УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБОБЩЕННО ПОЛУМОДУЛЯРНЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Титов Г. Н.[1]

ON SOLVABILITY OF GENERALIZED SEMI-MODULAR FINITE GROUPS

Titov G. N.

The finite group, which has a semi-modular lattice of subgroups (the semi-modular group), satisfies the following condition: any A and B elements in the lattice of subgroups the difference of dimension of the interval from A to the A and B union and the interval from A–B intersection to B is less than two. There are non semi-modular groups, which satisfy this condition. Finite groups satisfying this condition are therefore generalized semi-modular groups. The article proves the solvability of these groups.

Keywords: finite group, semi-modular lattice of subgroups

В статье рассматриваются конечные группы. Используемые в тексте обозначения общеприняты, встречающиеся понятия по теории групп могут быть найдены в источниках [1–3], а понятия по теории решеток — в [3–5]. На стыке этих двух теорий еще в тридцатых годах (прошлого века) появились публикации о группах, решетка подгрупп которых удовлетворяет условиям, связанным с модулярностью или полумодулярностью [6–12]. С конца сороковых годов до настоящего времени в нашей стране набрала силу программа С. Н. Черникова изучения строения групп с заданными свойствами системы подгрупп [13]. В рамках этой программы на стыке теории групп и теории решеток автор имеет некоторые результаты [14, 15]. В настоящей статье рассматриваются группы с обобщающими полумодулярность свойствами решеток их подгрупп.

Пусть L — конечная решетка (структура) с отношением «$\leqslant$», $a, b \in L$ и $a < b$. Через $d(b : a)$ обозначим наибольшую длину среди длин всех максимальных цепей от a до b. При $a = b$ полагаем $d(b : a) = 0$. Если o — наименьший элемент решетки L, то при $c \in L$ вместо $d(c : o)$ в соответствии с [3] запишем $d(c)$ и назовем это число размерностью элемента c. Имеет место следующее предложение (доказательство приведено ниже), дающее новый взгляд на понятие верхней и нижней полумодулярности.

Предложение. Конечная решетка L является верхне- (нижне-) полумодулярной тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in L$ выполняется неравенство

$$d(x \vee y : y) \leqslant d(x : x \wedge y) \qquad (1)$$

$$(d(x : x \wedge y) \leqslant d(x \vee y : y)). \qquad (2)$$

Из этого предложения в силу теоремы 8.3.6 [3] следует, что выполнимость равенства $d(x \vee y : y) = d(x : x \wedge y)$ для всех $x, y \in L$ равносильна модулярности конечной решетки L. Сформулированное предложение позволяет обобщить понятие верхней (нижней) полумодулярности решеток следующим образом: при $k \in N_0$ ($N_0 = N \cup \{0\}$, где N — множество натуральных чисел) конечная решетка L является k-верхне- (k-нижне-) полумодулярной, если для любых $x, y \in L$ выполняется более общее, чем (1) ((2)) неравенство

$$d(x \vee y : y) \leqslant d(x : x \wedge y) + k \qquad (3)$$

$$(d(x : x \wedge y) \leqslant d(x \vee y : y) + k). \qquad (4)$$

Через M^k и M_k обозначим классы конечных k-верхнеполумодулярных и k-нижнеполумодулярных решеток соответственно. Имеют место следующие включения $M^0 \subseteq M^1 \subseteq M^2 \subseteq \ldots$ и $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$, и классы M^0, M_0 и $M^0 \cap M_0$ совпадают соответственно с классами конечных верхне полумодулярных, нижнеполумодулярных и модулярных решеток. Для удобства при

[1]Титов Георгий Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей алгебры и геометрии Кубанского государственного университета; e-mail: georgii_titov@mail.ru

$m, n \in N_0$ конечную группу назовем M^m, M_n или M_n^m-группой, если решетка ее подгрупп лежит в соответствующем классе M^m, M_n или $M^m \cap M_n$. Известно нормальное строение конечных M^0, M_0 и M_0^0-групп, они оказываются разрешимыми. Нетрудно заметить, что неразрешимая знакопеременная группа подстановок пятой степени является M_1^2-группой, в связи с чем возникает гипотеза о разрешимости M^1-групп. Доказательство справедливости этой гипотезы и является основным результатом настоящей статьи.

Доказательство предложения. Доказательства предложения для случаев верхней и нижней полумодулярностей двойственны. Поэтому доказываем его для первого случая. Покажем, что конечная решетка L является верхнеполумодулярной тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in L$ выполняется неравенство (1).

Пусть L — конечная верхнеполумодулярная решетка. При $a, b \in L$ и $a < b$ согласно теореме 8.3.4 [3] любые две максимальные цепи от a до b имеют равные длины, а значит, длина любой максимальной цепи от a до b равна $d(b : a)$. Если o — наименьший элемент решетки, то все максимальные цепи от o до a имеют длину $d(a)$, а от o до b — длину $d(b)$. Так как существует максимальная цепь от o до b, проходящая через a, то выполняется следующее равенство $d(b : a) = d(b) - d(a)$ для любых элементов a и b решетки L при условии $a < b$, а также, очевидно, и при условии $a = b$. Далее, для любых $x, y \in L$ из теоремы 8.3.5 [3] следуют неравенства $d(x \vee y) - d(y) \leqslant d(x) - d(x \wedge y)$ и $d(x \vee y : y) \leqslant d(x : x \wedge y)$, что приводит к неравенству (1).

Обратно, пусть в конечной решетке L для любых $x, y \in L$ выполняется неравенство (1). Согласно определению верхней полумодулярности [5] надо доказать, что если при $a, b \in L$ элемент a покрывает элемент $a \wedge b$, то элемент $a \vee b$ покрывает элемент b. Но элемент x покрывает элемент y решетки L тогда и только тогда, когда $y \leqslant x$ и $d(x : y) = 1$. Откуда следует, что $d(a \vee b : b) \leqslant d(a : a \wedge b) = 1$. Если бы $d(a \vee b : b) = 0$, то имели бы $a \leqslant b$ и $d(a : a \wedge b) = 0$, что привело бы к противоречию. Поэтому $d(a \vee b : b) = 1$, следовательно, $a \vee b$ покрывает b.

Предложение доказано.

В дальнейшем понадобятся леммы 1 и 2.

ЛЕММА 1. Пусть группа G для некоторого простого числа $p \in \pi(G)$ (здесь $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G) удовлетворяет двум условиям: 1) силовская p-подгруппа любой собственной подгруппы H из G при $p \in \pi(H)$ нормальна в H; 2) все неединичные p-подгруппы из G не являются нормальными в G. Тогда, если для некоторых подгрупп A и B группы G, где A — неединичная p-подгруппа, имеем $\langle A; B\rangle \neq G$, то подгруппа B лежит в нормализаторе какой-то силовской p-подгруппы группы G.

Доказательство. Пусть A_1 — силовская p-подгруппа в $\langle A; B\rangle$. По условию 1) A_1 нормальна в $\langle A; B\rangle$, а значит, $B \leqslant N_G(A_1)$ и с учетом теоремы Силова [4] имеем $A \leqslant A_1$. Пусть A_2 — силовская p-подгруппа группы $N_G(A_1)$. По условию 2) $N_G(A_1) \neq G$, а значит по условию 1) A_2 нормальна в $N_G(A_1)$. Откуда получаем $B \leqslant N_G(A_2)$ и $A_1 \leqslant A_2$. Продолжая этот процесс, на $(k+1)$-м шаге найдем нормальную силовскую p-подгруппу A_{k+1} группы $N_G(A_k)$, где $k \in N$, $B \leqslant N_G(A_{k+1})$ и $A_k \leqslant A_{k+1}$. Замечаем, что всякая подгруппа группы G, имеющая порядок p^{m-1}, где $m \in N$ и p^m делит нацело порядок G, содержится и нормальна в некоторой подгруппе порядка p^m. Поэтому, если A_k еще не силовская p-подгруппа группы G, то A_k строго содержится в A_{k+1}. Это означает, что на некотором n-м шаге, где $n \in N$, A_n окажется силовской p-подгруппой группы G, в нормализаторе которой лежит подгруппа B.

Лемма 1 доказана.

Отметим, что свойства M^n и M_n при $n \in N_0$ наследуются подгруппами и факторгруппами конечных групп.

ЛЕММА 2. Если G — разрешимая M^1-группа, $p = \max \pi(G)$ и $p \geqslant 5$, то силовская p-подгруппа группы G нормальна в G.

Доказательство. Проводим доказательство этой леммы индукцией по порядку группы G.

База индукции. При $|G| = 5$ истинность утверждения леммы очевидна.

Индуктивное предположение. Допустим, что все разрешимые M^1-группы, порядок которых меньше $|G|$, удовлетворяют утверждению леммы.

Заметим, что все собственные подгруппы и нетривиальные факторгруппы, порядок которых делится на p, являются разрешимыми M^1-группами меньшего, чем G, порядка, следовательно по индуктивному предположению каждая из них имеет нормальную силовскую p-подгруппу.

Индуктивный переход. Пусть P — силовская p-подгруппа и N — минимальный нормальный делитель группы G. Тогда для некоторого простого числа q подгруппа N яв-

ляется элементарной абелевой q-группой [2]. Если $p = q$, то в силу нормальности N в G из теоремы Силова следует $N \leqslant P$. При $N = P$ p нормальна в G, а при $N < P$ по предположению индукции силовская p-подгруппа P/N группы G/N нормальна в G/N, а значит, по теореме 4.2.1 [2] и в этом случае получаем нормальность p в G. Таким образом, при $p = q$ индуктивный переход выполняется. Далее будем считать, что $p \neq q$, то есть $q < p$.

Теперь рассмотрим подгруппу $H = NP$. Допустим, что $H \neq G$. По индуктивному предположению имеем $H = N \times P$ и силовская p-подгруппа H/N группы G/N является нормальной. Откуда следует нормальность H в G. Но p — характеристическая подгруппа в H, а значит, p нормальна в G [2], что и доказывает в этом случае лемму. В дальнейшем будем полагать, что $H = G$, то есть $G = NP$.

Предположим, что $|P| \neq p$. Тогда в p найдется неединичная максимальная подгруппа M. Так как подгруппа $L = NM$ является собственной в G, то силовская p-подгруппа M группы L нормальна в L. Учитывая нормальность M в P [2], получаем нормальность M в группе $\langle P; L\rangle = G$. По предположению индукции P/M нормальна в G/M, следовательно, P нормальна в G и опять в случае $|P| \neq p$ индуктивный переход выполняется. Далее полагаем, что $|P| = p$.

Допустим, что $|N| \neq q$. Тогда в N найдется собственная подгруппа K порядка q. Если $\langle P; K\rangle \neq G$, то P нормальна в $\langle P; K\rangle$, то есть $\langle P; K\rangle = KP$. По теореме 8.4.1 [3] имеем $N \cap KP = K(N \cap P) = K$, следовательно ввиду теоремы 4.2.4 [2] K — нормальная подгруппа в KP. Но K также нормальна в абелевой группе N и поэтому K нормальна в группе $\langle N; KP\rangle = G$, что противоречит минимальности N в G. Полученное противоречие означает, что $\langle K; P\rangle = G$. Так как G — M^1-группа, имеем $d(G : K) \leqslant d(P : P \cap K) + 1$. В силу $K < N < G$ и $d(G : K) \leqslant 2$ получаем, что K — максимальная подгруппа группы N, то есть $|N| = q^2$. Согласно теореме 19.5 [1] централизатор $C_G(N)$ подгруппы N в G является нормальной подгруппой в G, причем факторгруппа $G/C_G(N)$ изоморфно вложима в группу автоморфизмов группы N, то есть в группу $\mathrm{Aut}\, N$. В нашем случае согласно теореме 12.2.2 [3] $|\mathrm{Aut}\, N| = (q^2-1)(q^2-q)$. Если $C_G(N) \neq G$, то в силу $G = NP$ число p должно делить нацело число $q(q-1)^2(q+1)$. Но p и q — простые числа, где $q < p$, поэтому последнее возможно только при $q = 2$ и $p = 3$, что противоречит условию леммы. Полученное противоречие означает, что $C_G(N) = G$, а значит, $G = N \times P$. Это и доказывает выполнимость индуктивного перехода в случае $|N| \neq q$.

Наконец, если $|N| = q$, $G = NP$ и $|P| = p$ для простых чисел p и q, где $q < p$, то в этом случае $|G| = pq$ и нормальность P в G следует из описания строения групп порядка pq [2].

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА. M^1-группа разрешима.

Доказательство. Предположим, что существуют неразрешимые M^1-группы и пусть G — группа наименьшего порядка среди таких групп. Так как подгруппы и факторгруппы M^1-групп тоже являются M^1-группами, то согласно выбору G все собственные подгруппы и нетривиальные факторгруппы неразрешимой группы G являются разрешимыми M^1-группами. В частности, G — неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Тогда из [3] следует, что $|\pi(G)| \geqslant 3$ и по теореме Томпсона-Фейта [5] $2 \in \pi(G)$. Поэтому существуют простые числа $p, q \in \pi(G)$ такие, что $p = \max \pi(G)$ и $2 < q < p$. Ясно, что $p \geqslant 5$. Так как собственные подгруппы группы G являются разрешимыми M^1-группами, в силу леммы 2 выполняется условие 1) леммы 1, а из простоты G получаем выполнимость и условия 2). Таким образом, в дальнейших рассуждениях для указанного простого числа p можем применять лемму 1 к группе G, а лемму 2 — к собственным подгруппам группы G, порядок которых делится на p.

Теперь пусть I — произвольная подгруппа второго порядка и J — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая в себе подгруппу I. Порядок группы G делится нацело на 4 [3], а значит, $I \neq J$. Заметим, что $d(G : I) \geqslant 3$. Действительно, при $|J| \geqslant 8$ для некоторой подгруппы K найдется цепь вида $I < K < J < G$. При $|J| = 4$ подгруппа J абелева. Если бы $J = N_G(J)$, то имели бы $J \leqslant Z(N_G(J))$ и по теореме Бернсайда [3] подгруппа J обладала бы нормальным дополнением в G, что противоречит простоте G. Поэтому $J \neq N_G(J)$ и в рассматриваемом случае при $|J| = 4$ также существует цепь от I до G длины 3 вида $I < J < N_G(J) < G$.

Пусть L — произвольная подгруппа порядка p группы G. Так как G — M^1-группа, то $d(\langle L; I\rangle : I) \leqslant d(L : L \cap I) + 1$. Учитывая, что $d(< L; I >: I) \leqslant 2$ и $d(G : I) \geqslant 3$, получаем $< \langle L; I\rangle \neq G$, то есть любая подгруппа порядка p и любая подгруппа порядка 2 порождают собственную подгруппу группы G.

Далее, пусть P — некоторая силовская p-подгруппа группы G. Предположим, что $|P| = p$. Тогда по замеченному выше $\langle P; I\rangle \neq G$ и по лемме 2 P нормальна в $\langle P; I\rangle$, то есть любая подгруппа I второго порядка группы G в нормализаторе подгруппы P, что противоречит простоте G. Полученное противоречие означает, что $|P| \neq p$. Поэтому в p найдем собственную подгруппу A порядка p. Поскольку $\langle A; I\rangle \neq G$, согласно лемме 1 I лежит в нормализаторе подходящей силовской p-подгруппы группы G, то есть число $|N_G(P)|$ делится не только на p, но и на 2. Поэтому $P \neq |N_G(P)|$ и существует цепь длины 3 вида $A < P < N_G(P) < G$, то есть $d(G : A) \geqslant 3$.

Рассмотрим в G произвольную подгруппу M порядка q. Ясно, что $M \cap A = 1$ и $d(M : 1) = 1$, следовательно, по свойству M^1 получим $d(A : M) \leqslant 2$. Поэтому в силу $d(G : A) \geqslant 3$ имеем $\langle A; M\rangle \neq G$. По лемме 1 M вложена в нормализатор силовской p-подгруппы группы G, а значит, число $|N_G(P)|$ делится нацело на q. Откуда следует, что порядок нормализатора подгруппы P в G делится по крайней мере на три простых числа 2, q и p.

По теореме Ф. Холла [2] в $N_G(P)$ найдется собственная холловская $\{q; p\}$-подгруппа T, содержащая P. Поэтому существует цепь длины 3 вида $P < T < N_G(P) < G$, то есть $d(G : P) \geqslant 3$. Если бы для подгруппы I второго порядка имели $\langle P; I\rangle = G$, то $3 \leqslant d(G : P) \leqslant d(I : 1) + 1 = 2$. Поэтому для любой подгруппы I второго порядка группы G $\langle P; I\rangle \neq G$. Согласно лемме 2 P нормальна в $\langle P; I\rangle$, а значит, все подгруппы второго порядка группы G лежат в собственной подгруппе $N_G(P)$ группы G. Это противоречит простоте группы G.

Теорема доказана.

В заключении отметим, что доказанная в статье разрешимость обобщенно верхнеполумодулярных M^1-групп позволяет приступить к более детальному их изучению. Также в этом направлении исследований возникает определенный интерес к вопросу получения необходимых или достаточных условий разрешимости обобщенно нижнеполумодулярных M_1-групп.

Литература

1. *Горчаков Ю. М.* Теория групп. Тверь: ТГУ, 1998. 112 с.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
3. *Холл М.* Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 468 с.
4. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
5. *Судзуки М.* Строение группы и строение структуры ее подгрупп. М.: ИЛ, 1960. 158 с.
6. *Baer R.* Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // S. B. Heidelberger Akad. Wiss. Abhandlungen. 1933. Vol. 2. P. 12–17.
7. *Ore O.* Structures and group theory, I // Duke Math. J. 1937. Vol. 3. P. 149–173.
8. *Iwasawa K.* On the structure of infinite M-groups // Jap. J. Math. 1943. Vol. 18. P. 709–728.
9. *Jones A. W.* Semi-modular finite groups and the Burnside basis theorem // Abstract Bull. Amer. Math. Soc. 1946. Vol. 52. P. 541–560.
10. *Sato S.* On groups and the lattices of subgroups // Osaka Math. J., 1949. Vol. 1. P. 135–149.
11. *Ito N.* Note on (LM)-groups of finite order // Kodai Math. Sem. Reports. 1951. P. 1–6.
12. *Suzuki M.* On the lattice of subgroups of finite groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 70. P. 345–371.
13. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
14. *Титов Г. Н.* Группы, недополняемые подгруппы которых образуют подрешетку решетки всех подгрупп // Кольца и линейные группы. Краснодар: КубГУ, 1988. С. 99–106.
15. *Титов Г. Н.* Квазигамильтоновость конечных групп в терминах свойств множества двойных смежных классов по подгруппам // Современные проблемы математики и информатики. Выпуск второй. Армавир: АГПУ, 2005. С. 65–70.

Ключевые слова: конечная группа, полумодулярная решетка подгупп

Статья поступила 17 марта 2010 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Титов Г. Н., 2010