УДК 532.517.2:534.2

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ПОЛЗУЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Снигерев Б. А.[1]

NONISOTHERMAL CREEPING FLOW OF VISCOELASTIC FLUID WITH FREE SURFACE

Snigerev B. A.

This work researches simulation of viscoelastic fluid creeping flow with free surface, which is realized at entrance and of polymeric fluid to the extrusion channel and it's exit from the channel. The flow of fluid is described by equations of mass conservation, momentum and energy, supplemented with rheological constitutive equation of Giesekus. The ratio of polymeric fluid extrusion effect in dependence of rheological model parameters, temperature factors, nozzle form are received.

Keywords: viscoelastic fluid, free surface, axisymmetric flow, heat transfer

В последние годы в промышленной переработке полимеров большое внимание уделяется интенсификации существующих процессов и производств, при этом все больше внимания уделяется качеству производимых изделий. Индустрия переработки полимерных материалов базируется на двух основных типах производств — литья под давлением и экструзии [1, 2]. Экспериментальные и теоретические исследования [1, 2] показывают, что характер течения полимерной жидкости в формующих элементах насадки (фильере) и в выходной струе определяется совокупностью факторов, которые можно разделить на две группы:

– гидродинамические и реологические факторы: расход массы в насадке, определяемый производительностью перерабатываемого оборудования; геометрические характеристики формующей насадки; физико-механические свойства полимерной жидкости (плотность, вязкость, реологические характеристики); массовые силы;

– теплофизические факторы: температурный режим экструзии (температура поступающей полимерной жидкости, температура и изоляционные качества стенок насадки и фильеры, температура окружающего воздуха) и теплофизические свойства полимерной жидкости.

В данной работе рассматривается вытекание вязкоупругой жидкости из цилиндрического ступенчатого канала, схема которого представлена на рис. 1, где h — радиус узкого канала выходной части насадки, $4h$ — радиус трубы на входе, $h_1 = 0,5h$ — длина закругленной части, L — длина выходной части насадки, координаты $(r,\ z,\ \varphi)$ составляют цилиндрическую систему координат. Рассматривается влияние длины выходной части насадки L на степень разбухания полимерной жидкости в процессе экструзии. Выбираются значения L, равные 0, $2h$, $4h$, $10h$. Анализируется влияние реологических параметров конститутивного соотношения Гиезекуса и условия неизотермичности потока на характер истечения из ступенчатого сужающегося канала.

Исходной является система уравнений законов сохранения массы, импульса, энергии, для замыкания которой привлекается определяющее конститутивное реологическое соотношение Гиезекуса [3, 4]

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad \tau_{ij} = \tau_{ij}^V + 2\beta D_{ij},$$

$$\tau_{ij}^V + \mathrm{We}\frac{\delta \tau_{ij}^V}{\delta t} + \frac{\alpha_G \mathrm{We}}{1-\beta}(\tau_{ij}^V)^2 = 2(1-\beta)D_{ij},$$

[1]Снигерев Борис Александрович, канд. техн. наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения Казанского научного центра РАН; e-mail: snigerev@mail.knc.ru

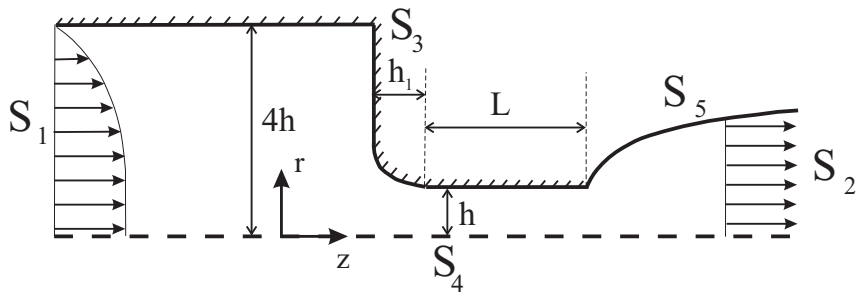

Рис. 1. Схема вытекания вязкоупругой жидкости из цилиндрического ступенчатого канала

$$\frac{\delta\tau_{ij}^V}{\delta t} = \frac{\partial\tau_{ij}^V}{\partial t} + v_k\frac{\partial\tau_{ij}^V}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\tau_{kj}^V - \tau_{ik}^V\frac{\partial v_k}{\partial x_j},$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\mathrm{Pe}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + v_j\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2\theta}{\partial^2 x_j} + \mathrm{Br}(\tau_{ij}D_{ji}).$$

Исходная система уравнений (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты U_0 — средняя скорость жидкости на входе, L — характерный размер, равный радиусу узкой части канала, давление и напряжения отнесены к значению $\eta U_0/L$. В системе уравнений (1) v_i — компоненты скорости жидкости, P — давление, τ_{ij} — девиатор напряжения, τ_{ij}^V — вязкоупругая часть напряжения, $\theta = (T-T_0)/(T_1-T_0)$ — безразмерная температура, T_1 — температура стенок канала, T_0 – температура жидкости на входе, $\beta = \eta_N/\eta$ — параметр ретардации, $\eta = \eta_N + \eta_V$; η_V, η_N — динамические вязкости при нулевой скорости сдвига полимера и растворителя соответственно. Определяющими являются безразмерные числа Re — Рейнольдса, Pe — Пекле, We — Вайссенберга, Br — Бринкмана, имеющие следующий вид

$$\mathrm{Re} = \varrho U_0 L/\eta, \quad \mathrm{Pe} = \varrho c_p U_0 L/k,$$

$$\mathrm{We} = \lambda U_0/L, \quad \mathrm{Br} = \eta U_0^2/k(T_1 - T_0).$$

Здесь c_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении, k — коэффициент теплопроводности жидкости, λ — время релаксации напряжений. Зависимость вязкости и времени релаксации от температуры описывается соотношениями Аррениуса [4, 5]

$$\eta(T) = \eta_0 a(T), \quad \lambda(T) = \lambda_0 a(T),$$

$$a(T) = \exp[A(1/T - 1/T_0)], \ A = E/R,$$

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_0\ a(T), \quad \mathrm{We} = \mathrm{We}_0\ a(T),$$
$$\mathrm{Br} = \mathrm{Br}_0\ a(T), \quad \beta = \beta_0 a(T),$$

где индекс 0 указывает, что значение параметра вычисляется при температуре T_0, E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная.

Граничные условия в безразмерной форме записываются в виде

$$S_1 : v_1 = v_1(x_2), \quad \tau_{ij}^V = \tau_{ij}^V(x_2), \quad \theta = 0;$$

$$S_2 : v_1 = \ 0, \partial v_2/\partial x_2 = 0, \quad \partial\theta/\partial x_2 = 0,$$
$$\partial\tau_{ij}^V/\partial x_1 = 0;$$

$$S_3 : v_i = 0, \quad \theta = 1;$$

$$S_4 : v_1 = 0, \quad \tau_{12} = 0, \quad \partial\theta/\partial x_2 = 0;$$

$$S_5 : dx_i/dt = v_i, \quad n_i\tau_{ij}n_j - \frac{1}{Ca}2K = 0,$$
$$n_j\tau_{ij}t_i = 0, \quad \partial\theta/\partial n = -Bi(\theta - \theta_2).$$

Здесь n_i, t_j — компоненты единичных нормали и касательной к поверхности S_5 соответственно, σ_p — коэффициент поверхностного натяжения, K — кривизна свободной поверхности, α_p — коэффициент теплообмена с окружающей средой, θ_2 — безразмерная температура окружающей среды T_2. Число капиллярности и параметр Био вводятся соотношениями

$$\mathrm{Ca} = \eta U_0/\sigma_p, \quad \mathrm{Bi} = \alpha_p L_0/k.$$

На границе S_5 сначала записано кинематическое условие, которое используется в лагранжевом представлении. Далее записываются динамические условия, заключающиеся в отсутствии касательных напряжений и равенстве скачка нормальных напряжений капиллярному давлению [6].

Численное решение задачи (1) производится в смешанной постановке с использованием метода конечных элементов [6, 7]. Применяя интегрирование по частям к уравнению движения жидкости в напряжениях,

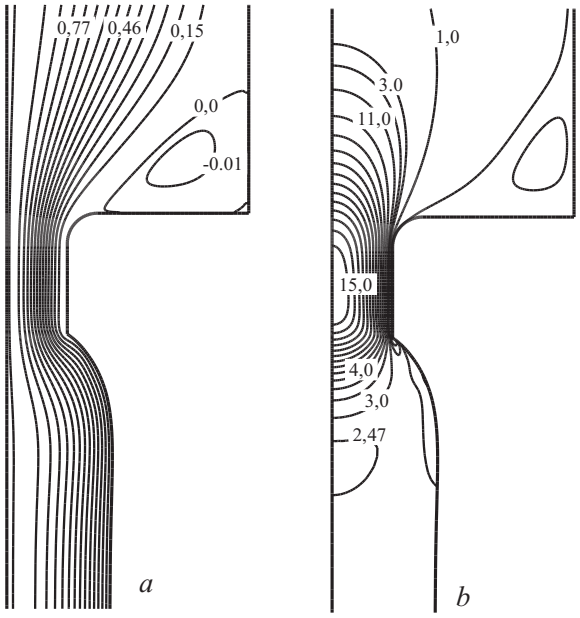

Рис. 2. Изолинии (a) — линии тока ψ; (b) — осевой компоненты скорости при We = 3,0 для насадки с длиной $L = 2h$

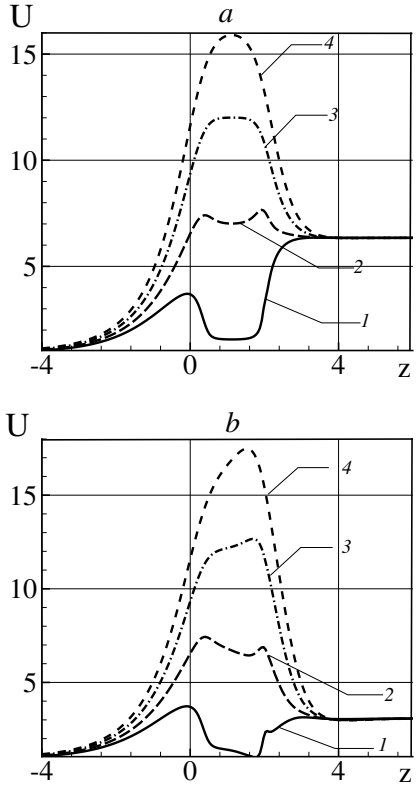

Рис. 3. Распределение осевой скорости по продольным сечениям $1 - r = 0{,}95$, $2 - r = 0{,}75$, $3 - r = 0{,}50$, $4 - r = 0{,}0$ для насадки с длиной $L = 2h$ (a) при We = 0,1; (b) для We = 3,0

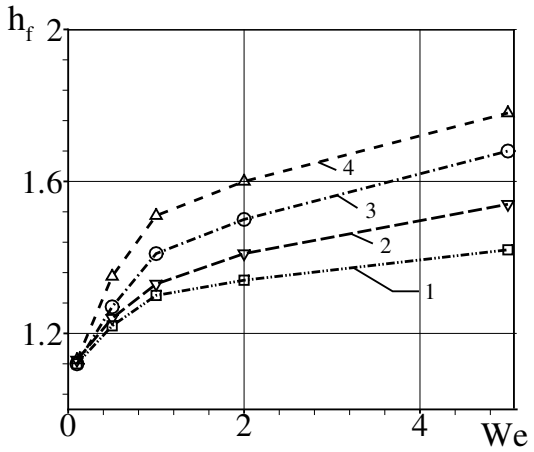

Рис. 4. Степень разбухания выходной струи h_f в зависимости от значения числа We для различных насадок $1 - L = 10h$, $2 - L = 4h, 3 - L = 2h$, $4 - L = 0$

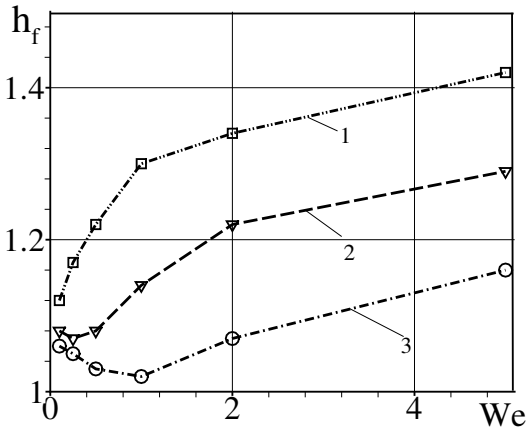

Рис. 5. Степень разбухания выходной струи h_f для неизотермической экструзии в зависимости от значения числа We при увеличении температуры стенки S_3 (1 — $\Delta T = 0$ K, 2 — 15 K, 3 — 30 K) насадки с длиной $L = 4h$

можно добиться того, что динамическое граничное условие на свободной границе станет естественным [8]. Положение свободной поверхности определяется путем интегрирования кинематического условия. По найденным координатам новая форма свободной границы аппроксимируется с использованием кубических сплайнов. В изменившейся области течения жидкости производится адаптивное достроение конечно-элементной сетки [6].

Из требования выполнения закона сохранения количества движения следует, что струя, выходящая из канала, должна сужаться. Этот эффект известен для низкомолекулярных жидкостей, не проявляющих высокоэластических свойств. Для полимерных систем реализуется упругое разбухание, обусловленное высокоэластическими деформациями. Увеличение диаметра выходной струи характеризуется параметром h_f, равным отношению диаметра струи к диаметру канала. Параметр h_f описывает эффект разбухания струи. Для тестирования правильности работы алгоритма рассматривалось ползущее изотермическое истечение ньютоновской жидкости из цилиндрического и щелевого каналов. Значения h_f, полученное в [9], составляет $h_f = 1,128$. В данной работе получено значение $h_f = 1,127$ для цилиндрического, $h_f = 1,190$ — для щелевого канала соответственно [6].

Для изотермического потока полимерной жидкости значения всех теплофизических параметров рассматриваются при температуре $T_0 = 303$ K. В случае неизотермического течения рассматривается выдавливание полимерной жидкости из насадки с нагретыми стенками, температура которых повышается до $T_1 = 323$ K, 353 K соответственно. Расчеты проводились при следующих значениях теплофизических свойств полимерной жидкости $\varrho = 924$ кг/м^3, $\eta = 10^4$ (Па·с), c_p= 2 300 Дж/(кг·K), k = 0,26 Вт/(м·K), A = 2 000 K, $\alpha_p = 10^2$ Вт/(м^2·K), $\sigma_p = 3 \cdot 10^{-2}$ н/м. В качестве характерных параметров выступали $h = 10^{-2}$ м, $U_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ м/сек. Время релаксации напряжений жидкости изменялось в пределах от $\lambda = 0,1$ до 10 сек. Получены следующие значения безразмерных критериев $\mathrm{Re} = 10^{-5}$, $\mathrm{Pe} = 180$, $\mathrm{Br} = 2 \cdot 10^{-2}$, $\mathrm{Ca} = 1,4 \cdot 10^3$, $\mathrm{Bi} = 3{,}8$, а число We изменяется в пределах от 0,1 до 5,0.

На рис. 2 представлена картина течения для насадки с размером выходного канала L, равным нулю, в виде изолиний линий тока (рис. 2a), изолиний осевой компоненты скорости (рис. 2b) для изотермической экструзии при $\mathrm{We} = 3,0$. Видно, что как только полимерная жидкость проходит выходное сечение и попадает в зону свободного течения, давление и напряжения начинают немедленно релаксировать. Процесс релаксации происходит до тех пор, пока накопленная высокоэластичная деформация не уменьшится до значения, соответствующего эластической деформации полимера, находящегося в состоянии стационарного течения. Выделим две основные причины изменения сечения струи:

– перестройка профиля скоростей от параболического, характерного для вязкого течения в канале, к прямоугольному, соответствующему движению струи как сплошного твердого стержня;

– релаксация высокоэластических деформаций растяжения, накопленных в материале струи за время ее прохождения по каналу. Перестройка профиля скорости приводит к возникновению продольных деформаций растяжения или сжатия.

Влияние длины насадки на характер перераспределения профиля скоростей жидкости по сечениям показано на рис. 3, где приведены кривые, характеризующие значение осевой скорости для 4-х продольных сечений: 1) $r = 0,95$; 2) $r = 0,75$; 3) $r = 0,50$; 4) $r = 0$ при $\mathrm{We} = 0,1$, $3,0$ соответственно. Из этого рисунка видно, что наибольшее изменение скорости наблюдается для слоев жидкости, прилегающих к центру фильерной трубы. Для жидкости в центральной части происходит сильное замедление потока после выхода их насадки. Для слоев, расположенных вдоль верхней стенки выходного канала (сечение 1), наблюдается монотонное ускорение для жидкостей, поведение которых аналогично ньютоновскому ($\mathrm{We} = 0,1$ рис. 3a). Для неньютоновских жидкостей с выраженными вязкоупругими свойствами ($\mathrm{We} = 3,0$) проявляется значительное разбухание после выхода из насадки, что приводит к немонотонному ускорению для жидкости вблизи стенки (кривая 1, рис. 3b).

Поток становится практически полностью однородным после выхода из насадки на расстоянии ширины выходного канала. На рис. 4 приведена зависимость степени разбу-

хания h_f выходящей струи полимерной жидкости от значения числа We для различных насадок. Формы насадок различаются длиной узкой выходной части L, изменяющейся от 0 до $10h$. Результаты показывают, что степень разбухания h_f струи увеличивается при уменьшении длины выходного участка. На рис. 5 показана зависимость h_f от числа We при неизотермической экструзии для ступенчатой формующей насадки с размером выходной части $L = 4h$ в зависимости от температурного напора между стенкой и потоком полимерной жидкости. Видно, что нагрев стенки на $\Delta T = 30$ K (кривая 3) приводит к уменьшению диаметра выходной струи. При этом для более длинной насадки с ростом числа We и температурного напора выявлен немонотонный характер увеличения h_f. При небольших числах We (We < 1) происходит уменьшение степени разбухания.

Результаты численного моделирования истечения вязкоупругой жидкости из насадки на основе модели жидкости Гиезекуса показали, что одним из определяющих факторов, влияющих на степень разбухания, является время релаксации напряжений жидкости. Неизотермичность потока полимерной массы, пределяющаяся разностью температур стенки и основного потока, приводит к уменьшению диаметра выходной струи. Выявлено, что при увеличении температурного напора наблюдается уменьшение диаметра выходной струи с ростом числа We при небольших значениях We (We < 1). Вышеизложенные особенности разбухания свидетельствует о том, что температурная аномалия вязкости полимерных жидкостей оказывает существенное влияние на форму выходящей струи.

Литература

1. *Торнер Р. В.* Теоретические основы переработки полимеров. М.: Химия, 1977. 467 с.
2. *Раувендаль К.* Экструзия полимеров. СПб.: Профессия, 2008. 768 с.
3. *Giesekus H.* A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation dependent tensorial mobility // J.Non-Newtonian Fluid. Mech. 1982. Vol. 11, № 1. P. 69–109.
4. *Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O.* Dynamics of Polymeric Liquids. vol.1. Fluid Mechanics. 2nd ed. New York, John Wiley and Sons, 1987. 565 p.
5. *Назмеев Ю. Г.* Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков реологически сложных жидкостей. М.: Энергоатомиздат, 1996. 304 с.
6. *Снигерев Б. А, Алиев К. М. Тазюков Ф. Х.* О форме выходящей струи при выдавливании вязкоупругой жидкости из плоского щелевого канала // Вестник Самарского государственного университета. 2009. № 6(72). С. 130–138.
7. *Aboubacar M., Phillips T. N., Snigerev B. A., Tamaddon-Jahromi H. R., Webster M. F.* High-order finite volume schemes for viscoelastic flows // J. Comput. Phys. 2004. Vol. 199. P. 16–40.
8. *Keunings R.* An algorithm for simulation of transient viscoelastic flows with free sufrace // J. Comp. Phys. 1986, Vol. 62. P. 199–220.
9. *Nickell R. E., Tanner R.I., Caswell B.* The solution of viscous incompressible jet and free surface flow using finite element mehtod // J. Fluid. Mech. 1974. Vol. 65, № 1. P. 189–206.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, свободная поверхность, осесимметричное течение, теплообмен

Статья поступила 10 марта 2010 г.
Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, г. Казань
© Снигерев Б. А., 2010