УДК 539.375:534.1

УЧЕТ СВЯЗАННОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД[1]

***Пряхина О. Д.*[2], *Смирнова А. В.*[3], *Самойлов М. В.*[4], *Маслов Р. Г.*[5]**

THE PHYSICAL FIELDS COHERENCE ACCOUNT IN DYNAMIC PROBLEMS FOR MULTILAYERED MEDIUMS

Pryakhina O. D., Smirnova A. V., Samoylov M. V., Maslov R. G.

The effective method of the construction of matrix-symbols of integral equations kernels in dynamic problems of thermoelectroelastics for multilayered mediums, in the presence of non-homogeneities of various types, is stated.

Keywords: coherent physical fields, integral equations, dynamic problems

Использование во многих отраслях науки и техники устройств, функционирующих на основе взаимодействия физических полей (механических, температурных, электрических), а также развитие новых технологий производства искусственных материалов, обладающих хорошо выраженными пьезоэлектрическими или пироэлектрическими свойствами, обуславливают актуальность исследований, посвященных изучению закономерностей проявления эффектов связанности физических полей в деформируемых средах. К числу важных проблем, возникающих при проектировании преобразователей различного типа, относятся определение волноводных свойств материалов и конструкций, а также обеспечение их механической и электрической прочности. Важной составной частью в решении этих проблем является сведение дифференциальных уравнений с частными производными термоэлектроупругости со смешанными граничными условиями к системам интегральных уравнений (СИУ), которые строятся на основе функционально-матричных соотношений между расширенными векторами перемещений и напряжений. В работе предлагается универсальный метод построения указанных соотношений для слоистых термоэлектроупругих сред, позволяющий учитывать наличие внутренних неоднородностей (дефектов) различного типа при произвольном их количестве и сочетании.

Постановка задачи. Рассмотрим гармонические с частотой ω колебания пакета N термоэлектроупругих слоев

$$\left(-2\sum_{k=1}^{N} h_k = -H \leqslant x_3 \leqslant 0, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty \right),$$

нижняя грань которого жестко сцеплена с недеформируемым основанием, поддерживается при постоянной температуре, металлизирована и закорочена. Поверхность среды в области Ω_0 подвергается механическому, тепловому и электрическому воздействию, характеристики которого

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00144, 09-01-96501, 09-01-96502), Рособразования (проект 1.7.08), гранта Президента РФ (НШ-3765.2010.1).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующая кафедрой высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: donna@kubsu.ru

[3]Смирнова Алла Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.; e-mail: vtppchs@kubsu.ru

[4]Самойлов Максим Викторович, аспирант кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: yt-56@mail.ru

[5]Маслов Роман Геннадиевич, аспирант кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: roma-maslov@yandex.ru

могут быть заданными, либо определяться из решения контактной задачи. На границах смены физико-механических свойств слоев имеются дефекты разных типов — включения, занимающие области Ω_{kp}, и трещины, плоской в плане формы $\tilde{\Omega}_{km}$, $p = 1, 2, \ldots, P_k$, $m = 1, 2, \ldots, M_k$; P_k и M_k — количество включений и трещин соответственно, расположенных в одной плоскости $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$. В областях Ω_{kp} задаются векторы перемещений, потенциал электрического поля и температура (прирост температуры от естественного состояния), равные на верхней и нижней границах включения. В областях $\tilde{\Omega}_{km}$ задаются механические напряжения, нормальные составляющие векторов электрической индукции и теплового потока, которые принимаются равными на обоих берегах трещины. Среди множеств Ω_{kp}, $\tilde{\Omega}_{km}$ могут быть и пустые. Везде далее рассматриваются амплитудные значения заданных и искомых функций без учета временного множителя $e^{-i\omega t}$.

