметим, что принятое в работе приближение позволяет изучать в том числе и реальную задачу теории упругости о неограниченно протяженных каньонах и разломах в том числе значительной ширины, рассматриваемых при горизонтальных движениях среды, в антиплоской постановке. Академик Б. Б. Голицын считал, что именно движения среды вдоль разломов ответственны за сильные землетрясения.

Выводятся функциональные и псевдодифференциальные уравнения, описывающие параметры блоков рассматриваемых структур и объектов, а также общие представления решений. Обсуждаются различные постановки задач и пути их решения.

Развитый в работах [1–4] метод блочного элемента может быть применен к любым граничным задачам для систем дифференциальных уравнений в частных производных, доступных для исследования дифференциальным и интегральным методами факторизации [5–7]. Если коэффициенты дифференциальных уравнений являются переменными функциями, размеры блочных элементов надо брать таким образом, чтобы на носителе элементов коэффициенты можно было бы считать постоянными. В случае, когда дифференциальные уравнения граничной задачи имеют постоянные коэффициенты, в том числе и в областях, уходящих на бесконечность, блочный элемент может быть принят бесконечным в отличие от конечного элемента соответствующего метода.

В работах [1–4] приведены примеры построения конечных блочных элементов для граничной задачи второго порядка.

В настоящей работе метод иллюстрируется на относительно простой задаче с целью демонстрации возможности применения этих блочных элементов к конкретным задачам механики сплошной среды, термоэлектроупругости, математической физики. Для этого необходимо использовать возможность разложения решений большинства из этих задач на потенциальную и вихревую составляющие, компоненты которых удовлетворяют названной граничной задаче [9, 10].

Следуя указанным работам, рассмотрим дифференциальные уравнения теории упругости

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}-\mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}+\rho\omega^2\mathbf{u}=0, \quad (1)$$

будем искать решение краевой задачи в следующем виде

$$\mathbf{u}=\mathrm{grad}\,\varphi+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi}. \quad (2)$$

Здесь функция φ дает потенциальную составляющую решения, а компоненты ψ_n, $n=1,2,3$ вектора $\boldsymbol{\psi}$ — вихревую.

Нетрудно видеть, что дифференциальное уравнение будет удовлетворяться, если функции удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}\Delta\varphi+k_1^2\varphi=0,\\ \Delta\psi_n+k_2^2\psi_n=0, \quad n=1,2,3.\end{gathered} \quad (3)$$

Здесь приняты обозначения

$$k_1^2=\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}, \quad k_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu}. \quad (4)$$

Как известно, эти параметры участвуют в описании скоростей продольных и поперечных волн в деформируемой среде.

Заметим, что аналогичным уравнениям удовлетворяют также и потенциалы электрической напряженности и магнитной индукции, лежащие в основе магнитотеллурического метода исследования глубинных слоев Земли. В этом отношении применяемый в настоящей работе подход охватывает как проблему напряженно-деформированного состояния сложных геологических объектов, так и вопросы электромагнитного зондирования Земли.

Построив решения уравнений (3), (4) и внеся их в соотношения (2), остается удовлетворить соответствующим граничным условиям и найти неизвестные функции, получающиеся при решении краевых задач. В связи с тем, что для конкретных геологических задач и задач магнитотеллурики корректно сформулировать соответствующие граничные условия сложно, здесь и ниже основное внимание уделено построению представлений решений в блочных элементах сложных геологических объектов, основанных на применении разложения (2) и уравнений (3).

Дадим описание части определяющих уравнений каждого из блоков с учетом того, что остальные уравнения составляются по аналогии.

Ниже параметр A можно варьировать в зависимости от выбора уравнений (3).

Опишем параметры рассматриваемого объекта. Предполагается, что исследуется полупространство с вырезанным прямоугольным параллелепипедом и размерами: глубина — $2b$; длина — $2c$; ширина — r.

Для описания такой структуры понадобилось введение 5 блоков, показанных на рис. 1, 2, 3. Широкие стрелки показывают направления бесконечной протяженности блоков.

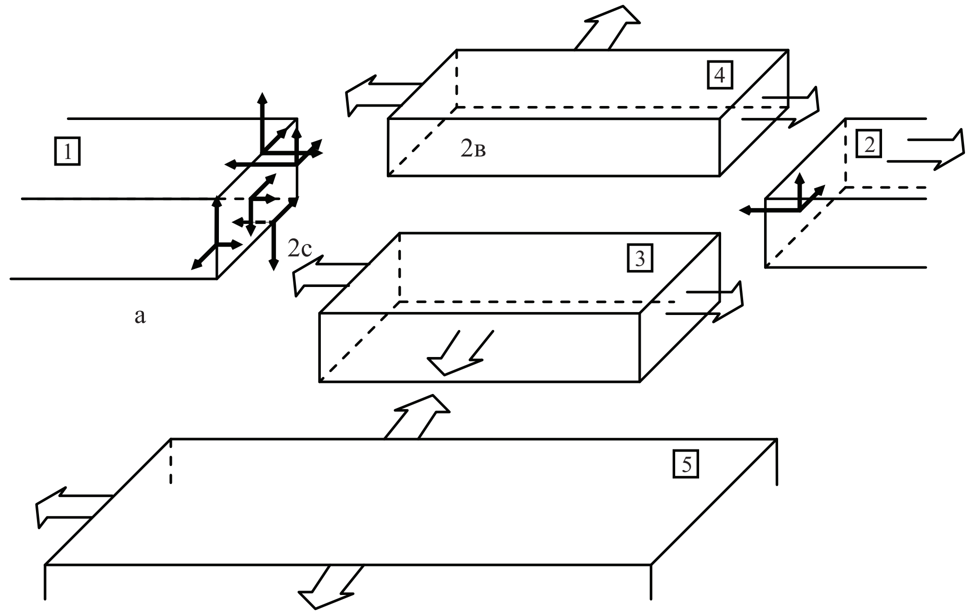

Рис. 1

Блочный элемент 1

$$
\begin{aligned}
K_1\Phi_1 = &\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{13} - i\alpha_3^1\varphi_1\right) \times \\
&\times \exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\
&+ \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{33} + i\alpha_3^1\varphi_3\right) \times \\
&\times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b\right] dx_1^3 dx_2^3 - \\
&- \int\limits_{-c}^{c}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{43} - i\alpha_1^1\varphi_4\right) \times \\
&\times \exp i\left[\alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1(x_1^4 + b)\right] dx_1^4 dx_2^4 + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{53} + i\alpha_2^1\varphi_5\right) \times \\
&\times \exp i\left[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1(x_2^5 - b)\right] dx_1^5 dx_2^5 + \\
&+ \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^1\varphi_6\right) \times \\
&\times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1(x_2^6 - b)\right] dx_1^6 dx_2^6;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_3\Phi_3 = &\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{33} - i\alpha_3^3\varphi_3\right) \times \\
&\times \exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3\right] d\eta_1^3 d\eta_2^3 - \\
&- \int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{43} + i\alpha_1^3\varphi_4\right) \times \\
&\times \exp i\left[\alpha_2^3 x_2^4 + \alpha_3^3(x_1^4 - b)\right] dx_1^4 dx_2^4 + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{13} + i\alpha_3^3\varphi_1\right) \times \\
&\times \exp i\left[-\alpha_1^3 x_1^1 + \alpha_2^3 x_2^1 - \alpha_3^3 2b\right] dx_1^1 dx_2^1 - \\
&- \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{53} + i\alpha_2^3\varphi_5\right) \times \\
&\times \exp i\left[-\alpha_1^3 x_1^5 - \alpha_2^3 c - \alpha_3^3(x_2^5 + b)\right] dx_1^5 dx_2^5 - \\
&- \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^3\varphi_6\right) \times \\
&\times \exp i\left[\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3 c - \alpha_3^3(x_2^6 + b)\right] dx_1^6 dx_2^6;
\end{aligned}
$$

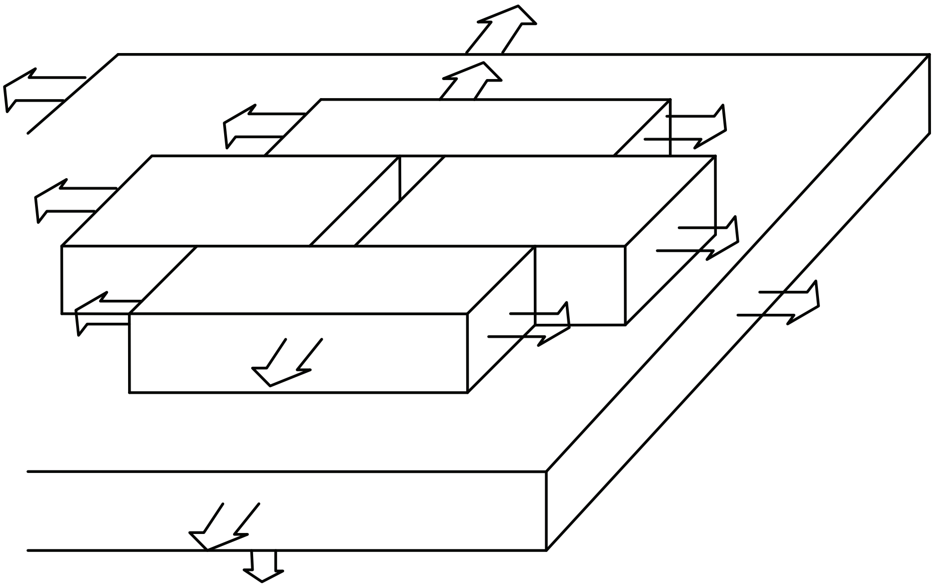

Рис. 2

$$K_4\Phi_4 = \int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \left(\varphi'_{43} - i\alpha_3^4\varphi_4\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^4\eta_1^4 + \alpha_2^4\eta_2^4\right] d\eta_1^4 d\eta_2^4 - \\ - \int_{-\infty}^{0}\int_{-c}^{c} \left(\varphi'_{13} + i\alpha_1^4\varphi_1\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^4 b + \alpha_2^4 x_2^1 + \alpha_3^4 x_1^1\right] dx_1^1 dx_2^1 - \\ - \int_{0}^{\infty}\int_{-c}^{c} \left(\varphi'_{33} - i\alpha_1^4\varphi_3\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^4 b + \alpha_2^4 x_2^3 - \alpha_3^4 x_1^3\right] dx_1^3 dx_2^3 + \\ + \int_{-\infty}^{0}\int_{-b}^{b} \left(\varphi'_{53} + i\alpha_2^4\varphi_5\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^4 x_2^5 - \alpha_2^4 c + \alpha_3^4 x_1^5\right] dx_1^5 dx_2^5 + \\ + \int_{0}^{\infty}\int_{-b}^{b} \left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^4\varphi_6\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^4 x_2^6 + \alpha_2^4 c - \alpha_3^4 x_1^6\right] dx_1^6 dx_2^6; \quad (5)$$

$$K_5\Phi_5 = \int_{-\infty}^{0}\int_{-b}^{b} \left(\varphi'_{53} - i\alpha_3^5\varphi_5\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^5\eta_1^5 + \alpha_2^5\eta_2^5\right] d\eta_1^5 d\eta_2^5 - \\ - \int_{-\infty}^{0}\int_{-c}^{c} \left(\varphi'_{13} - i\alpha_2^5\varphi_1\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^5 x_1^1 + \alpha_2^5 b - \alpha_3^5(x_2^1 + c)\right] dx_1^1 dx_2^1 + \\ + \int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \left(\varphi'_{43} - i\alpha_1^5\varphi_4\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_2^5 x_1^4 - \alpha_3^5(x_2^4 + c)\right] dx_1^4 dx_2^4 - \\ - \int_{0}^{\infty}\int_{-c}^{c} \left(\varphi'_{33} + i\alpha_2^5\varphi_3\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^5 x_1^3 - \alpha_2^5 b - \alpha_3^5(x_2^3 + c)\right] dx_1^3 dx_2^3 + \\ + \int_{0}^{\infty}\int_{-b}^{b} \left(\varphi'_{63} + i\alpha_3^5\varphi_6\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^5 x_1^6 + \alpha_2^5 x_2^6 - \alpha_3^5 2c\right] dx_1^6 dx_2^6;$$

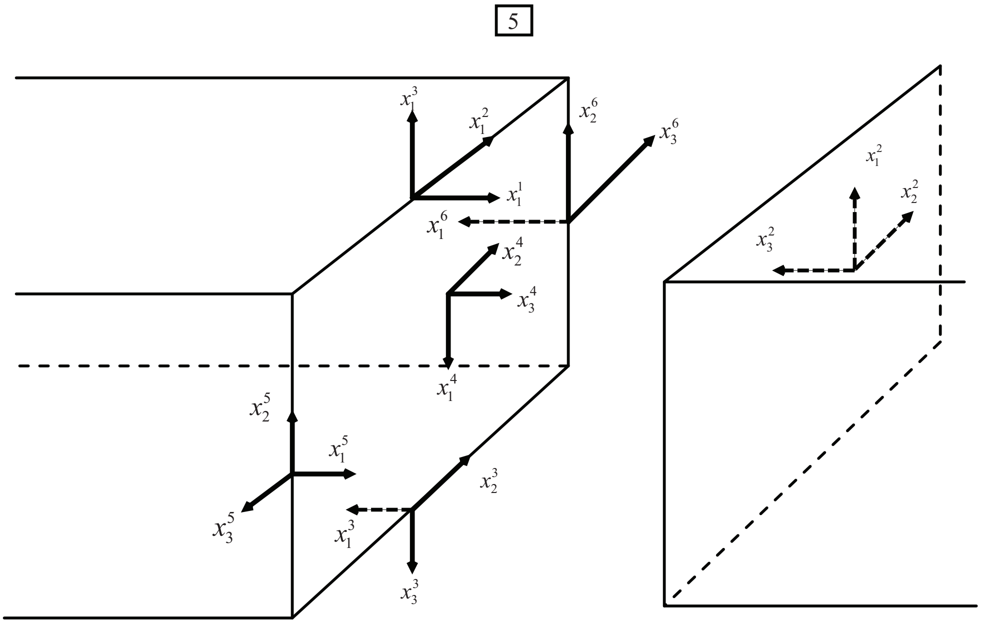

Рис. 3

Блочный элемент 2

$$
\begin{gathered}
K_6\Phi_6 = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{63} - i\alpha_3^6 \varphi_6\right) \times \\
\times \exp i \left[\alpha_1^6 \eta_1^6 + \alpha_2^6 \eta_2^6\right] d\eta_1^6 d\eta_2^6 + \\
+ \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{53} + i\alpha_3^6 \varphi_1\right) \times \\
\times \exp i \left[-\alpha_1^6 x_1^5 + \alpha_2^6 x_2^5 - \alpha_3^6 2c\right] dx_1^5 dx_2^5 - \\
- \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{13} - i\alpha_2^6 \varphi_1\right) \times \\
\times \exp i \left[-\alpha_1^6 x_1^1 + \alpha_2^6 b + \alpha_3^6 \left(x_2^1 - c\right)\right] dx_1^1 dx_2^1 - \\
- \int\limits_0^\infty \int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{33} + i\alpha_2^6 \varphi_3\right) \times \\
\times \exp i \left[\alpha_1^6 x_1^3 - \alpha_2^6 b + \alpha_3^6 (x_2^3 - c)\right] dx_1^3 dx_2^3 + \\
+ \int\limits_{-b}^{b} \int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{43} + i\alpha_1^6 \varphi_4\right) \times \\
\times \exp i \left[-\alpha_2^6 x_1^4 + \alpha_3^6 (x_2^4 - c)\right] dx_1^4 dx_2^4.
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
K_1\Phi_1 = \int\limits_r^\infty \int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{13} - i\alpha_{3-}^1 \varphi_1\right) \times \\
\times \exp i \left[\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1\right] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\
+ \int\limits_{-\infty}^{r} \int\limits_{-c}^{c} \left(\varphi'_{33} + i\alpha_{3-}^1 \varphi_3\right) \times \\
\times \exp i \left[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_{3-}^1 2b\right] dx_1^3 dx_2^3 - \\
- \int\limits_{-c}^{c} \int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{23} - i\alpha_1^1 \varphi_2\right) \times \\
\times \exp i \left[\alpha_2^1 x_2^2 - \alpha_{3-}^1 (x_1^2 + b)\right] dx_1^2 dx_2^2 + \\
+ \int\limits_r^\infty \int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{53} + i\alpha_2^1 \varphi_5\right) \times \\
\times \exp i \left[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_{3-}^1 (x_2^5 - b)\right] dx_1^5 dx_2^5 + \\
+ \int\limits_{-\infty}^{-r} \int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^1 \varphi_6\right) \times \\
\times \exp i \left[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_{3-}^1 (x_2^6 - b)\right] dx_1^6 dx_2^6;
\end{gathered}
$$

$$K_3\Phi_3 = \int\limits_{-\infty}^{-r}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33} - i\alpha_3^3\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3\right]d\eta_1^3 d\eta_2^3 -$$
$$-\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{23} + i\alpha_1^3\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_2^3x_2^2 + \alpha_3^3\left(x_1^2 - b\right)\right]dx_1^2dx_2^2 +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13} + i\alpha_3^3\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^3x_1^1 + \alpha_2^3x_2^1 - \alpha_3^3 2b\right]dx_1^1dx_2^1 -$$
$$-\int\limits_{r}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53} + i\alpha_2^3\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^3x_1^5 - \alpha_2^3c - \alpha_3^3\left(x_2^5 + b\right)\right]dx_1^5dx_2^5 -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{-r}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^3\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^3x_1^6 + \alpha_2^3c - \alpha_3^3(x_2^6 + b)\right]dx_1^6dx_2^6;$$

$$K_5\Phi_5 = \int\limits_{r}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53} - i\alpha_3^5\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^5\eta_1^5 + \alpha_2^5\eta_2^5\right]d\eta_1^5d\eta_2^5 -$$
$$-\int\limits_{r}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13} - i\alpha_2^5\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^5x_1^1 + \alpha_2^5b - \alpha_3^5\left(x_2^1 + c\right)\right]dx_1^1dx_2^1 +$$
$$+\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{23} - i\alpha_1^5\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_2^5x_1^4 - \alpha_3^5(x_2^2 + c)\right]dx_1^2dx_2^2 -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{-r}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33} + i\alpha_2^5\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^5x_1^3 - \alpha_2^5b - \alpha_3^5(x_2^3 + c)\right]dx_1^3dx_2^3 +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{-r}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63} + i\alpha_3^5\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^5x_1^6 + \alpha_2^5x_2^6 - \alpha_3^5 2c\right]dx_1^6dx_2^6. \quad (6)$$

Блочный элемент 3

$$K_2\Phi_2 = \int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{23} - i\alpha_3^2\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^2\eta_1^2 + \alpha_2^2\eta_2^2\right]d\eta_1^2d\eta_2^2 -$$
$$-\int\limits_{r}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13} + i\alpha_1^2\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^2b + \alpha_2^2x_2^1 + \alpha_3^2x_1^1\right]dx_1^1dx_2^1 -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{-r}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33} - i\alpha_1^2\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^2b + \alpha_2^2x_2^3 - \alpha_3^2x_1^3\right]dx_1^3dx_2^3 +$$
$$+\int\limits_{r}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53} + i\alpha_2^2\varphi_5\right)\times$$
$$\times\,\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^2x_2^5 - \alpha_2^2c + \alpha_3^2x_1^5\right]dx_1^5dx_2^5 +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{-r}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^2\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^2x_2^6 + \alpha_2^2c - \alpha_3^2x_1^6\right]dx_1^6dx_2^6;$$

$$K_1\Phi_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c}\left(\varphi'_{13} - i\alpha_3^1\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right]d\eta_1^1d\eta_2^1 +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c}\left(\varphi'_{33} + i\alpha_3^1\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^3 + \alpha_2^1x_2^3 - \alpha_3^1 2b\right]dx_1^3dx_2^3$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^1\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^6 + \alpha_2^1c + \alpha_3^1(x_2^6 - b)\right]dx_1^6dx_2^6;$$

$$K_3\Phi_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c}\left(\varphi'_{33} - i\alpha_3^3\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3\right]d\eta_1^3d\eta_2^3 +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c}\left(\varphi'_{13} + i\alpha_3^3\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^3x_1^1 + \alpha_2^3x_2^1 - \alpha_3^3 2b\right]dx_1^1dx_2^1 -$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi_{63}' - i\alpha_2^3\varphi_6\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3 c - \alpha_3^3(x_2^6 + b)\right] dx_1^6 dx_2^6; \tag{7}$$

$$K_6\Phi_6 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi_{63}' - i\alpha_3^6\varphi_6\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha_1^6\eta_1^6 + \alpha_2^6\eta_2^6\right] d\eta_1^6 d\eta_2^6 -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c}\left(\varphi_{13}' - i\alpha_2^6\varphi_1\right)\times$$
$$\times \exp i\left[-\alpha_1^6 x_1^1 + \alpha_2^6 b + \alpha_3^6(x_2^1 - ct)\right] dx_1^1 dx_2^1 -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c}\left(\varphi_{33}' + i\alpha_2^6\varphi_3\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha_1^6 x_1^3 - \alpha_2^6 b + \alpha_3^6(x_2^3 - c)\right] dx_1^3 dx_2^3.$$

Блочный элемент 4

$$K_1\Phi_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty}\left(\varphi_{13}' - i\alpha_3^1\varphi_1\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right] d\eta_1^1 d\eta_2^1 +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty}\left(\varphi_{33}' + i\alpha_3^1\varphi_3\right)\times$$
$$\times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b\right] dx_1^3 dx_2^3$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi_{53}' - i\alpha_2^1\varphi_5\right)\times$$
$$\times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^5 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1(x_2^5 - b)\right] dx_1^5 dx_2^5; \tag{8}$$

$$K_3\Phi_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty}\left(\varphi_{33}' - i\alpha_3^3\varphi_3\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3\right] d\eta_1^3 d\eta_2^3 +$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty}\left(\varphi_{13}' + i\alpha_3^3\varphi_1\right)\times$$
$$\times \exp i\left[-\alpha_1^3 x_1^1 + \alpha_2^3 x_2^1 - \alpha_3^3 2b\right] dx_1^1 dx_2^1 -$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi_{53}' - i\alpha_2^3\varphi_5\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha_1^3 x_1^5 + \alpha_2^3 c - \alpha_3^3(x_2^5 + b)\right] dx_1^5 dx_2^5;$$

$$K_5\Phi_5 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi_{53}' - i\alpha_3^5\varphi_5\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha_1^5\eta_1^5 + \alpha_2^5\eta_2^5\right] d\eta_1^5 d\eta_2^5 -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty}\left(\varphi_{13}' - i\alpha_2^5\varphi_1\right)\times$$
$$\times \exp i\left[-\alpha_1^5 x_1^1 + \alpha_2^5 b + \alpha_3^5(x_2^1 - c)\right] dx_1^1 dx_2^1 -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty}\left(\varphi_{33}' + i\alpha_2^5\varphi_3\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha_1^5 x_1^3 - \alpha_2^5 b + \alpha_3^5(x_2^3 - c)\right] dx_1^3 dx_2^3.$$

Блочный элемент 5

$$K_1\Phi_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_{13}' - i\alpha_3^1\varphi_1\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right] d\eta_1^1 d\eta_2^1.$$

Здесь во всех двойных интегралах принимается тот порядок интегрирования, в котором следуют дифференциалы под интегральным выражением.

Как и в [2], введем операторы преобразования Фурье

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k)\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1^k, x_2^k)\times$$
$$\times \exp i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k) dx_1^k dx_2^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k)\Phi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha_1^k, \alpha_2^k)\times$$
$$\times \exp\left[-i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k)\right] d\alpha_1^k d\alpha_2^k, \tag{9}$$

$$\mathbf{F}(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k)\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1^k, x_2^k, x_3^k)\times$$
$$\times \exp i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k + \alpha_3^k x_3^k) dx_1^k dx_2^k dx_3^k,$$

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^k, x_2^k, x_3^k)\Phi = = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_2^k)\times \times\exp\left[-i(\alpha_1^k x_1^k + \alpha_2^k x_2^k + \alpha_3^k x_3^k)\right] d\alpha_1^k d\alpha_2^k d\alpha_3^k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, 6.$$

Псевдодифференциальные уравнения принимают вид

Блочный элемент 1

$$\begin{gathered}\mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1)(K_1\Phi_1) = 0,\\ -\infty \leqslant x_1^1 \leqslant 0, \quad \left|x_2^1\right| \leqslant c;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3)(K_3\Phi_3) = 0,\\ 0 \leqslant x_1^3 \leqslant \infty, \quad \left|x_2^3\right| \leqslant c;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^4, x_2^4)(K_4\Phi_4) = 0,\\ \left|x_1^4\right| \leqslant b, \quad \left|x_2^4\right| \leqslant c;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^5, x_2^5)(K_5\Phi_5) = 0,\\ -\infty \leqslant x_1^5 \leqslant 0, \quad \left|x_2^5\right| \leqslant b\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^6, x_2^6)(K_6\Phi_6) = 0,\\ 0 \leqslant x_1^6 \leqslant \infty, \quad \left|x_2^6\right| \leqslant b.\end{gathered} \tag{10}$$

Блочный элемент 2

$$\begin{gathered}\mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1)(K_1\Phi_1) = 0,\\ r \leqslant x_1^1 \leqslant \infty, \quad \left|x_2^1\right| \leqslant c;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3)(K_3\Phi_3) = 0,\\ r \leqslant x_1^3 \leqslant \infty, \quad \left|x_2^3\right| \leqslant c;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^2, x_2^2)(K_2\Phi_2) = 0,\\ \left|x_1^2\right| \leqslant b, \quad \left|x_2^2\right| \leqslant c;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^5, x_2^5)(K_5\Phi_5) = 0,\\ r \leqslant x_1^5 \leqslant \infty, \quad \left|x_2^5\right| \leqslant b;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^6, x_2^6)(K_6\Phi_6) = 0,\\ -\infty \leqslant x_1^6 \leqslant -r, \quad \left|x_2^6\right| \leqslant b;\end{gathered} \tag{11}$$

Блочный элемент 3

$$\begin{gathered}\mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1)(K_1\Phi_1) = 0,\\ -\infty \leqslant x_1^1 \leqslant \infty \quad -\infty \leqslant x_2^1 \leqslant -c;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3)(K_3\Phi_3) = 0,\\ -\infty \leqslant x_1^3 \leqslant \infty, \quad -\infty \leqslant x_2^3 \leqslant -c;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^6, x_2^6)(K_6\Phi_6) = 0,\\ -\infty \leqslant x_1^1 \leqslant \infty, \quad \left|x_2^6\right| \leqslant b;\end{gathered} \tag{12}$$

Блочный элемент 4

$$\begin{gathered}\mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1)(K_1\Phi_1) = 0,\\ -\infty \leqslant x_1^1 \leqslant \infty, \quad c \leqslant x_2^1 \leqslant \infty;\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3)(K_3\Phi_3) = 0,\\ -\infty \leqslant x_1^1 \leqslant \infty, \quad c \leqslant x_2^1 \leqslant \infty\\ \mathbf{F}^{-1}(x_1^5, x_2^5)(K_5\Phi_5) = 0,\\ -\infty \leqslant x_1^5 \leqslant \infty, \quad \left|x_2^5\right| \leqslant b;\end{gathered} \tag{13}$$

Блочный элемент 5

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_{13}' - i\alpha_{3-}^1\varphi_1\right)\times \times\exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right] d\eta_1^1 d\eta_2^1\right\} = 0, \tag{14}$$

$$-\infty \leqslant x_1^1 \leqslant \infty, \quad -\infty \leqslant x_2^1 \leqslant \infty.$$

Характеристические уравнения в локальных системах координат имеют вид

$$K_1(\alpha_1^m, \alpha_2^m, \alpha_3^m) = (\alpha_1^m)^2 + (\alpha_2^m)^2 + (\alpha_3^m)^2 - A,$$

$$m = 1,\ 3$$

$$K_2(\alpha_1^n, \alpha_2^n, \alpha_3^n) = (\alpha_1^n)^2 + (\alpha_2^n)^2 + (\alpha_3^n)^2 - A,$$

$$n = 2, 4$$

$$K_3(\alpha_1^p, \alpha_2^p, \alpha_3^p) = (\alpha_1^p)^2 + (\alpha_2^p)^2 + (\alpha_3^p)^2 - A,$$

$$p = 5,\ 6$$

Интересующие нас корневые множества описываются соотношениями

$$\alpha_{3-}^m(\alpha_1^m, \alpha_2^m) = -i\sqrt{(\alpha_1^m)^2 + (\alpha_2^m)^2 - A},$$

$$m = 1,\ 3$$

$$\alpha_{3-}^n(\alpha_1^n, \alpha_2^n) = -i\sqrt{(\alpha_1^n)^2 + (\alpha_2^n)^2 - A},$$

$$n = 2, 4$$

$$\alpha_{3-}^p(\alpha_1^p, \alpha_2^p) = -i\sqrt{(\alpha_1^p)^2 + (\alpha_2^p)^2 - A},$$

$$p = 5,\ 6.$$

Здесь берутся те ветви аналитических функций, которые обеспечивают принадлежность корней нижней полуплоскости при достаточно больших по модулю вещественных параметрах преобразований Фурье.

Найдем представления решения в каждой из введенных локальных координат, т.е. представление блочного элемента. Имеем

Блочный элемент 1

$$\varphi_1(x_1^1,x_2^1,x_3^1)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^1,x_2^1,x_3^1)\times$$
$$\times K_1^{-1}\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13}-i\alpha_3^1\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1+\alpha_2^1\eta_2^1\right]d\eta_1^1d\eta_2^1+$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33}+i\alpha_3^1\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^3+\alpha_2^1x_2^3-\alpha_3^12b\right]dx_1^3dx_2^3-$$
$$-\int\limits_{-c}^{c}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{43}-i\alpha_1^1\varphi_4\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_2^1x_2^4-\alpha_3^1(x_1^4+b)\right]dx_1^4dx_2^4+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53}+i\alpha_2^1\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^1x_1^5-\alpha_2^1c+\alpha_3^1(x_2^5-b)\right]dx_1^5dx_2^5+$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63}-i\alpha_2^1\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^6+\alpha_2^1c+\alpha_3^1(x_2^6-b)\right]dx_1^6dx_2^6\Bigg\};$$

$$\varphi_3(x_1^3,x_2^3,x_3^3)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^3,x_2^3,x_3^3)\times$$
$$\times K_1^{-1}\Bigg\{\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33}-i\alpha_3^3\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3+\alpha_2^3\eta_2^3\right]d\eta_1^3d\eta_2^3-$$
$$-\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{43}+i\alpha_1^3\varphi_4\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_2^3x_2^4+\alpha_3^3(x_1^4-b)\right]dx_1^4dx_2^4+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13}+i\alpha_3^3\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^3x_1^1+\alpha_2^3x_2^1-\alpha_3^32b\right]dx_1^1dx_2^1-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53}+i\alpha_2^3\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^3x_1^5-\alpha_2^3c-\alpha_3^3(x_2^5+b)\right]dx_1^5dx_2^5-$$
$$-\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63}-i\alpha_2^3\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^3x_1^6+\alpha_2^3c-\alpha_3^3(x_2^6+b)\right]dx_1^6dx_2^6\Bigg\};\qquad(15)$$

$$\varphi_4(x_1^4,x_2^4,x_3^4)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^4,x_2^4,x_3^4)\times$$
$$\times K_2^{-1}\Bigg\{\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{43}-i\alpha_3^4\varphi_4\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^4\eta_1^4+\alpha_2^4\eta_2^4\right]d\eta_1^4d\eta_2^4-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13}+i\alpha_1^4\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^4b+\alpha_2^4x_2^1+\alpha_3^4x_1^1\right]dx_1^1dx_2^1-$$
$$-\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33}-i\alpha_1^4\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^4b+\alpha_2^4x_2^3-\alpha_3^4x_1^3\right]dx_1^3dx_2^3+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53}+i\alpha_2^4\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^4x_2^5-\alpha_2^4c+\alpha_3^4x_1^5\right]dx_1^5dx_2^5+$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63}-i\alpha_2^4\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^4x_2^6+\alpha_2^4c-\alpha_3^4x_1^6\right]dx_1^6dx_2^6\Bigg\};$$

$$\varphi_5(x_1^5,x_2^5,x_3^5)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^5,x_2^5,x_3^5)\times$$
$$\times K_3^{-1}\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53}-i\alpha_3^5\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^5\eta_1^5+\alpha_2^5\eta_2^5\right]d\eta_1^5d\eta_2^5-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13}-i\alpha_2^5\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^5x_1^1+\alpha_2^5b-\alpha_3^5(x_2^1+c)\right]dx_1^1dx_2^1+$$

$$+\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{43}-i\alpha_1^5\varphi_4\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_2^5x_1^4-\alpha_3^5(x_2^4+c)\right]dx_1^4dx_2^4-$$
$$-\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33}+i\alpha_2^5\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^5x_1^3-\alpha_2^5b-\alpha_3^5\left(x_2^3+c\right)\right]dx_1^3dx_2^3+$$
$$+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63}+i\alpha_3^5\varphi_6\right)\times$$
$$\left.\times\exp i\left[-\alpha_1^5x_1^6+\alpha_2^5x_2^6-\alpha_3^5 2c\right]dx_1^6dx_2^6\right\};$$

$$\varphi_6(x_1^6,x_2^6,x_3^6)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^6,x_2^6,x_3^6)\times$$
$$\times K_3^{-1}\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63}-i\alpha_3^6\varphi_6\right)\times\right.$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^6\eta_1^6+\alpha_2^6\eta_2^6\right]d\eta_1^6d\eta_2^6+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53}+i\alpha_3^6\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^6x_1^5+\alpha_2^6x_2^5-\alpha_3^6 2c\right]dx_1^5dx_2^5-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13}-i\alpha_2^6\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^6x_1^1+\alpha_2^6b+\alpha_3^6(x_2^1-c)\right]dx_1^1dx_2^1-$$
$$-\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33}+i\alpha_2^6\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^6x_1^3-\alpha_2^6b+\alpha_3^6(x_2^3-c)\right]dx_1^3dx_2^3+$$
$$+\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{43}+i\alpha_1^6\varphi_4\right)\times$$
$$\left.\times\exp i\left[-\alpha_2^6x_1^4+\alpha_3^6(x_2^4-c)\right]dx_1^4dx_2^4\right\}.$$

Блочный элемент 2

$$\varphi_1(x_1^1,x_2^1,x_3^1)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^1,x_2^1,x_3^1)\times$$
$$\times K_1^{-1}\left\{\int\limits_{r}^{\infty}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13}-i\alpha_{3-}^1\varphi_1\right)\times\right.$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1+\alpha_2^1\eta_2^1\right]d\eta_1^1d\eta_2^1+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{r}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33}+i\alpha_{3-}^1\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^3+\alpha_2^1x_2^3-\alpha_{3-}^1 2b\right]dx_1^3dx_2^3-$$
$$-\int\limits_{-c}^{c}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{23}-i\alpha_1^1\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_2^1x_2^2-\alpha_{3-}^1(x_1^2+b)\right]dx_1^2dx_2^2+$$
$$+\int\limits_{r}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53}+i\alpha_2^1\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^1x_1^5-\alpha_2^1c+\alpha_{3-}^1(x_2^5-b)\right]dx_1^5dx_2^5+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{-r}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63}-i\alpha_2^1\varphi_6\right)\times$$
$$\left.\times\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^6+\alpha_2^1c+\alpha_{3-}^1(x_2^6-b)\right]dx_1^6dx_2^6\right\};$$

$$\varphi_3(x_1^3,x_2^3,x_3^3)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^3,x_2^3,x_3^3)\times$$
$$\times K_1^{-1}\left\{\int\limits_{-\infty}^{-r}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{33}-i\alpha_3^3\varphi_3\right)\times\right.$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3+\alpha_2^3\eta_2^3\right]d\eta_1^3d\eta_2^3-$$
$$-\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{23}+i\alpha_1^3\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_2^3x_2^2+\alpha_3^3(x_1^2-b)\right]dx_1^2dx_2^2+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-c}^{c}\left(\varphi'_{13}+i\alpha_3^3\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^3x_1^1+\alpha_2^3x_2^1-\alpha_3^3 2b\right]dx_1^1dx_2^1-$$
$$-\int\limits_{r}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{53}+i\alpha_2^3\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^3x_1^5-\alpha_2^3c-\alpha_3^3(x_2^5+b)\right]dx_1^5dx_2^5-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{-r}\int\limits_{-b}^{b}\left(\varphi'_{63}-i\alpha_2^3\varphi_6\right)\times$$
$$\left.\times\exp i\left[\alpha_1^3x_1^6+\alpha_2^3c-\alpha_3^3(x_2^6+b)\right]dx_1^6dx_2^6\right\};\tag{16}$$

$$\varphi_2(x_1^2,x_2^2,x_3^2)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^2,x_2^2,x_3^2)\times$$
$$\times K_2^{-1}\Bigg\{\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\left(\varphi_{23}'-i\alpha_3^2\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^2\eta_1^2+\alpha_2^2\eta_2^2\right]d\eta_1^2d\eta_2^2-$$
$$-\int_{r}^{\infty}\int_{-c}^{c}\left(\varphi_{13}'+i\alpha_1^2\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^2b+\alpha_2^2x_2^1+\alpha_3^2x_1^1\right]dx_1^1dx_2^1-$$
$$-\int_{-\infty}^{-r}\int_{-c}^{c}\left(\varphi_{33}'-i\alpha_1^2\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^2b+\alpha_2^2x_2^3-\alpha_3^2x_1^3\right]dx_1^3dx_2^3+$$
$$+\int_{r}^{\infty}\int_{-b}^{b}\left(\varphi_{53}'+i\alpha_2^2\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^2x_2^5-\alpha_2^2c+\alpha_3^2x_1^5\right]dx_1^5dx_2^5+$$
$$+\int_{-\infty}^{-r}\int_{-b}^{b}\left(\varphi_{63}'-i\alpha_2^2\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^2x_2^6+\alpha_2^2c-\alpha_3^2x_1^6\right]dx_1^6dx_2^6\Bigg\};$$

$$\varphi_5(x_1^5,x_2^5,x_3^5)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^5,x_2^5,x_3^5)\times$$
$$\times K_3^{-1}\Bigg\{\int_{r}^{\infty}\int_{-b}^{b}\left(\varphi_{53}'-i\alpha_3^5\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^5\eta_1^5+\alpha_2^5\eta_2^5\right]d\eta_1^5d\eta_2^5-$$
$$-\int_{r}^{\infty}\int_{-c}^{c}\left(\varphi_{13}'-i\alpha_2^5\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^5x_1^1+\alpha_2^5b-\alpha_3^5\left(x_2^1+c\right)\right]dx_1^1dx_2^1+$$
$$+\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\left(\varphi_{23}'-i\alpha_1^5\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_2^5x_1^4-\alpha_3^5\left(x_2^2+c\right)\right]dx_1^2dx_2^2-$$
$$-\int_{-\infty}^{-r}\int_{-c}^{c}\left(\varphi_{33}'+i\alpha_2^5\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^5x_1^3-\alpha_2^5b-\alpha_3^5\left(x_2^3+c\right)\right]dx_1^3dx_2^3+$$
$$+\int_{-\infty}^{-r}\int_{-b}^{b}\left(\varphi_{63}'+i\alpha_3^5\varphi_6\right)\times$$
$$\times\ \exp i\left[-\alpha_1^5x_1^6+\alpha_2^5x_2^6-\alpha_3^52c\right]dx_1^6dx_2^6\Bigg\};$$

$$\varphi_6(x_1^6,x_2^6,x_3^6)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^6,x_2^6,x_3^6)\times$$
$$\times K_3^{-1}\Bigg\{\int_{-\infty}^{-r}\int_{-b}^{b}\left(\varphi_{63}'-i\alpha_3^6\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^6\eta_1^6+\alpha_2^6\eta_2^6\right]d\eta_1^6d\eta_2^6+$$
$$+\int_{r}^{\infty}\int_{-b}^{b}\left(\varphi_{53}'+i\alpha_3^6\varphi_5\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^6x_1^5+\alpha_2^6x_2^5-\alpha_3^62c\right]dx_1^5dx_2^5-$$
$$-\int_{r}^{\infty}\int_{-c}^{c}\left(\varphi_{13}'-i\alpha_2^6\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^6x_1^1+\alpha_2^6b+\alpha_3^6\left(x_2^1-c\right)\right]dx_1^1dx_2^1-$$
$$-\int_{-\infty}^{-r}\int_{-c}^{c}\left(\varphi_{33}'+i\alpha_2^6\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^6x_1^3-\alpha_2^6b+\alpha_3^6\left(x_2^3-c\right)\right]dx_1^3dx_2^3+$$
$$+\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\left(\varphi_{23}'+i\alpha_1^6\varphi_2\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_2^6x_1^2+\alpha_3^6(x_2^2-c)\right]dx_1^2dx_2^2\Bigg\}.$$

Блочный элемент 3

$$\varphi_1(x_1^1,x_2^1,x_3^1)=\mathbf{F}^{-1}(x_1^1,x_2^1,x_3^1)\times$$
$$\times K_1^{-1}\Bigg\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{-c}\left(\varphi_{13}'-i\alpha_3^1\varphi_1\right)\times$$
$$\times\exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1+\alpha_2^1\eta_2^1\right]d\eta_1^1d\eta_2^1+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{-c}\left(\varphi_{33}'+i\alpha_3^1\varphi_3\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^3+\alpha_2^1x_2^3-\alpha_3^12b\right]dx_1^3dx_2^3$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-b}^{b}\left(\varphi_{63}'-i\alpha_2^1\varphi_6\right)\times$$
$$\times\exp i\left[-\alpha_1^1x_1^6+\alpha_2^1c+\alpha_3^1\left(x_2^6-b\right)\right]dx_1^6dx_2^6\Bigg\};$$

$$
\begin{gathered}
\varphi_3(x_1^3, x_2^3, x_3^3) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3, x_3^3)\times\\
\times K_1^{-1}\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c} \left(\varphi'_{33} - i\alpha_3^3\varphi_3\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3\right] d\eta_1^3 d\eta_2^3+\\
+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c} \left(\varphi'_{13} + i\alpha_3^3\varphi_1\right)\times\\
\times \exp i\left[-\alpha_1^3 x_1^1 + \alpha_2^3 x_2^1 - \alpha_3^3 2b\right] dx_1^1 dx_2^1-\\
-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^3\varphi_6\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3 c - \alpha_3^3\left(x_2^6 + b\right)\right] dx_1^6 dx_2^6\Bigg\};
\end{gathered}
\tag{17}
$$

$$
\begin{gathered}
\varphi_6(x_1^6, x_2^6, x_3^6) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^6, x_2^6, x_3^6)\times\\
\times K_3^{-1}\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{63} - i\alpha_3^6\varphi_6\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^6\eta_1^6 + \alpha_2^6\eta_2^6\right] d\eta_1^6 d\eta_2^6-\\
-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c} \left(\varphi'_{13} - i\alpha_2^6\varphi_1\right)\times\\
\times \exp i\left[-\alpha_1^6 x_1^1 + \alpha_2^6 b + \alpha_3^6(x_2^1 - c)\right] dx_1^1 dx_2^1-\\
-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{-c} \left(\varphi'_{33} + i\alpha_2^6\varphi_3\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^6 x_1^3 - \alpha_2^6 b + \alpha_3^6(x_2^3 - c)\right] dx_1^3 dx_2^3\Bigg\}.
\end{gathered}
$$

Блочный элемент 4

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1)\times\\
\times K_1^{-1}\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty} \left(\varphi'_{13} - i\alpha_3^1\varphi_1\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right] d\eta_1^1 d\eta_2^1+\\
+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty} \left(\varphi'_{33} + i\alpha_3^1\varphi_3\right)\times\\
\times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b\right] dx_1^3 dx_2^3\\
+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{53} - i\alpha_2^1\varphi_5\right)\times\\
\times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^5 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1\left(x_2^5 - b\right)\right] dx_1^5 dx_2^5\Bigg\};
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\varphi_3(x_1^3, x_2^3, x_3^3) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3, x_3^3)\times\\
\times K_1^{-1}\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty} \left(\varphi'_{33} - i\alpha_3^3\varphi_3\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3\right] d\eta_1^3 d\eta_2^3+\\
+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty} \left(\varphi'_{13} + i\alpha_3^3\varphi_1\right)\times\\
\times \exp i\left[-\alpha_1^3 x_1^1 + \alpha_2^3 x_2^1 - \alpha_3^3 2b\right] dx_1^1 dx_2^1-\\
-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{53} - i\alpha_2^3\varphi_5\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^3 x_1^5 + \alpha_2^3 c - \alpha_3^3\left(x_2^5 + b\right)\right] dx_1^5 dx_2^5\Bigg\};
\end{gathered}
\tag{18}
$$

$$
\begin{gathered}
\varphi_5(x_1^5, x_2^5, x_3^5) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^5, x_2^5, x_3^5)\times\\
\times K_3^{-1}\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-b}^{b} \left(\varphi'_{53} - i\alpha_3^5\varphi_5\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^5\eta_1^5 + \alpha_2^5\eta_2^5\right] d\eta_1^5 d\eta_2^5-\\
-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty} \left(\varphi'_{13} - i\alpha_2^5\varphi_1\right)\times\\
\times \exp i\left[-\alpha_1^5 x_1^1 + \alpha_2^5 b + \alpha_3^5\left(x_2^1 - c\right)\right] dx_1^1 dx_2^1-\\
-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{c}^{\infty} \left(\varphi'_{33} + i\alpha_2^5\varphi_3\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^5 x_1^3 - \alpha_2^5 b + \alpha_3^5\left(x_2^3 - c\right)\right] dx_1^3 dx_2^3\Bigg\}.
\end{gathered}
$$

Блочный элемент 5

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1)\times\\
\times K_1^{-1}\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi'_{13} - i\alpha_3^1\varphi_1\right)\times\\
\times \exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right] d\eta_1^1 d\eta_2^1\Bigg\}.
\end{gathered}
$$

В отличие от случая ограниченных носителей, в данном случае при вычислении интегралов (4) необходимо выполнение условия излучения на бесконечности [8], что достигается выбором соответствующего обхода возможных вещественных полюсов подынтегральных выражений для тех локальных координат, которые уходят на бесконечность.

В том случае, если возникает необходимость на границах блоков рассматривать наличие трещин или разломов в постановке Ирвина, достаточно соответствующим образом сформулитовать граничные условия на границе блока, как это описано в [5]. На границе полупространства могут задаваться условия на функции φ или φ'.

В случае $c \to \infty$ можно рассматривать антиплосую задачу о колебании полупространств с каньоном или разломом. Для этого необходимо считать, что все описывающие блочную структуру функции зависят только от двух координат, лежащих в плоскости, перпендикулярной каньону.

Приведенные выше формулы представления блочных элементов являются естественным обобщением на более сложные области соответствующих формул слоистых сред. Путем изменения параметров области, приводящих область к слою, получаются соответствующие выражения для слоистой среды. Ценным является возможность использования при изучении волновых полей в блочном элементе тех же приемов, связанных с исследованием дисперсионных уравнений и вычислением вычетов, что и в случае слоя [8].

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427. №2. С. 183–187.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О проблеме блочных структур академика М.А.Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. №4. С. 480–485.
3. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О пирамидальном блочном элементе // ДАН. 2009. Т. 428. №1. С. 30–34.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О блочном элементе в форме произвольной треугольной пирамиды // ДАН. 2009. Т. 429. №6. С. 758–761.
5. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424. №1. С. 36–39.
6. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и нано структурах // ДАН. 2007. Т. 415. №5. С. 596–599.
7. *Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418. №3. С. 321–323.
8. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
9. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
10. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.

Ключевые слова: блочные элементы, граничные задачи, трещины, разломы, теория упругости

Статья поступила 28 февраля 2010 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар