

М Е Х А Н И К А

УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ¹*В. А. Бабешко², О. В. Евдокимова³, С. М. Евдокимов⁴*

SOLVING OF THE BOUNDARY PROBLEMS WITH USING OF THE MATRIX-FUNCTIONS FACTORIZATION

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Evdokimov S. M.

The new formulas for the factorization of the meromorphic matrix-functions were received. This formulas permits to solve the boundary problems for the system of the differential equations such as for the separate equations.

Проблеме факторизации матриц-функций посвящен большой цикл исследований, обзоры которых содержатся в работах [1–6]. В то же время формул их факторизации, подобных формулам факторизации функций, за исключением частных случаев, построить не удалось.

В настоящей работе построены формулы факторизации достаточно широкого класса мероморфных матриц-функций, часто встречающихся в смешанных задачах, в теории интегральных и дифференциальных уравнений и их приложениях [7–10]. Потребность в получении подобных формул продиктована тем, что в случаях задач, где возникает проблема факторизации матриц-функций одного комплексного переменного, имеется достаточно много численных приемов ее осуществления [4, 5]. Однако развиваемые в настоящее время методы факторизации решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, исследование многомерных интегральных уравнений теории вирусов вибропрочности приво-

дят к необходимости факторизации матриц-функций, элементами которых являются аналитические функции многих комплексных переменных [8–10]. Численные методы при исследовании таких задач в неограниченных областях не эффективны. Приведенные в статье результаты в определенной мере решают эту проблему.

1. В пространстве N комплексных переменных α_k , $k = 1, 2, \dots, N$ рассматриваются матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$, элементы которых являются мероморфными функциями. Известно, что левосторонняя факторизация мероморфной матрицы-функций $\mathbf{K}(\alpha)$ по параметру α_n относительно замкнутой кривой Γ , разграничивающей области λ_+ и λ_- , сводится к факторизации отдельно некоторой целой функции общего знаменателя всех элементов и к факторизации матрицы-функции, элементами которой являются целые функции. Для последней требуется построить представление в виде произведения двух матриц-функций, т.е.

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = \mathbf{K}_+(\alpha_n)\mathbf{K}_-(\alpha_n). \quad (1)$$

¹Работа выполнена по программам отделений ЭММПУ, наук о Земле и Президиума РАН (З/Н-241, 379, 380, ГН-374), при поддержке Минобрнауки (Е02-4.0-190), РФФИ (03-01-00694), РФФИ р2003юг (03-01-96537, 03-01-96527, 03-01-96519, 03-01-96587, 04-01-96822), ФЦП «Интеграция» (Б0121), гранта Президента РФ (НШ-2107.2003).

²Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии.

³Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой факультета архитектуры и дизайна КубГУ.

⁴Евдокимов Сергей Михайлович, канд. физ.-мат. наук, заместитель директора Интернет-центра КубГУ.

Формула (1) понимается следующим образом: матрица-функция n комплексных переменных $\mathbf{K}(\alpha)$ рассматривается как функция переменного α_n при фиксированных остальных вещественных переменных α_k , $k = \overline{1, n-1}$. Здесь матрица-функция $\mathbf{K}_+(\alpha_n)$ должна иметь регулярные в односвязной области λ_+ элементы и отличный от нуля определитель, а матрица-функция $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$ должна обладать такими же свойствами в дополнении λ_+ до всей плоскости комплексного переменного α_n , т.е. в λ_- , при фиксированных остальных вещественных параметрах. Требуется также, чтобы построенные в результате факторизации элементы матриц-функций — мероморфные функции — обладали бы определенным поведением на бесконечности в своих областях регулярности [1–6].

Будем считать, что элементы $K_{mp}(\alpha)$, $m, p = 1, 2, \dots, N$ матриц-функций являются в общем случае целыми функциями переменных α_k , $k = \overline{1, n}$.

Предполагается, что целые функции обращаются в нуль на аналитических множествах многих комплексных переменных [11]. Представления этих аналитических множеств формально можно записать в разрешенном относительно параметра α_n виде при вещественных остальных переменных, т.е.

$$\alpha_{ns} = \alpha_{ns}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = \alpha_{ns}(\alpha'), \\ s \rightarrow \infty.$$

Это представление в дальнейшем будем называть нулями целых функций, которые в терминах одного комплексного переменного определяют ее порядок и тип [11]. Для простоты будем считать порядок первым, а тип — не выше σ . Определитель $\Delta(\alpha)$ матрицы-функции — целая функция того же порядка, типа — не выше $N\sigma$.

Для применения предлагаемых в настоящей работе формул факторизации необходимо знание нулей определителя, которые представимы в виде

$$z_{sk}^\pm = \alpha_{sk}^\pm(\alpha')\pi s + \bar{0}(1), \\ s \rightarrow \infty, \quad k = \overline{1, M}. \quad (2)$$

Здесь z_{sk}^+ — нули определителя из области λ_+ , z_{sk}^- — из области λ_- , $\alpha_{sk}^\pm(\alpha')$ — непрерывные, ограниченные на вещественной оси функции вещественных переменных $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. В частности, количество

нулей может оказаться конечным, если матрица полиномиальная. Асимптотика нулей (2) свидетельствует о том, что принят во внимание порядок целых функций, что не обязательно.

Рассмотрим абсолютно сходящиеся канонические произведения следующего вида:

$$\Phi_{p\pm}(\alpha_n) = \gamma_p(\alpha_n) \prod_{s=1}^{S_p} \left(1 - \frac{\alpha_n}{z_{sp}^\pm}\right) e^{\mp \frac{\alpha_n}{z_{sp}^\pm}}, \\ p = \overline{1, N}, \quad S_p \leq \infty. \quad (3)$$

В случае, если матрицы-функции полиномиальные, произведения будут конечными. Предположим, что справедливо представление

$$K(\alpha_n) = \det \mathbf{K}(\alpha_n) = \\ = \gamma(\alpha_n) \prod_{p=1}^N \Phi_{p+}(\alpha_n) \Phi_{p-}(\alpha_n), \\ K(\alpha_n) = K_+(\alpha_n) K_-(\alpha_n), \\ K_+(\alpha_n) = \prod_{p=1}^N \Phi_{p+}(\alpha_n), \\ K_-(\alpha_n) = \prod_{p=1}^N \Phi_{p-}(\alpha_n),$$

$\gamma(\alpha_n)$, $\gamma_p(\alpha_n)$ — целые функции, не имеющие нулей в конечной плоскости по параметру α_n . Матрицы-функции $\mathbf{K}_m(\alpha)$ порядка $N-1$, получающиеся из матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ вычеркиванием строки и столбца под номером m , имеют обратные $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha)$, если их определители $D_m(\alpha)$ отличны от тождественного нуля. Обратную матрицу-функцию $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha)$ можно записать в виде

$$\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha_n) = D_m^{-1}(\alpha_n) \|D_{ps}(m, \alpha_n)\|, \\ p \neq m, \quad s \neq m, \quad D_m(\alpha_n) = \det \mathbf{K}_m(\alpha_n)$$

Предполагается, что

$$D_m(z_{sp}^+) \neq 0. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение набор функций вида

$$R_{pm}(\alpha_n) = \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{s=1}^N \frac{D_{ps}(m, u_n) K_{sm}(u_n) du_n}{D_m(u_n) \Phi_{m-}(u_n) (u_n - \alpha_n)}, \\ p = 1, 2, \dots, m-1, m+1, \dots, N, \\ \alpha_n \in \lambda_-. \quad (5)$$

Штрих означает, что члены с $p = m$ и $s = m$ пропускаются.

Контур Γ охватывает области, содержащие все нули функции $\Phi_{m-}(u_n)$, лежащие в области λ_+ , и исключает области, содержащие нули функции $D_m(\alpha_n)$. Обозначим через $\mathbf{P}_m(\alpha_n)$ матрицу-функцию порядка N , имеющую отличными от нуля диагональные элементы, равные единице, кроме $R_{mm} = \Phi_{m-}^{-1}$ и только столбец m с элементами R_{pm} , $p = \overline{1, N}$. Если интеграл расходится, то в качестве R_{nm} можно принять $\Phi_{m-}^{-1} \cdot \Phi_{m+}^{-1}$.

Условимся в следующем обозначении

$$[\mathbf{K}(\alpha_n)]_m \mathbf{P}_m(\alpha_n) = \mathbf{K}(\alpha_n) \mathbf{P}_m(\alpha_n). \quad (6)$$

В этой формуле используются элементы известной матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_n)$ для построения описанной матрицы-функции $\mathbf{P}_m(\alpha_n)$. После этого вычисляется произведение матриц, порождающее новую матрицу-функцию. Применяя эту операцию, представим матрицу-функцию $\mathbf{K}(\alpha_n)$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha_n) = & \\ = & [\dots [\mathbf{K}]_1 \mathbf{P}_1]_2 \mathbf{P}_2]_3 \mathbf{P}_3]_{\mathbf{L}} \mathbf{P}_{\mathbf{L}}]_{\mathbf{L}+1} \dots]_{\mathbf{N}} \times \\ & \times \mathbf{P}_{\mathbf{N}} \mathbf{P}_{\mathbf{N}}^{-1} \dots \mathbf{P}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{L}-1}^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{L}-2}^{-1} \dots \mathbf{P}_1^{-1} \end{aligned}$$

Формула понимается следующим образом: матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha_n)$ индуцирует по формуле (5) матрицу-функцию $\mathbf{P}_1$, которая индуцирует $\mathbf{P}_1^{-1}$. Затем матрица-функция $\mathbf{K} \mathbf{P}_1$ индуцирует $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2^{-1}$ и т.д.

Теорема. Матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha_n)$ допускает представление

$$\mathbf{K}(\alpha_n) = \mathbf{K}_+(\alpha_n) \mathbf{K}_-(\alpha_n),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_+(\alpha_n) = & \\ = & [\dots [\mathbf{K}]_1 \mathbf{P}_1]_2 \mathbf{P}_2]_3 \mathbf{P}_3 \dots \mathbf{P}_{\mathbf{L}-1}]_{\mathbf{L}} \mathbf{P}_{\mathbf{L}} \equiv \\ & \equiv \mathbf{K} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \dots \mathbf{P}_{\mathbf{L}}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha_n) = \mathbf{P}_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{L}-1}^{-1} \dots \mathbf{P}_1^{-1}, \quad 1 \leq L.$$

Выбор параметра L диктуется требованиями задачи, приведшей к проблеме факторизации. Чем меньше L , тем в меньшем числе столбцов

матрицы-функции $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$ находятся множители, содержащие нули факторизованного определителя $\mathbf{K}_-(\alpha_n)$. Получающиеся в результате факторизации матрицы-функции оказываются наиболее простыми. Недостатком является разница в поведении элементов отдельных столбцов матрицы-функции на бесконечности, которую следует устранять, если строится каноническая факторизация.

На основании этих результатов развит подход, в котором применяется факторизация мероморфных матриц-функций, позволяющий существенно упростить применение метода факторизации к решению краевых задач для систем дифференциальных уравнений в сложных областях [8, 9]. Он сводит векторный случай практически к скалярному.

Литература

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой, зависящие от разности аргументов // УМН. 1958. 13. Вып. 2, С. 3–72.
2. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379 с.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
4. Литвинчук Г. С., Спитковский И. М. Факторизация матриц-функций. Деп. ВИНТИ. № 2410-84. Ч. 1. 250 с., Ч. 2. 212 с.
5. Ворovich И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. Rawlins A. D., Williams W. E. Matrix Wiener-Hopf factorization // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1981. 34. № 1. Р. 1–8.
7. Бабешко В. А. К расчету параметров высокочастотного резонанса в трехмерном случае // ДАН. 1994. Т. 335. № 1. С. 55–58.
8. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. Т. 393. 2003. № 4. С. 473–477.
9. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. Т. 392. 2003. № 6. С. 767–770.
10. Бабешко О. М. Об одном подходе к проблеме оценки загрязнения разнородных ландшафтов // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического Сотрудничества. 2003, № 1, с. 10–15.
11. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Часть I, М.: Наука, 1985, 336 с.; Часть II. М.: Наука, 1985. 464 с.