Физико-механические свойства среды описываются компонентами тензоров упругих постоянных $c_{ijkl}^{E,\theta}$, пьезомодулей e_{kij}^{θ}, диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_{ij}^{s,\theta}$, коэффициентов теплопроводности k_{ij}, а также температурными коэффициентами механических напряжений λ_{ij}^{E}, пироэлектрическими коэффициентами p_i^s и плотностью материала ρ. Верхние индексы E, θ, s указывают, что соответствующие величины измерены при постоянном электрическом и температурном поле, а также при постоянном уровне деформаций; в дальнейшем индексы опущены. Система уравнений термоэлектроупругости при отсутствии объемных сил и внутренних источников тепла представима в форме

$$
\begin{gathered}
c_{ijkl}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_l \partial x_j} + e_{kij}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} + \rho\omega^2 w_i - \lambda_{ij}\frac{\partial \theta}{\partial x_j} = 0, \\
e_{ikl}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_l \partial x_i} - \varepsilon_{ik}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} + p_i\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0, \qquad (1) \\
k_{ij}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + i\omega T_0\left(\lambda_{ij}\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - p_i\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \alpha_*\theta\right) = 0, \\
i, j, k, l = 1, 2, 3.
\end{gathered}
$$

Здесь $w_i(x_1, x_2, x_3)$ — компоненты вектора перемещений, $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ — электрический потенциал, $\theta(x_1, x_2, x_3)$ — относительная температура точек среды с координатами (x_1, x_2, x_3). Причем, $\theta = T - T_0$, T и T_0 — абсолютная и начальная температура, α_* — коэффициент, который определяется термическими и физическими характеристиками среды.

Для компактной записи граничных условий введем в рассмотрение расширенный вектор напряжений, компонентами которого являются горизонтальные (t_1, t_2) и вертикальная (t_3) компоненты вектора механических усилий, нормальные составляющие вектора электрической индукции (t_4) и вектора теплового потока (t_5). Примем следующие обозначения для расширенного вектора напряжений:

– в произвольной точке среды

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}(x, y, z) = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, d_3, g_3\} = \\
= \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\},
\end{aligned}
$$

– на верхней грани

$$
\mathbf{t}_0(x, y) = \mathbf{t}|_{z=0} = \{t_{10}, t_{20}, t_{30}, t_{40}, t_{50}\},
$$

– в плоскостях раздела слоев $z = \tilde{z}_k = -2\sum\limits_{n=1}^{k} h_n$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}_k^+(x, y) = \mathbf{t}|_{z=\tilde{z}_k+0} = \\
= \left\{(t_1)_k^+, (t_2)_k^+, (t_3)_k^+, (t_4)_k^+, (t_5)_k^+\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}_k^-(x, y) = \mathbf{t}|_{z=\tilde{z}_k-0} = \\
= \left\{(t_1)_k^-, (t_2)_k^-, (t_3)_k^-, (t_4)_k^-, (t_5)_k^-\right\}.
\end{aligned}
$$

Аналогично компонентами расширенного вектора перемещений примем горизонтальные (w_1, w_2) и вертикальную (w_3) составляющие вектора механических перемещений, а также потенциал электрического поля (w_4) и температуру (w_5):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}(x, y, z) = \{w_1, w_2, w_3, \varphi, \theta\} = \\
= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\},
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{w}_0(x, y) = \mathbf{w}|_{z=0} = \{w_{10}, w_{20}, w_{30}, w_{40}, w_{50}\},
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}|_{z=\tilde{z}_k+0} = \\
= \left\{(w_1)_k^+, (w_2)_k^+, (w_3)_k^+, (w_4)_k^+, (w_5)_k^+\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_k^- = \mathbf{w}|_{z=\tilde{z}_k-0} = \\
= \left\{(w_1)_k^-, (w_2)_k^-, (w_3)_k^-, (w_4)_k^-, (w_5)_k^-\right\}.
\end{aligned}
$$

В этих обозначениях смешанные граничные условия на поверхности среды и на границах раздела слоев примут вид

$$\begin{cases}\mathbf{w}\,(x,y,z)\,|_{z=0}=\mathbf{w}_0\,(x,y)\,,\ (x,y)\in\Omega_0,\\ \mathbf{t}_0\,(x,y)=0,\ (x,y)\notin\Omega_0,\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{gathered}\begin{cases}\mathbf{w}=\mathbf{w}^0_{kp},\ (x,y)\in\Omega_{kp},\\ \Delta\mathbf{t}_{kp}=0,\ (x,y)\notin\Omega_{kp},\end{cases}\\ \begin{cases}\mathbf{t}=\mathbf{t}^0_{km},\ (x,y)\in\tilde\Omega_{km},\\ \Delta\mathbf{w}_{km}=0,\ (x,y)\notin\tilde\Omega_{km},\end{cases}\end{gathered}\tag{3}$$

условия на нижней грани пакета слоёв

$$\mathbf{w}\,(x,y,-H)=0,\quad -\infty<x,y<+\infty.\tag{4}$$

Здесь $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}^0_{kp}=\mathbf{w}^+_{kp}=\mathbf{w}^-_{kp}$, $\mathbf{t}^0_{km}=\mathbf{t}^+_{km}=\mathbf{t}^-_{km}$ — векторы, заданные соответственно в Ω_0, Ω_{kp} и $\tilde\Omega_{km}$; $\Delta\mathbf{t}_{kp}$ — скачок расширенного вектора напряжений при переходе через включение, $\Delta\mathbf{w}_{km}$ — скачок расширенного вектора перемещений на берегах трещины, $p=1,2,\ldots,P_k$, $m=1,2,\ldots,M_k$, $k=1,2,\ldots,N-1$.

$$\Delta\mathbf{t}_{kp}\,(x,y)=\begin{cases}\mathbf{t}^+_{kp}-\mathbf{t}^-_{kp}, & (x,y)\in\Omega_{kp},\\ 0, & (x,y)\notin\Omega_{kp},\end{cases}$$

$$\Delta\mathbf{w}_{km}\,(x,y)=\begin{cases}\mathbf{w}^+_{km}-\mathbf{w}^-_{km}, & (x,y)\in\tilde\Omega_{km},\\ 0, & (x,y)\notin\tilde\Omega_{km}.\end{cases}$$

Дифференциальные уравнения движения (1) с граничными условиями (2)–(4) приводятся к системе интегральных уравнений первого рода относительно расширенного вектора контактных напряжений $\mathbf{t}_0$, имеющего носитель Ω_0, скачков $\Delta\mathbf{t}_{kp}$, $\Delta\mathbf{w}_{km}$ расширенных векторов напряжений и перемещений на границах включений и трещин с носителями Ω_{kp}, $\tilde\Omega_{km}$. Для построения СИУ на первом этапе методом интегральных преобразований решаются вспомогательные краевые задачи с граничными условиями, получающимися из смешанных путем допущения, что указанные векторы известны в областях своего определения. В силу линейности дифференциальных операторов, формирующих уравнения движения и краевые условия задачи, ее решение представимо в виде суперпозиции решений вспомогательных задач о колебаниях многослойной термоэлектроупругой среды, источником которых являются: поверхностный объект (*задача 1*), совокупность включений (*задача 2*) или трещин (*задача 3*).

Функционально-матричные соотношения, вытекающие из решения этих задач, связывающие в трансформантах Фурье расширенные векторы напряжений и перемещений произвольной точки среды с заданными поверхностными усилиями и скачками векторов напряжений, перемещений определяют блочную матрицу-символ Грина краевой задачи.

Построение функционально-матричных соотношений. Введем локальную систему координат для каждого слоя

$$x_k=x,\quad y_k=y,\quad z_k=z+2\sum_{m=1}^{k-1}h_m+h_k,$$

$$-h_k\leqslant z_k\leqslant h_k,\quad k=1,2,\ldots,N.$$

При решении вспомогательных задач к уравнениям движения (1) и граничным условиям, описывающим расширенные векторы перемещения $\mathbf{w}_k\,(x,y,z_k)$ и напряжения $\mathbf{t}_k\,(x,y,z_k)$, применяется интегральное преобразование Фурье по пространственным координатам x, y с параметрами α, β

$$\mathbf{F}\,(\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f}\,(x,y)\,e^{i(\alpha x+\beta y)}\,dx\,dy,$$

$$\mathbf{f}\,(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{F}\,(\alpha,\beta)\,e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,d\alpha\,d\beta.$$

Задача 1. Колебания пакета термоэлектроупругих слоев при заданных на его поверхности векторе механической нагрузки и нормальных составляющих векторов электрической индукции и теплового потока.

Граничные условия задачи 1 в преобразованиях Фурье имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{T}_1\,(\alpha,\beta,h_1)=\mathbf{T}_0\,(\alpha,\beta)\,,\\ \mathbf{W}_k\,(\alpha,\beta,-h_k)=\mathbf{W}_{k+1}\,(\alpha,\beta,h_{k+1})\,,\\ \mathbf{T}_k\,(\alpha,\beta,-h_k)=\mathbf{T}_{k+1}\,(\alpha,\beta,h_{k+1})\,,\\ k=1,2,\ldots,N-1;\\ \mathbf{W}_N\,(\alpha,\beta,-h_N)=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Метод построения функционально-матричных соотношений с учетом непрерывности расширенных векторов напряжений и перемещений на границах раздела слоев (5), основанный на использовании специального решения для одного слоя, дается в [1]. Приведем вид указанных соотношений в плоскостях раздела слоев $z_k = h_k$

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{R}_k \mathbf{T}_0, \tag{6}$$

$$\mathbf{W}_k\left(h_k\right) = \mathbf{K}_{N-(k-1)}\left(h_k\right) \mathbf{R}_{(k-1)} \mathbf{T}_0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$ — единичная матрица, а матрицы размерности 5×5

$$\mathbf{R}_k = (-1)^k \prod_{i=k}^{1} \mathbf{F}^{-1}_{N+1-i}\left(h_i\right) \mathbf{B}_+\left(-h_i\right),$$

$$\mathbf{F}_{k+1}\left(h_{N-k}\right) = \mathbf{F}_{k+1}\left(h_{N-k}, h_{N-k+1}, \ldots, h_N\right),$$

$$\mathbf{K}_{N-k+1}\left(h_k\right) = \mathbf{K}_{N-k+1}\left(h_k, h_{k+1}, \ldots, h_N\right)$$

имеют элементы, зависящие от параметров преобразования Фурье, частоты колебаний, а также от геометрических, механических и электрических параметров материала слоев, полутолщины которых указаны в аргументе. Структура и элементы матриц $\mathbf{B}_\pm\left(z_k\right)$ и рекуррентные формулы для вычисления входящих в (6) матриц-функций $\mathbf{F}_{k+1}\left(h_{N-k}\right)$ и $\mathbf{K}_{N-k+1}\left(h_k\right)$ для различных типов сред даны в [1–3]. Все векторные величины здесь и далее записаны в преобразованиях Фурье и в локальных системах координат.

Для представления функционально-матричных соотношений, соответствующих *задачам 2* и *3* в форме, удобной для проведения дальнейшего анализа и допускающей простую интерпретацию результатов, введем специальные матрицы, характеризующие положение дефектов в среде. Для трещины, расположенной в плоскости $z = -2\sum\limits_{k=1}^{p} h_k$, вводится матрица

$$\mathbf{S}_{Np} = \mathbf{K}^-_p\left(h_1, h_2, \ldots, h_p\right) - \\ - \mathbf{K}_{N-p}\left(h_{p+1}, h_{p+2}, \ldots, h_N\right),$$

для включения в той же плоскости — матрица

$$\mathbf{G}_{Np} = \left[\mathbf{K}^-_p\left(h_1, h_2, \ldots, h_p\right)\right]^{-1} - \\ - \left[\mathbf{K}_{N-p}\left(h_{p+1}, h_{p+2}, \ldots, h_N\right)\right]^{-1}.$$

Здесь $\mathbf{K}^-_p$ — матрица Грина пакета p слоев со свободной верхней гранью, $\mathbf{K}_{N-p}$ — матрица Грина пакета $(N-p)$ слоев на жестком основании.

Задача 2. Колебания пакета термоэлектроупругих слоев, содержащего совокупность включений, расположенных в каждой плоскости раздела слоев.

Предположим, что поверхность среды является свободной от механических усилий, непроводящей и теплоизолированной. На нижней грани пакета слоёв по-прежнему выполняются условия жёсткой заделки, металлизации и теплоизоляции.

В этом случае имеют место следующие граничные условия, записанные в преобразованиях Фурье:

$$\mathbf{T}_0 = 0,$$

$$\mathbf{T}^+_k = \mathbf{T}^-_k + \Delta\mathbf{T}_k, \quad \mathbf{W}^+_k = \mathbf{W}^-_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$\mathbf{W}_N\left(\alpha, \beta, -h_N\right) = 0.$$

При этом

$$\Delta\mathrm{T}_k = \sum_{p=1}^{P_k} \Delta\mathbf{T}_{kp}.$$

Предварительно рассмотрим случай, когда колебания среды обусловлены вибрацией границ только одного включения, расположенного в плоскости $z_p = -h_p$. Тогда на границах раздела слоёв $z_k = -h_k$, $k \neq p$ имеют место непрерывные условия для расширенных векторов перемещений и напряжений. В плоскости расположения включения расширенные векторы перемещения непрерывны, а напряжения — терпят разрыв.

Произведем формальное разделение слоев в плоскости $z_p = -h_p$, соответствующей границе раздела p-го и $(p+1)$-го слоев, и воспользуемся построенным решением *задачи 1*.

Очевидно

$$\mathbf{W}_p\left(-h_p\right) = \mathbf{K}^-_p\left(h_1, h_2, \ldots, h_p\right) \mathbf{T}^+_p, \tag{7}$$

$$\mathbf{W}_{p+1}\left(h_{p+1}\right) = \\ = \mathbf{K}_{N-p}\left(h_{p+1}, h_{p+2}, \ldots, h_N\right) \mathbf{T}^-_p. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{K}^-_p$ — матрица Грина пакета p слоев со свободной верхней гранью, $\mathbf{K}_{N-p}$ — матрица Грина пакета $(N-p)$ слоев на жестком основании. Рекуррентные формулы для определения матриц $\mathbf{K}^-_p$ и $\mathbf{K}_{N-p}$ приведены в [2,4]. Заметим, что элементы матрицы $\mathbf{K}^-_p$ зависят только от параметров слоев, расположенных выше включения, а матрицы $\mathbf{K}_{N-p}$ — только от параметров слоев, расположенных ниже включения. Запишем в преобразованиях Фурье граничные условия в плоскости расположения дефекта

$$\begin{gathered}\mathbf{W}_p\left(-h_p\right)=\mathbf{W}_{p+1}\left(h_{p+1}\right),\\ \mathbf{T}_p^{+}=\mathbf{T}_p^{-}+\Delta\mathbf{T}_p.\end{gathered}\tag{9}$$

Выражения, связывающие значения расширенных векторов напряжений и перемещений на границах включений со скачком напряжений, получим из (7), (8) с учетом (9)

$$\mathbf{T}_p^{+}=-\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{K}_{N-p}\Delta\mathbf{T}_p,\quad \mathbf{T}_p^{-}=-\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{K}_p^{-}\Delta\mathbf{T}_p,$$

$$\mathbf{W}_{p+1}\left(h_{p+1}\right)=\mathbf{G}_{Np}^{-1}\Delta\mathbf{T}_p.$$

Тогда значения расширенных векторов напряжений и перемещений на остальных границах раздела слоев будут определяться соотношениями

$$\mathbf{T}_k=-\mathbf{R}_{kp}^{-}\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{K}_{N-p}\Delta\mathbf{T}_p,\quad k<p,$$

$$\mathbf{T}_p^{+}=-\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{K}_{N-p}\Delta\mathbf{T}_p,$$

$$\mathbf{T}_p^{-}=-\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{K}_p^{-}\Delta\mathbf{T}_p,\quad k=p,$$

$$\mathbf{T}_k=-\mathbf{R}_{kp}\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{K}_p^{-}\Delta\mathbf{T}_p,\quad k>p;$$

$$\mathbf{W}_1\left(h_1\right)=-\mathbf{B}_{-}\left(h_1\right)\mathbf{R}_{1p}^{-}\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{K}_{N-p}\Delta\mathbf{T}_p,$$

$$\mathbf{W}_k\left(h_k\right)=-\mathbf{K}_{(k-1)}^{-}\mathbf{R}_{(k-1)p}^{-}\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{K}_{N-p}\Delta\mathbf{T}_p,$$
$$2\leqslant k<p+1,$$

$$\mathbf{W}_{p+1}\left(h_{p+1}\right)=\mathbf{G}_{Np}^{-1}\Delta\mathbf{T}_p,\quad k=p+1,$$

$$\mathbf{W}_k\left(h_k\right)=-\mathbf{K}_{N-k+1}\left(h_k\right)\mathbf{R}_{(k-1)p}\mathbf{S}_{Np}^{-1}\mathbf{K}_p^{-}\Delta\mathbf{T}_p,$$
$$p+1<k\leqslant N-1.$$

Здесь матрицы $\mathbf{R}_{km}$ и $\mathbf{R}_{km}^{-}$ даются формулами

$$\mathbf{R}_{km}=(-1)^{(k-m)}\prod_{i=k}^{m+1}\mathbf{F}_{N+1-i}^{-1}\left(h_i\right)\mathbf{B}_{+}\left(-h_i\right),$$

$$\mathbf{R}_{km}^{-}=\prod_{i=k+1}^{m}\mathbf{\Phi}_i^{-1}\left(h_1,h_2,\ldots,h_i\right)\mathbf{B}_{-}\left(h_i\right).$$

Рекуррентная процедура вычисления матриц

$$\mathbf{K}_m^{-}\left(h_1,h_2,\ldots,h_m\right),$$
$$\mathbf{K}_{N-m}\left(h_{m+1},h_{m+2},\ldots,h_N\right),$$
$$\mathbf{\Phi}_m\left(h_1,h_2,\ldots,h_m\right),$$
$$\mathbf{F}_{N-m}\left(h_{m+1},h_{m+2},\ldots,h_N\right)$$

приведена в [2,4]. Вспомогательные матрицы $\mathbf{B}_{\pm}$ даются в [1].

Взяв суперпозицию решений вспомогательной задачи для всех $p=1,2,\ldots,N-1$, запишем выражения для расширенных векторов напряжений и перемещений на границах раздела слоев в следующей форме:

$$\mathbf{T}=\mathbf{L}\Delta\mathbf{T},\quad \mathbf{U}=\mathbf{V}\Delta\mathbf{T},\tag{10}$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{T}=\left\{\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\ldots\mathbf{T}_{N-1}\right\},\\ \mathbf{U}=\left\{\mathbf{W}_2\left(h_2\right),\mathbf{W}_3\left(h_3\right),\ldots,\mathbf{W}_N\left(h_N\right)\right\}\\ \Delta\mathbf{T}=\left\{\Delta\mathbf{T}_1,\Delta\mathbf{T}_2,\ldots,\Delta\mathbf{T}_{N-1}\right\}\end{gathered}$$

— многомерные векторы, $\mathbf{L}=\|\mathbf{L}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}$, $\mathbf{V}=\|\mathbf{V}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}$ — блочные матрицы, элементы-матрицы которых вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_{ij}=\begin{cases}-\mathbf{S}_{Ni}^{-1}\mathbf{K}_{N-i}, & i=j\\ -\mathbf{R}_{ij}^{-}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}\mathbf{K}_{N-j}, & i<j\\ -\mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}\mathbf{K}_j^{-}, & i>j;\end{cases}\\ \mathbf{V}_{ij}=\begin{cases}\mathbf{G}_{Ni}^{-1}, & i=j\\ -\mathbf{K}_i^{-}\mathbf{R}_{ij}^{-}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}\mathbf{K}_{N-j}, & i<j\\ -\mathbf{K}_{N-i}\mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}\mathbf{K}_j^{-}, & i>j.\end{cases}\end{gathered}\tag{11}$$

В качестве компонент вектора $\mathbf{T}$ в (10) приняты расширенные векторы напряжений $\mathbf{T}_k^{+}$ и знак «+» в верхнем индексе опущен.

Матрицы $\mathbf{L}_{ij}$, $\mathbf{V}_{ij}$ определяют соответственно значения расширенных векторов напряжения и перемещения в плоскости $z_i=-h_i$, вызванных скачками механических напряжений и нормальных составляющих векторов электрической индукции и теплового потока на включении, расположенном в плоскости $z_j=-h_j$. Приведем дополнительно соотношения для определения расширенных векторов перемещений точек поверхности среды и напряжений на нижней грани пакета

$$\mathbf{W}_1\left(h_1\right)=-\mathbf{B}_{-}\left(h_1\right)\sum_{k=1}^{N-1}\mathbf{R}_{1k}^{-}\mathbf{S}_{Nk}^{-1}\mathbf{K}_{N-k}\Delta\mathbf{T}_k,$$

$$\mathbf{T}_N=-\sum_{k=1}^{N-1}\mathbf{R}_{Nk}\mathbf{S}_{Nk}^{-1}\mathbf{K}_k^{-}\Delta\mathrm{T}_k.$$

Введя многомерные векторы

$$\mathbf{W}=\left\{\mathbf{W}_1\left(h_1\right),\mathbf{W}_2\left(h_2\right),\ldots,\mathbf{W}_N\left(h_N\right)\right\},$$

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{T}_0, \Delta\mathbf{T}_1, \Delta\mathrm{T}_2, \ldots, \Delta\mathbf{T}_{N-1}\},$$

и используя суперпозицию решений *задач 1* и *2*, получим функционально-матричные соотношения задачи о колебании термоэлектоупругой среды при наличии жесткого штампа на ее поверхности и системы внутренних включений. В частности, на поверхности среды и в плоскостях расположения включений выполняется равенство

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{W}, \tag{12}$$

применение к которому процедуры обращения преобразования Фурье дает систему интегральных уравнений относительно компонент вектора $\mathbf{Q}$, имеющих носитель в областях $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{N-1}$ соответственно [3, 5]. Заметим, что матрица-символ ядра СИУ $\mathbf{K}$ в (12) является блочной, ее размерность равна $\left(1 + \sum\limits_{k=1}^{N-1} P_k\right)$.

Элементами $\mathbf{K} = \|\mathbf{K}_{km}\|_{k,m=1}^{N}$ являются матрицы-функции размерности 5×5

$$\mathbf{K}_{k1} = \mathbf{K}_{N-(k-1)}(h_k)\,\mathbf{R}_{(k-1)}, \tag{13}$$

$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\mathbf{K}_{1m} = -\mathbf{B}_-(h_1)\,\mathbf{R}^-_{1(m-1)}\mathbf{S}^{-1}_{N(m-1)}\mathbf{K}_{N-m+1},$$

$$m = 2, 3, \ldots, N,$$

$$\mathbf{K}_{km} = \mathbf{V}_{(k-1)(m-1)}, \quad k, m = 2, 3, \ldots, N.$$

Задача 3. Колебания пакета термоэлектроупругих слоев, в каждой плоскости раздела которых имеется совокупность трещин.

Запишем граничные условия задачи в предположении, что непроводящая и теплоизолированная поверхность среды свободна от механических усилий. Условия на нижней грани соответствуют исходной задаче.

$$\mathbf{T}_0 = 0,$$

$$\mathbf{T}^+_k = \mathbf{T}^-_k, \quad \mathbf{W}^+_k = \mathbf{W}^-_k + \Delta\mathbf{W}_k,$$

$$k = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$\mathbf{W}_N(\alpha, \beta, -h_N) = 0.$$

В этом случае функционально-матричные соотношения строятся в порядке, описанном в *задаче 2*, и имеют вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\Delta\mathbf{W}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{M}\Delta\mathbf{W},$$

$$\Delta\mathbf{W} = \{\Delta\mathbf{W}_1, \Delta\mathbf{W}_2, \ldots, \Delta\mathbf{W}_{N-1}\},$$

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{S}^{-1}_{Ni}, & i = j, \\ \mathbf{R}^-_{ij}\mathbf{S}^{-1}_{Nj}, & i < j, \\ \mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}^{-1}_{Nj}, & i > j; \end{cases} \tag{14}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}^-_i\mathbf{R}^-_{ij}\mathbf{S}^{-1}_{Nj}, & i < j \\ \mathbf{K}_{N-i}\mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}^{-1}_{Nj}, & i \geqslant j. \end{cases}$$

Взяв суперпозицию решений *задач 1–3*, приходим к функционально-матричным соотношениям исходной задачи. Полученные представления позволяют исследовать динамику различных моделей термоэлектроупругих сред и их частных случаев. Осуществив предельный переход в (6), (11) и (14) при $h_N \to \infty$ с предварительной заменой локальной системы координат $z_N = z^*_N + h_N$, получим матрицу-символ Грина и функционально-матричные соотношения для слоистого полупространства с неоднородностями. Если далее сделать замену $z_1 = z^*_1 - h_1$ и устремить толщину верхнего слоя к бесконечности, то будем иметь матрицу-символ Грина и функционально-матричные соотношения для слоистого пространства, содержащего систему неоднородностей.

Использование (6), (11) и (14) для построения матриц-символов ядер СИУ на примере ряда динамических задач рассматриваемого класса для упругих изотропных, термоупругих и электроупругих слоистых сред приведено в [8–11].

Литература

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
2. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Рекуррентная процедура вычисления элементов матрицы Грина многослойных сред // Вестник ЮНЦ РАН. Т. 4. №1. 2008. С. 3–7.
3. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К исследованию волноводных свойств пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // Изв. РАН. МТТ. 2009. №3. С. 55–65.
4. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. №2. С. 87–97.
5. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К исследованию динамики пакета упругих слоев с совокупностью жестких включений // ДАН. 2006. Т. 411. №3. С. 330–333.
6. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Свойства определителей символов ядер интеграль-

ных уравнений, соответствующих простейшим «вирусам» вибропрочности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. №4. С. 18–25.
7. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов вибропрочности» // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С. 44–53.
8. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Об одном подходе к исследованию динамических задач термоэлектроупругости для анизотропных сред с дефектами различной природы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. Спецвыпуск. 2006. С. 30–41.
9. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Динамические задачи для составных пьезоэлектриков с системой электродов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. №1. С. 59–65.
10. *Качко Д. Л., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Пьезоактивные волны сдвига в двухслойных электропроводящих средах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. №1. С. 44–53.
11. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Березин Н. С., Качко Д. Л.* К расчету динамических характеристик гексагональных пьезоэлектриков // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2009. №5. С. 30–33.

Ключевые слова: связанные физические поля, интегральные уравнения, динамические задачи

Статья поступила 2 марта 2010 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар