

УДК 532.5

ОБТЕКАНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ ПОД ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ ОГРАНИЧЕННОМ КАНАЛЕ¹

Кириллин К. В.², Филиппов С. И.³

FLOW AROUND THE WING SECTION BELOW THE INTERFACE OF DOUBLE-LAYER HEAVY LIQUID
IN THE OPEN BOUNDED CHANNEL

Kirillin K. V., Filippov S. I.

This paper considers flow of heavy liquid with three types of boundary surface – free surface, boundary surface between liquids of different density and solid bottom-around the wing section. The given results show characteristics of real hydrofoil hydrodynamic depending on Froude number.

Keywords: wing section, double-layer liquid, gravity waves, open channel, bounded channel

1. Постановка задачи и граничные условия

Рассмотрим поток идеальной несжимаемой жидкости, ограниченный сверху свободной поверхностью M_1 , а снизу твердым дном M_3 . Поток состоит из верхнего слоя толщины H_1 плотности ρ_1 и нижнего слоя толщины H_2 плотности ρ_2 . Жидкость находится под действием силы тяжести, ускорение которой равняется g . Крыловой профиль C с длиной хорды L расположен в нижнем слое жидкости (рис. 1).

В системе координат, начало которой совпадает с серединой хорды профиля, ось Ox параллельна невозмущенной границе раздела сред M_2 и направлена навстречу потоку, а ось Oy – вертикально вверх, течение плоскопараллельное, установившееся. Скорости потока на бесконечности перед профилем параллельны невозмущенным границам $y = h_k$ ($k = \bar{1}, \bar{3}$) и равны U_l ($l = 1, 2$). Считаем, что внутри жидкости вихри отсутствуют, так что течение обладает потенциалом скорости.

Введем соответствующие слоям жидкости области D_l ($l = 1, 2$). Область D_1 представляет собой полосу $h_2 \leq y \leq h_1$ ($h_2 = h_1 - H_1$), область D_2 – полосу

$h_3 \leq y \leq h_2$ ($h_3 = h_2 - H_2$), за исключением области, ограниченной профилем C .

Рассмотрим комплексную переменную $z = x + iy$ и комплексные потенциалы возмущенного течения

$$\tilde{W}_l(z) = \tilde{\varphi}_l(x, y) + i\tilde{\psi}_l(x, y)$$

в соответствующих областях D_l .

Используя предположения линейной теории волн малой амплитуды, с учетом обозначений

$$\tilde{W}_l(z) = U_l W_l(z),$$

$$\nu_1 = \frac{g}{U_1^2}, \quad \nu_2 = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2},$$

$$m_l = \frac{\rho_l U_l^2}{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2}, \quad m = m_1 - m_2$$

придем к следующей задаче. Найти функции $W_l(z)$, аналитические в соответствующих областях и удовлетворяющие условиям:

на поверхности профиля C

$$\operatorname{Im} W_2(z) = y + \psi_1 \quad (\psi_1 = \text{const}), \quad z \in C; \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-01-00163).

²Кириллин Кирилл Вадимович, младший научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, Казанский государственный университет; e-mail: kirill_k@inbox.ru

³Филиппов Сергей Иванович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, Казанский государственный университет; e-mail: sergei.filippov@ksu.ru

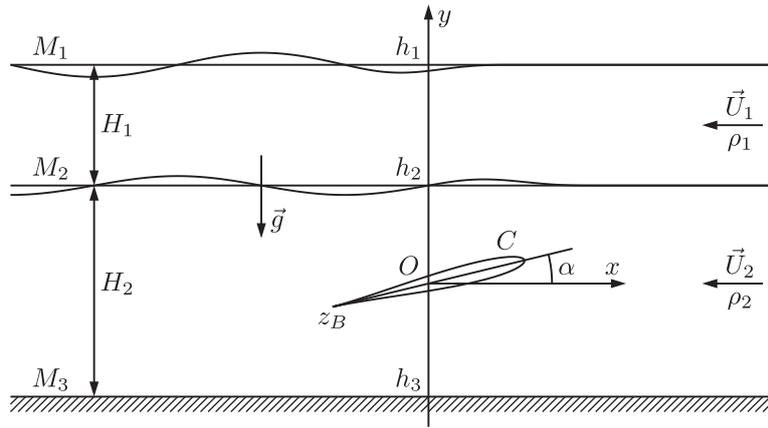


Рис. 1. Схема течения

на свободной поверхности M_1

$$\operatorname{Re} \left[\frac{dW_1(z)}{dz} + i\nu_1 W_1(z) \right] = 0, \quad y = h_1; \quad (1.2)$$

на границе раздела жидкостей M_2

$$\operatorname{Im} \left[W_1(z) - W_2(z) \right] = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{Re} \left[m_1 \frac{dW_1(z)}{dz} - m_2 \frac{dW_2(z)}{dz} + i\nu_2 W_2(z) \right] = 0, \quad y = h_2; \quad (1.4)$$

на дне канала M_3

$$\operatorname{Im} \left[\frac{dW_2(z)}{dz} \right] = 0, \quad y = h_3; \quad (1.5)$$

на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{dW_l(z)}{dz} = 0, \quad \left| \frac{dW_l(z)}{dz} \right| < A, \quad A < \infty, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

В силу линейности задачи представим $W_l(z)$ ($l = 1, 2$) в виде суммы

$$W_l(z) = W_{1l}(z) + \gamma W_{2l}(z), \quad (1.7)$$

где $W_{1l}(z)$ — комплексные потенциалы возмущенного бесциркуляционного течения, удовлетворяющие условиям (1.1)–(1.6), $W_{2l}(z)$ — комплексные потенциалы чисто

циркуляционного течения, γ — значение циркуляции. Потенциалы $W_{2l}(z)$ ($l = 1, 2$) наряду с (1.2)–(1.6) должны удовлетворять также условиям

$$\operatorname{Im} W_{22}(z) = \psi_2 \quad (\psi_2 = \text{const}), \quad z \in C; \quad (1.8)$$

$$\Delta_C W_{22} = 1, \quad (1.9)$$

где Δ_C — приращение функции при положительном обходе контура C .

2. Метод решения

Метод решения задачи заключается в распределении двойных слоев особенностей (диполей) вещественной плотности по невозмущенным уровням свободной поверхности M_1 и границы раздела жидкостей M_2 и дну канала M_3 , к потенциалам которых добавляются такие регулярные вне C функции, что условие на контуре (1.1) выполняется точно.

Наряду с физической плоскостью $z = x + iy$ рассмотрим параметрическую плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Пусть функция $z = f(\zeta)$ осуществляет конформное отображение внешности единичной окружности $C_\zeta = \{\zeta \mid |\zeta| = 1\}$ на внешность профиля C , причем $f(\infty) = \infty$ и $\zeta_B = -1$ соответствует задней кромке профиля z_B .

Будем искать комплексные потенциалы в виде

$$W_{sl}(z) = W_{s\infty}(z) + \sum_{k=1}^3 [V_{sk}(z) + \Phi_{sk}(z)], \quad (2.1)$$

где $W_{s\infty}(z)$ — комплексные потенциалы возмущенного течения при обтекании профиля безграничным потоком,

$$V_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k} \frac{\mu_{sk}(t)}{z-t} dt,$$

$$\Phi_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k} F_k(z, t) \mu_{sk}(t) dt.$$

Функции $F_k(z, t)$ строятся в параметрической плоскости ζ на основании теоремы Милн–Томсона об окружности [1]

$$F_k[f(\zeta), f(\tau)] = \frac{1}{f'(\tau)} [\chi_k(\zeta, \tau) + G_k(\zeta, \tau)],$$

$$\chi_k(\zeta, \tau) = \frac{1}{\zeta - \tau} - \frac{f'(\tau)}{f(\zeta) - f(\tau)},$$

$$G_k(\zeta, \tau) = \frac{1}{\bar{\tau}^2 (\zeta - 1/\bar{\tau})}.$$

Плотности непрерывно распределенных по M_k особенностей $\mu_{sk}(t)$ ($s = 1, 2; k = \overline{1, 3}$) определяются из условий (1.2), (1.4), (1.5). Предварительно для границ M_k проводятся преобразования координат $z = z_k + ih_k$. Условие (1.3) выполняется на основании свойств предельных значений интеграла типа Коши.

Рассмотрим условие (1.4) на границе раздела жидкостей M_2 для случая чисто циркуляционного обтекания профиля. Подставим комплексный потенциал в форме (2.1) ($s = 2$) в условие (1.4) с учетом преобразования координат $z = z_2 + ih_2$, получим

$$\operatorname{Re} \left[\left(-\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{22}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) \Omega_{22}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{21}(z_2) \right]_{z_2=x_2-i\cdot 0} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\Omega_{22}(z_2) = W_{2\infty}(z_2) + V_{23}(z_2) + \Phi_{21}(z_2) + \Phi_{22}(z_2) + \Phi_{23}(z_2).$$

Условие (2.2) представляет собой сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, содержащее три группы слагаемых: с особенностями на линии раздела ($y_2 = 0$), с

особенностями внутри рассматриваемой области ($y_2 < 0$) и с особенностями вне области ($y_2 > 0$). Его можно регуляризовать, используя следующий прием. Заметим, что (2.2) эквивалентно следующему уравнению:

$$\operatorname{Re} \left[\left(-\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{22}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} - i\nu_2 \right) \bar{\Omega}_{22}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{21}(z_2) \right]_{z_2=x_2-i\cdot 0} = 0. \quad (2.3)$$

Функции $V_{22}(z_2)$, $\bar{\Omega}_{22}(z_2)$, $V_{21}(z_2)$ регулярны в полуплоскости $y_2 \leq 0$, следовательно, выражение под знаком действительной части в этой области является чисто мнимой постоянной

$$\left(-\frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{22}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} - i\nu_2 \right) \bar{\Omega}_{22}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + i\nu_2 \right) V_{21}(z_2) = iN, \quad (2.4)$$

где N — вещественная постоянная, определяемая из условия на бесконечности (1.6): $N = 0$. Решая линейное дифференциальное уравнение первого порядка (2.4) относительно V_{22} и находя действительную часть предела при $z_2 \rightarrow x_2 - i \cdot 0$ (предельный переход в сингулярном интеграле осуществляется по формуле Сохоцкого), получим в параметрической плоскости ζ при $x_2 = f(\zeta_2) - ih_2$

$$\mu_{22}(\zeta_2) = 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_{22}(\zeta_2) + \sum_{r=1}^3 \int_{\Gamma_r} L_{2r}(\zeta_2, \tau_r) \mu_{2r}(\tau_r) d\tau_r \right]. \quad (2.5)$$

Остальные пять уравнений для нахождения плотностей особенностей можно получить, проделав аналогичные (2.2)–(2.5) преобразования для граничных условий (1.2), (1.4), (1.5) для случая бесциркуляционного и для условий (1.2), (1.5) для случая чисто циркуляционного обтекания. В результате получим две системы уравнений для определения

плотностей особенностей $\mu_{sk}(\zeta)$

$$\mu_{sk}(\zeta_k) = 2 \operatorname{Re} \left[\sigma_{sk}(\zeta_k) + \sum_{r=1}^3 \int_{T_r} L_{kr}(\zeta_k, \tau_r) \mu_{sr}(\tau_r) d\tau_r \right] \quad (s = 1, 2; k = \overline{1, 3}), \quad (2.6)$$

где

$$\sigma_{s1}(\zeta_1) = -W_{s\infty}^*(\zeta_1) - 2i\nu_1 e^{i\nu_1 f(\zeta_1)} \times \int_{+\infty}^{\zeta_1} e^{-i\nu_1 f(\vartheta_1)} W_{s\infty}^*(\vartheta_1) f'(\vartheta_1) d\vartheta_1,$$

$$L_{11}(\zeta_1, \tau_1) = -\frac{1}{2\pi i} \left[(\chi_1(\zeta_1, \tau_1) + G_1(\zeta_1, \tau_1)) + 2i\nu_1 e^{i\nu_1 f(\zeta_1)} \int_{+\infty}^{\zeta_1} e^{-i\nu_1 f(\vartheta_1)} \times (\chi_1(\vartheta_1, \tau_1) + G_1(\vartheta_1, \tau_1)) f'(\vartheta_1) d\vartheta_1 \right],$$

$$L_{1m}(\zeta_1, \tau_m) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\left(\frac{1}{\zeta_1 - \tau_m} + G_m(\zeta_1, \tau_m) \right) + 2i\nu_1 e^{i\nu_1 f(\zeta_1)} \int_{+\infty}^{\zeta_1} e^{-i\nu_1 f(\vartheta_1)} \times \left(\frac{1}{\vartheta_1 - \tau_m} + G_m(\vartheta_1, \tau_m) \right) f'(\vartheta_1) d\vartheta_1 \right] \quad (m = 2, 3),$$

$$\sigma_{s2}(\zeta_2) = mW_{s\infty}^*(\zeta_2) - i\nu_2(m-1) e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)} \times \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{i\nu_2 f(\vartheta_2)} W_{s\infty}^*(\vartheta_2) f'(\vartheta_2) d\vartheta_2,$$

$$L_{21}(\zeta_2, \tau_1) = \frac{1}{2\pi i} \left[m \left(\frac{1}{\zeta_2 - \tau_1} + G_1(\zeta_2, \tau_1) \right) - i\nu_2(m-1) e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{i\nu_2 f(\vartheta_2)} \times (\chi_1(\vartheta_2, \tau_1) + G_1(\vartheta_2, \tau_1)) f'(\vartheta_2) d\vartheta_2 + i\nu_2(m+1) e^{i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{-i\nu_2 f(\vartheta_2)} \times \frac{f'(\tau_1)}{f(\vartheta_2) - f(\tau_1)} f'(\vartheta_2) d\vartheta_2 \right],$$

$$L_{22}(\zeta_2, \tau_2) = \frac{1}{2\pi i} \left[m(\chi_2(\zeta_2, \tau_2) + G_2(\zeta_2, \tau_2)) - i\nu_2(m-1) e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{i\nu_2 f(\vartheta_2)} \times (\chi_2(\vartheta_2, \tau_2) + G_2(\vartheta_2, \tau_2)) f'(\vartheta_2) d\vartheta_2 \right],$$

$$L_{23}(\zeta_2, \tau_3) = \frac{1}{2\pi i} \left[m \left(\frac{1}{\zeta_2 - \tau_3} + G_3(\zeta_2, \tau_3) \right) - i\nu_2(m-1) e^{-i\nu_2 f(\zeta_2)} \int_{+\infty}^{\zeta_2} e^{i\nu_2 f(\vartheta_2)} \times \left(\frac{1}{\vartheta_2 - \tau_3} + G_3(\vartheta_2, \tau_3) \right) f'(\vartheta_2) d\vartheta_2 \right],$$

$$\sigma_{13}(\zeta_3) = -W_{1\infty}^*(\zeta_3),$$

$$\sigma_{23}(\zeta_3) = W_{2\infty 1}^*(\zeta_3) - W_{2\infty 2}^*(\zeta_3),$$

$$L_{3n}(\zeta_3, \tau_n) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\zeta_3 - \tau_n} + G_n(\zeta_3, \tau_n) \right] \quad (n = 1, 2),$$

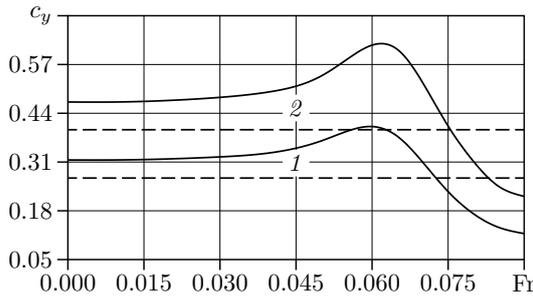


Рис. 2. Зависимость $c_y(\text{Fr})$ при $\text{Fr} < \text{Fr}_1^*$, $h_1/L = 1, h_2/L = 0,5, h_3/L = -0,7, \alpha = \{1^\circ, 2^\circ\}$ (кривые 1, 2). Штриховыми кривыми изображены результаты расчетов для однослойной жидкости ($\rho_1 = \rho_2$)

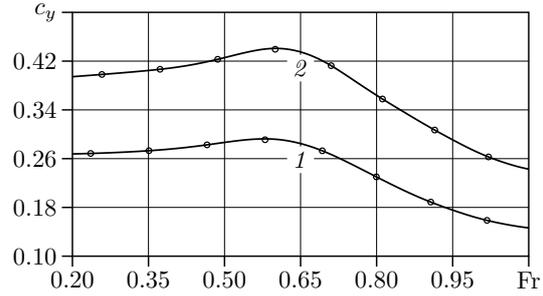


Рис. 3. Зависимость $c_y(\text{Fr})$ при $\text{Fr}_1^* < \text{Fr} < \text{Fr}_2^*$. Параметры и обозначения рис. 2. Маркерами отмечены результаты расчетов для однослойной жидкости ($\rho_1 = \rho_2$)

$$L_{33}(\zeta_3, \tau_3) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\chi_3(\zeta_3, \tau_3) + G_3(\zeta_3, \tau_3) \right],$$

$$W_{1\infty}^*(\zeta) = -(K\zeta + \bar{K}/\zeta) + f(\zeta),$$

$$W_{2\infty}^*(\zeta) = W_{2\infty 1}^*(\zeta) + W_{2\infty 2}^*(\zeta),$$

$$W_{2\infty 1}^*(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \ln(\zeta - \zeta_\gamma),$$

$$W_{2\infty 2}^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \ln(\zeta - 1/\bar{\zeta}_\gamma),$$

$$K = f'_\zeta(\infty), \quad \zeta_\gamma = f^{-1}(z_\gamma),$$

z_γ — точка, лежащая в области $y < h_3$, $T_k = \{\zeta \mid \zeta = f^{-1}(x + ih_k)\}$ — образы невозмущенных границ раздела сред в параметрической плоскости ζ . Комплексный потенциал циркуляционного обтекания профиля безграничным потоком $W_{2\infty}(z) = W_{2\infty}[f(\zeta)] = W_{2\infty}^*(\zeta)$ удовлетворяет условиям (1.3), (1.8), (1.9), этим же условиям удовлетворяет и вся сумма (2.1) ($s = 2$).

Значение циркуляции γ находится из постулата Жуковского–Чаплыгина о конечности скорости на острой кромке профиля [2]

$$\gamma = \frac{2\pi \text{Im}(-K + \bar{K}/\zeta_B^2) + \text{Re} \sum_{k=1}^3 J_{1k}(\zeta_B)}{\text{Re} \left(\frac{1}{\zeta_B - 1/\bar{\zeta}_\gamma} - \frac{1}{\zeta_B - \zeta_\gamma} - \sum_{k=1}^3 J_{2k}(\zeta_B) \right)},$$

где

$$J_{sk}(\zeta_B) = \int_{T_k} \left[\frac{1}{(\zeta_B - \tau)^2} + \frac{1}{\bar{\tau}^2 (\zeta_B - 1/\bar{\tau})^2} \right] \mu_{sk}(\tau) d\tau.$$

3. Результаты расчетов

Для решения полученных систем линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода (2.6) ($s = 1$) применяется метод последовательных приближений [3]. В качестве нулевого приближения выбирается решение уравнения (2.6) ($s = 1; k = 2$) при $\mu_{11} \equiv 0$ и $\mu_{13} \equiv 0$, которое дает решение задачи обтекания профиля под границей раздела слоев жидкости разной плотности. Полученное значение μ_{12} подставляется в уравнение (2.6) ($s = 1; k = 1$), которое при $\mu_{13} \equiv 0$ решается относительно μ_{11} . Значение μ_{13} определяется из (2.6) ($s = 1; k = 3$) при найденных μ_{11} и μ_{12} . Определенные на данном шаге μ_{11} и μ_{13} вновь подставляются в (2.6) ($s = 1; k = 2$). Итерационный процесс выполняется до достижения заданного порядка точности. Аналогичным образом решается система (2.6) ($s = 2$).

По найденным значениям плотностей определяется комплексный потенциал возмущенного течения (1.7) и по формуле Чаплыгина [2] вычисляется волновое сопротивление X и подъемная сила Y профиля C

$$X - iY = \frac{i\rho_2 U_2^2}{2} \oint_{C_\zeta} \frac{1}{f'(\zeta)} \left[\frac{dW_2(\zeta)}{d\zeta} \right]^2 d\zeta - i\rho_2 U_2^2 \gamma.$$

Коэффициент давления определяется формулой

$$c_p = 1 - \left| \frac{1}{f'(\zeta)} \frac{dW_2(\zeta)}{d\zeta} \right|^2.$$

Для расчета гидродинамических характеристик потока разработана программа, тестирование которой проведено на известных

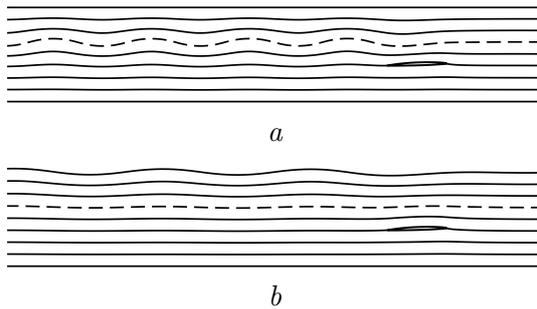


Рис. 4. Линии тока при $\alpha = 2^\circ$, $h_1/L = 0,97$, $h_2/L = 0,37$, $h_3/L = -0,63$, $Fr = \{0,062; 0,63\}$ (варианты *a*, *b*). Штриховой кривой изображена граница раздела жидкостей

решениях задач обтекания тел разных форм весомой жидкостью с различным количеством границ раздела [3–5].

Результаты расчетов, выполненных для профиля *NACA 66mod* в случае одинаковых скоростей слоев $U = U_1 = U_2$ и отношения плотностей $\rho_1/\rho_2 = 0,97$, представлены на рис. 2–5. Конформное отображение внешности круга на внешность профиля осуществлялось методом, представленным в [6].

В задачах о течении двухслойной жидкости со свободной поверхностью и не ограниченной снизу на границах раздела существует два типа волн [7]. Аналогичный факт имеет место и при наличии дна. Волны первого типа при малой разнице плотностей жидкостей получают значительное развитие на границе раздела жидкостей и появляются только при числах Фруда $Fr < Fr_1^*$, где $Fr = U/\sqrt{gL}$, а $Fr_1^* = Fr_1^*(\rho_1/\rho_2, H_1/L, H_2/L)$ — критическое значение числа Фруда. Волны второго типа, как и для не ограниченного снизу потока, дают значительные амплитуды на свободной поверхности. Однако для канала они имеют место только при числах Фруда, меньших второго критического значения $Fr_2^* = Fr_2^*(\rho_1/\rho_2, H_1/L, H_2/L)$. При малой разнице плотностей жидкостей Fr_2^* близко к известному результату для однородного потока $Fr = \sqrt{H/L}$, где $H = H_1 + H_2$. Заметим, что проведение расчетов вблизи критических чисел Фруда с достаточной точностью требует большого количества времени, поэтому результаты расчетов приведены с некоторым отступлением от Fr_1^* и Fr_2^* .

На рис. 2, 3 приведены результаты исследования влияния угла атаки профиля α на коэффициент подъемной силы $c_y = 2Y/(\rho_2 U_2^2 L)$ при неизменной геометрии

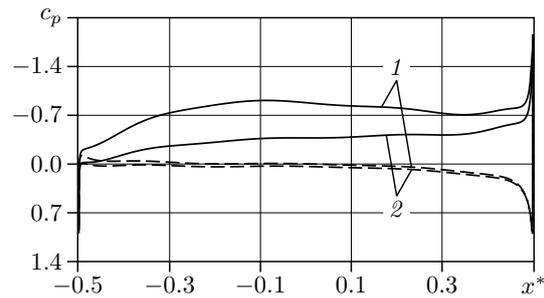


Рис. 5. Распределение давления по профилю. Кривые 1 соответствуют параметрам рис. 4*a*, кривые 2 — рис. 4*b*. Сплошные кривые отвечают верхней поверхности профиля, штриховые — нижней

канала — $h_1/L = 1$, $h_2/L = 0,5$, $h_3/L = -0,7$. Углам атаки $\alpha = \{1^\circ, 2^\circ\}$ соответствуют кривые 1, 2. При увеличении α наблюдается увеличение c_y для всех рассматриваемых чисел Фруда. Штриховыми кривыми на рис. 2 и маркерами на рис. 3 представлены характеристики для задачи обтекания профиля однородным потоком ($\rho_1 = \rho_2$), ограниченным свободной поверхностью и твердым дном. Как видно из рис. 3, при $Fr_1^* < Fr < Fr_2^*$, когда имеет место только поверхностная волна, влияние границы раздела жидкостей становится незначительным.

На рис. 4 продемонстрированы примеры расчета линий тока течения и границ раздела жидкостей при $\alpha = 2^\circ$, $h_1/L = 0,97$, $h_2/L = 0,37$, $h_3/L = -0,63$, $Fr = \{0,062; 0,63\}$. На рис. 4*a* при $Fr < Fr_1^*$ отчетливо видна волна на границе раздела сред, свободная поверхность при этом остается фактически не возмущенной — явление «мертвой воды». На рис. 4*b* при $Fr_1^* < Fr < Fr_2^*$ наблюдаются волна на свободной поверхности и ее отсутствие на границе раздела жидкостей. При $Fr > Fr_2^*$, как показывают расчеты, периодические волны на границах не образуются.

На рис. 5 приведено распределение коэффициента давления c_p по профилю в зависимости от расстояния x^* , отсчитываемого по хорде профиля от ее центра. Кривые 1 соответствуют параметрам обтекания рис. 4*a*, кривые 2 — рис. 4*b*. Сплошные кривые отвечают верхней поверхности профиля, штриховые — нижней.

Литература

1. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 656 с.

2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
3. *Филиппов С. И.* Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела. Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 2004. 200 с.
4. *Лотфуллин М. В., Стурова И. В., Филиппов С. И.* Гидродинамическое воздействие на контур, обтекаемый равномерным потоком двухслойной жидкости // Вычислительные технологии. Новосибирск, 1994. Т. 3. № 8. С. 108–115.
5. *Стурова И. В.* Плоская задача об обтекании кругового цилиндра равномерным потоком двухслойной жидкости конечной глубины // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 6. С. 91–101.
6. *Лотфуллин М. В.* Численный метод конформного отображения односвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985. Вып. 22. С. 148–150.
7. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.

Ключевые слова: крыловой профиль, двухслойная жидкость, гравитационные волны, открытый канал, ограниченный канал

Статья поступила 17 февраля 2010 г.

НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева, Казанский государственный университет, г. Казань

© Кириллин К. В., Филиппов С. И., 2010