УДК 517.43+517.948+513.881

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

Александров В. Ю.[1]***, Левенштам В. Б.***[2]

PROOF OF THE AVERAGING METHOD FOR THE ABSTRACT PARABOLIC EQUATIONS WITH A VARIABLE LINEAR MAIN BODY

Alexandrov V. Y., Levenshtam V. B.

The averaging method is proved for the abstract parabolic equations with a variable linear main body.

Keywords: the abstract parabolic equations with a variable main body, the averaging method

В работе И. Б. Симоненко [1] метод усреднения обоснован для абстрактных параболических уравнений вида

$$\frac{du}{dt} = Au + f(u, t, \omega t), \quad t \in [0, T], \qquad (1)$$

где ω — большой параметр, A — линейный неограниченный оператор, порождающий в банаховом пространстве аналитическую полугруппу, а f — подчиненное в определенном смысле оператору A нелинейное отображение, имеющее среднее

$$F(u) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_0^N f(u, t, \tau) d\tau$$

При этом в [1] рассматривается задача Коши на участке $t \in [0, T]$ и задача о периодических решениях на всей временной оси.

В данной работе указанные результаты И. Б. Симоненко для задачи Коши перенесены на абстрактные параболические уравнения с переменной главной частью вида

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + f(u, t, \omega t), \quad t \in [0, T]. \qquad (2)$$

Здесь линейный неограниченный оператор $A(t)$ при каждом t порождает в банаховом пространстве аналитическую полугруппу, а также удовлетворяет некоторым другим важным требованиям работы П. Е. Соболевского [2], в которой построен эволюционный оператор для однородного уравнения (2) (т.е. при $f = 0$). Полученные в данной работе результаты позволяют обосновать метод усреднения для широкого класса полулинейных параболических начально-краевых задач со старшими коэффициентами, зависящими от пространстравенных и временной переменных (x, t), аналогично тому, как это сделано И. Б. Симоненко [3] в случае старших коэффициентов, зависящих от x.

Основные результаты данной работы без доказательств анонсированы в [4].

1. Формулировка основных результатов

Пусть B — банахово пространство и $A(t)$, где $t \in [0, T]$, $T = \text{const} > 0$ — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор в B, удовлетворяющий следующим условиям.

1.1. Оператор $A(t)$ имеет не зависящую от t всюду плотную в B область определения, обратим, и для любых t, τ, $s \in [0, T]$ при неко-

[1]Александров Владимир Юрьевич, инженер-программист ЗАО «КОМСТАР–Регионы»; e-mail: vladal@aaanet.ru.

[2]Левенштам Валерий Борисович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета, ведущий научный сотрудник Южного математического института ВНЦ РАН; e-mail: vleven@math.rsu.ru.

тором $\sigma \in (0,1]$ справедливо неравенство

$$\|[A(t)-A(\tau)]A^{-1}(s)\|_{\mathrm{Hom}(B,B)} \leqslant \leqslant c\,|t-\tau|^{\sigma}. \quad (1.3)$$

Здесь и далее через $\mathrm{Hom}(B_1,B_2)$, когда B_1, B_2 — банаховы пространства, обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2, с обычной операторной нормой.

1.2. Существует такая постоянная $c>0$, что при любом λ, для которого $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$, оператор $\lambda I - A(t)$ обратим, и справедлива оценка

$$\|[\lambda I - A(t)]^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(B,B)} \leqslant c\,(1+|\lambda|)^{-1}. \quad (1.4)$$

Обозначим $A(0)$ через A_0 и пусть B^{γ}, $\gamma \geqslant 0$, — банахово пространство векторов, принадлежащих области определения оператора $(-A_0)^{\gamma}$, с нормой $\|x\|_{B^{\gamma}} = \|(-A_0)^{\gamma}x\|_B$. Пусть $\alpha \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1]$, D – открытый шар в B^{α}, а $G = D \times [0,T]$. Предположим, что $f : G \times [0,\infty) \to B^{\varepsilon}$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим условиям.

1.3. Семейство отображений $f_{\tau} : G \to B^{\varepsilon}$, $\tau \geqslant 0$, определенное равенством

$$f_{\tau}(x,t) = f(x,t,\tau), \quad (x,t) \in G,$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

1.4. Отображение f непрерывно $(B^{\alpha},B^{\varepsilon})$ дифференцируемо в смысле Фреше по первой переменной и семейство отображений $(Df)_{\tau} : G \to \mathrm{Hom}(B^{\alpha},B^{\varepsilon})$, определяемое равенством

$$(Df)_{\tau}(x,t) = (D_x f)(x,t,\tau), \quad (x,t) \in G\,,$$

также равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

1.5. Семейство отображений $F_N : G \to B^{\varepsilon}$, $N>0$, определяемое равенством

$$F_N(x,t) = \frac{1}{N}\int\limits_0^N f(x,t,\tau)d\tau,$$

при $N \to \infty$ равномерно относительно $(x,t) \in G$ B^{ε} — сходится к некоторому отображению $F : G \to B^{\varepsilon}$.

1.6. Семейство отображений $D_x(F_N)$ при $N \to \infty$ равномерно относительно $(x,t) \in G$ $\mathrm{Hom}(B^{\alpha},B^{\varepsilon})$ — сходится.

Заметим, что из последнего условия вытекает непрерывная $(B^{\alpha},B^{\varepsilon})$ — дифференцируемость по первой переменной отображения F и равенство в $\mathrm{Hom}(B^{\alpha},B^{\varepsilon})$

$$\lim_{N\to\infty}(D_xF_N)(x,t) = D_xF(x,t).$$

Пусть $\beta \in [\alpha,1]$, $x_0 \in D \cap B^{\beta}$. Рассмотрим возмущенную и усредненную задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - A(t)\,x = f(x,t,\omega t), \\ x(0) = x_0, \quad t \in [0,T], \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - A(t)\,y = F(y,t), \\ y(0) = x_0, \quad t \in [0,T]. \end{cases} \quad (1.6)$$

Решением задачи (1.5) будем называть непрерывное отображение $x : [0,T] \to B^{\beta}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $x(t) \in D$ для любого $t \in [0,T]$ и $x(0) = x_0$;

2) $x(t) \in B^1$ для всех $t \in (0,T]$ (B^1 — область определения оператора A_0);

3) вектор-функция $x(t)$, рассматриваемая, как отображение в B, дифференцируема в каждой точке $t \in (0,T]$;

4) вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет при $t \in (0,T]$ дифференциальному уравнению (1.5).

Аналогично определяется решение задачи (1.6).

Через $C([0,T],E) \equiv H(E)$, где E — банахово пространство, будем обозначать обычное банахово пространство непрерывных вектор-функций $u : [0,T] \to E$ с max — нормой. Через $C_{\mu}([0,T],E) \equiv H_{\mu}(E)$, $\mu \in (0,1]$, обозначим банахово пространство вектор-функций $u \in C([0,T],E)$, удовлетворяющих условию:

$$\|u\|_{C_{\mu}([0,T],E)} = \max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_E + \sup_{0\leqslant t'<t''\leqslant T}\frac{\|u(t'')-u(t')\|_E}{|t''-t'|^{\mu}} < \infty.$$

Положим $H_0(E) \equiv H(E)$.

Теорема 1. Пусть данные задачи (1.5) удовлетворяют указанным выше условиям, и усредненная задача (1.6) имеет решение $y_0(t)$. Тогда существует такое $\omega_0 > 0$, что при всех $\omega > \omega_0$ задача (1.5) также имеет единственное решение $x_{\omega}(t)$, и при этом справедливо соотношение

$$\lim_{\omega\to\infty}\|x_{\omega} - y_0\|_{C([0,T],B^{\beta})} = 0.$$

При доказательстве этой теоремы, изложенном в разделах 2, 3, мы следуем схеме доказательства теоремы 2.1 И. Б. Симоненко [5] с привлечением соответсвующих результатов П. Е. Соболевского [2].

2. Известные вспомогательные результаты

Из результатов работы [2] следует, что при условиях 1.1 и 1.2, предъявленных к оператору $A(t)$, оператор $A^{\alpha}(t)$ подчинен оператору $A^{\beta}(\tau)$, $t,\ \tau\ \in\ [0,T]$ при $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, и существует эволюционный оператор $U(t,\tau)$, определенный и сильно непрерывный по совокупности переменных t, τ при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, который дифференцируем по t при $t > \tau$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,\tau) - A(t)U(t,\tau) = 0.$$

При этом справедливо тождество

$$U(t,\tau) = U(t,s)U(s,\tau),$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad U(t,t) = I.$$

Кроме того, при $x_0 \in B$ и всех $s \in [0,T)$ $x_s(t) = U(t,s)x_0$ определяет единственное непрерывное при $t \in [s,T]$ и непрерывно дифференцируемое при $t \in (s,T]$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - A(t)x = 0, \\ x(s) = x_0, \quad t \in [s,T]. \end{cases}$$

Далее, в силу [2] справедливы следующие оценки:

$$\|(-A)^{\gamma_1}(t)U(t,\tau)(-A)^{-\gamma_2}(\tau)\|_{\mathrm{Hom}(B,B)} \leqslant \leqslant c|t-\tau|^{\gamma_2-\gamma_1}, \quad (2.1)$$

$$0 \leqslant \gamma_2 \leqslant \gamma_1 < 1+\sigma, \quad t,\tau \in [0,T].$$

$$\|(-A)^{\gamma_1}(t)[U(t+\Delta t,\tau)- - U(t,\tau)](-A)^{-\gamma_2}(\tau)\|_{\mathrm{Hom}(B,B)} \leqslant \leqslant c\Delta t^{\mu_1}|t-\tau|^{\gamma_2-\gamma_1-\mu_1}, \quad (2.2)$$

$$0 \leqslant \gamma_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \gamma_2 \leqslant \mu_1+\gamma_1 < 1+\sigma,$$

$$0 \leqslant \mu_1 \leqslant 1, \quad t,\ \tau,\ t+\Delta t \in [0,T].$$

3. Доказательство основных результатов

Непосредственному доказательству теоремы предпошлем формулировки ряда лемм. Они близки к соответствующим результатам работы [5], относящимся, правда, к уравнениям со стационарной главной частью, ввиду чего доказательства лемм опущены.

Рассмотрим оператор V, действующий в $H(B)$ по правилу

$$(Vz)(t) = \int\limits_0^t U(t,\tau)z(\tau)d\tau$$

Лемма 1. Если $\eta,\ \delta,\ \mu\ \in\ [0,1]$, $0 \leqslant \mu < 1+\eta-\delta$, то оператор $V \in \mathrm{Hom}(H(B^{\eta}), H_{\mu}(B^{\delta}))$ и при этом для каждой вектор-функции $z \in H(B^{\eta})$ имеет место равенство

$$(-A_0)^{\delta}\big(Vz\big)(t) = = \int\limits_0^t (-A_0)^{\delta}\big[U(t,\tau)z(\tau)\big]\,d\tau. \quad (3.1)$$

Отметим, что при $\eta < \delta$ последний интеграл в равенстве (3.1) понимается как несобственный с особой точкой t. Он сходится в силу оценки (2.1)

Задача (1.5) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = U(t,0)x_0 + + \int\limits_0^t U(t,\tau)f(x(\tau),\tau,\omega\tau)d\tau, \quad (3.2)$$

а задача (1.6) — уравнению

$$y(t) = U(t,0)x_0 + + \int\limits_0^t U(t,\tau)F(y(\tau),\tau)d\tau. \quad (3.3)$$

Эти факты вытекают из следующего утверждения.

Лемма 2. Пусть $\eta > 0$, $\varphi \in H(B^{\eta})$, $z_0 \in B$. Тогда существует единственная вектор–функция z, удовлетворяющая условиям

1) $z \in H(B)$;
2) $z(0) = z_0$;
3) z дифференцируемо как отображение в пространство B;
4) $z(t) \in B^1$, $t \in (0,T]$;

5) $z'(t) = A(t)z(t) + \varphi(t), \quad t \in (0, T]$,
и эта вектор–функция определяется по формуле

$$z(t) = \int\limits_0^t U(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau + U(t,0)z_0.$$

Решения интегральных уравнений (3.2) и (3.3) ищем в классах вектор-функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) для всех $t \in [0,T] \quad x(t), y(t) \in D$;

2) $x, y \in H(B^\beta)$.

Пусть $G_\beta = \{z \in H(B^\beta) : z(t) \in D$ для всех $t \in [0,T]\}$, $\mu \in (0, 1+\sigma-\beta) \cap (0,1)$, $\omega > 0$. Тогда G_β — открытое подмножество $H(B^\beta)$, и операторы $V_{f,\omega}$ и V_F, действующие из G_β в $H_\mu(B^\beta)$ по правилу

$$(V_{f,\omega}z)(t) = \int\limits_0^t U(t,\tau)f(z(\tau),\tau,\omega\tau)d\tau,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$(V_F z)(t) = \int\limits_0^t U(t,\tau)F(z(\tau),\tau)d\tau,$$

$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

$\big(H(B^\beta), H_\mu(B^\beta)\big)$ — непрерывно дифференцируемы. При этом дифференциалы вычисляются по формулам

$$\Big\{\big[(DV_{f,\omega})(z)\big]\xi\Big\}(t) = \\ = \int\limits_0^t U(t,\tau)\big[(D_z f)(z(\tau),\tau,\omega\tau)\big]\xi(\tau)\,d\tau,$$

$$\Big\{\big[(DV_F)(z)\big]\xi\Big\}(t) = \\ = \int\limits_0^t U(t,\tau)\big[(D_z F)(z(\tau),\tau)\big]\xi(\tau)\,d\tau.$$

Эти представления легко устанавливаются с помощью леммы 1.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $D_\beta = D \cap B^\beta$, $x_0 \in B^\beta$. $\varphi : D_\beta \times [0,T] \to B^\varepsilon$ — непрерывное равномерно ограниченное отображение, (B^β, B^ε) — непрерывно дифференцируемое по первой переменной. Тогда не может существовать двух вектор-функций $z \in H(B^\beta)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) z как отображение в банахово пространство B непрерывно дифференцируемо на сегменте $(0,T]$;

2) при $t \in (0,T]$ $z(t) \in B^1$;

3) для каждого $t \in [0,T]$ $z(t) \in D_\beta$

4) $z'(t) = A(t)z(t) + \varphi(z(t),t)$, при $t \in (0,T]$;

5) $z(0) = x_0$

Приведем еще одну лемму.

Лемма 4. Пусть $\varphi : [0,T] \to \operatorname{Hom}(B^\beta, B^\varepsilon)$ — непрерывное и равномерно ограниченное отображение. Тогда оператор $M : H(B^\beta) \to H(B^\beta)$, определяемый равенством

$$\big(M\zeta\big)(t) = \int\limits_0^t U(t,\tau)\varphi(\tau)[\zeta(\tau)]d\tau,$$

является оператором Вольтерра.

Перейдем к доказательству теоремы.

Рассмотрим отображение $N_1 : G_\beta \times (0,\infty) \to$ $\to H_\mu(B^\beta)$, действующее по правилу

$$[N_1(\zeta,\omega)](t) = (V_{f,\omega}\zeta)(t),$$

где $\mu \in (0, 1+\sigma-\beta) \cap (0,1)$, $\quad \omega > 0$, G_β определено выше.

Отображения N_1 и $D_\zeta N_1$ ограничены в силу условий, налагаемых на отображение f. Нетрудно видеть, что отображение N_1 непрерывно и $(H(B^\beta), H_\mu(B^\beta))$ — непрерывно дифференцируемо по первому аргументу.

Для всех $\delta, \mu \geqslant 0$ и банахова пространства E определим пространство $H^\delta_\mu(E)$. Оно состоит из всех тех непрерывных отображений φ полусегмента $(0,T]$ в пространство E, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{H^\delta_\mu(E)} = \sup_{\varepsilon \in (0,T]} \varepsilon^\delta \Bigg[\max_{t \in [\varepsilon,T]} \|\varphi(t)\|_E + \\ + \sup_{\varepsilon \leqslant t' < t'' \leqslant T} \frac{\|\varphi(t'') - \varphi(t')\|_E}{|t''-t'|^\mu}\Bigg].$$

Введем банахово пространство

$$C_\mu(E) = H^\mu_\mu(E) \cap H(E) (\mu > 0)$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{C_\mu(E)} = \|\varphi\|_{H^\mu_\mu(E)} + \|\varphi\|_{H(E)}.$$

Введем обозначения: $G_{\beta,\mu} \equiv G_\beta \cap C_\mu(B^\beta)$, $(0,\infty] = (0,\infty) \cup \{\infty\}$.

Рассмотрим отображение $N_2 : G_{\beta,\mu}\times(0,\infty] \to \to H_\mu(B^\beta)$, определяемое следующим образом:

$$[N_2(\zeta,\omega)](t) = \begin{cases}[V_{f,\omega}\zeta](t), \text{ при } \omega \neq +\infty,\\ [V_F\zeta](t), \text{ при } \omega = +\infty.\end{cases}$$

Это отображение непрерывно и $\big(C_\mu(B^\beta), H_\mu(B^\beta)\big)$ — непрерывно дифференцируемо по первому переменному. Докажем непрерывность, непрерывная дифференцируемость доказывается аналогично.

В силу простого неравенства [5]

$$\|\zeta\|_{H_\mu(E)} \leqslant \|\zeta\|_{H(E)} + \\ + \Big(2\,\|\zeta\|_{H(E)}\Big)^{1-\mu/\mu_1} \|\zeta\|^{\mu/\mu_1}_{H_{\mu_1}(E)}$$

достаточно доказать, что N_2 ограничен, как оператор, действующий в $H_{\mu_1}(B^\beta)$, и непрерывен, как оператор, действующий в $H(B^\beta)$. Возьмем $\mu_1 \in (\mu, 1+\sigma-\beta)\cap(0,1)$. Тогда очевидно, что образ N_2 вложен в $H_{\mu_1}(B^\beta)$ и отображение N_2, как отображение, действующее из $G_{\beta,\mu}\times(0,\infty]$ в $H_{\mu_1}(B^\beta)$ ограничено.

Докажем, что отображение N_2 непрерывно действует в $H(B^\beta)$. В силу наложенных на f ограничений, и того, что N_1 есть непрерывное отображение, получим, что для любого числа $\delta > 0$ найдется такое число $\delta_1 > 0$, что при всех $\omega \in (0,\infty)$ и всех вектор-функциях $z,\zeta \in G_\beta$, таких что $\|z-\zeta\|_{H(B^\beta)} < \delta_1$ выполняется неравенство $\|N_2(z,\omega) - N_2(\zeta,\omega)\|_{H(B^\beta)} < \delta$. Таким образом, остается доказать, что для произвольной вектор-функции $\zeta_0 \in G_{\beta,\mu}$ отображение N_2 непрерывно в точке (ζ_0,∞). Зафиксируем $\zeta_0 \in G_{\beta,\mu}$ и рассмотрим следующую величину:

$$\|N_2(\zeta_0,\omega) - N_2(\zeta_0,\infty)\|_{H(B^\beta)} = \\ = \max_{t\in[0,T]}\left\| \int_0^t U(t,\tau)\big[f(\zeta_0(\tau),\tau,\omega\tau) - \\ - F(\zeta_0(\tau),\tau)\big]\,d\tau \right\|_{B^\beta}$$

Выберем $\epsilon_1 \in (0, T/2)$ так, чтобы выполнялись оценки:

$$\left\| \int_0^{\varepsilon_1} U(t,\tau)\big[f(\zeta_0(\tau),\tau,\omega\tau) - \\ - F(\zeta_0(\tau),\tau)\big]\,d\tau \right\|_{B^\beta} \leqslant \delta/3,$$

$$\left\| \int_{t-\varepsilon_1}^{t} U(t,\tau)\big[f(\zeta_0(\tau),\tau,\omega\tau) - \\ - F(\zeta_0(\tau),\tau)\big]\,d\tau \right\|_{B^\beta} \leqslant \delta/3.$$

Этого можно добиться в силу наложенных на f ограничений и леммы 1. Покажем теперь, что существует такое число $\omega_0 > 0$, что для всех $\omega > \omega_0$ и $t \in [2\varepsilon_1, T]$ имеет место оценка

$$\left\| \int_{\varepsilon_1}^{t-\varepsilon_1} U(t,\tau)\big[f(\zeta_0(\tau),\tau,\omega\tau) - \\ - F(\zeta_0(\tau),\tau)\big]\,d\tau \right\|_{B^\beta} \leqslant \delta/3.$$

Положим

$$M = \sup_{(z,t)\in G} \|f(z,t,\tau)\|_{B^\varepsilon},$$

$$M_1 = \sup_{\substack{\tau\in[0,t-\varepsilon_1]\\ a\in B,\|a\|_B<1}} \|U(t,\tau)a\|_{B^\beta},$$

$$M_2 = \sup_{\substack{\tau\in[0,t-\varepsilon_1]\\ a\in B^1,\|a\|_{B^1}<1}} \left\|\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial\tau}a\right\|_{B^\beta}.$$

Покажем, что существует семейство операторов $P_m \in \mathrm{Hom}(B^\varepsilon, B^1)$ $(m = 0,1,\dots)$ такое, что выполняется предельное соотношение

$$\|P_m - I\|_{\mathrm{Hom}(B^\varepsilon,B)} \to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Положим $P_m \equiv m(mI - A_0)^{-1}$. Ясно, что это семейство действует в B^1, так как для каждого фиксированного m $\left\|A_0 m(mI - A_0)^{-1}\right\|_{\mathrm{Hom}(B,B)} < \infty$. Покажем, что $\|P_m - I\|_{\mathrm{Hom}(B^\varepsilon,B)} \to 0$ при $m\to\infty$. Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}
&\|(P_m - I)x\|_B = \\
&= \big\|\big[m(mI - A_0)^{-1} - I\big]x\big\|_B = \\
&= \big\|\big[(I - m^{-1}A_0)^{-1} - I\big]x\big\|_B = \\
&= \big\|m^{-1}A_0(I - m^{-1}A_0)^{-1}x\big\|_B = \\
&= \big\|(-A_0)(mI - A_0)^{-1}x\big\|_B = \\
&= \big\|(-A_0)^{1-\varepsilon}(mI - A_0)^{-1}(-A_0)^{\varepsilon}x\big\|_B \leqslant \\
&\leqslant c\,\big\|(-A_0)(mI - A_0)^{-1}(-A_0)^{\varepsilon}x\big\|_B^{1-\varepsilon} \times \\
&\times \big\|(mI - A_0)^{-1}(-A_0)^{\varepsilon}x\big\|_B^{\varepsilon} \leqslant \\
&\leqslant c\,\big\|(-A_0)(mI - A_0)^{-1}\big\|_{\mathrm{Hom}(B^\varepsilon,B)}^{1-\varepsilon} \times \\
&\times \big\|(mI - A_0)^{-1}\big\|_{\mathrm{Hom}(B^\varepsilon,B)}^{\varepsilon}\,\|x\|_{B^\varepsilon} \leqslant \\
&\leqslant \frac{c_1}{1+m} \to 0 \text{ при } m \to \infty.
\end{aligned}$$

Здесь использовалось тождество $B^{-1} - C^{-1} \equiv \equiv C^{-1}(C - B)B^{-1}$ и неравенство моментов.

Выберем теперь $\delta_k > 0 (k = 1, \ldots, 5)$, натуральные n, K_1, K_2 так, чтобы выполнялись следующие оценки:

a) $4\delta_1 M_1 TM < \delta/15$;

b) для $m > K_1$ $\quad \|I - P_m\|_{\mathrm{Hom}(B^\varepsilon,B)} < \delta_1$;

c) $2\delta_2 M_2 M_3 TM < \delta/15$, где через M_3 обозначим $\sup\limits_{m>K_1} \|P_m\|_{\mathrm{Hom}(B^\varepsilon,B^1)}$;

d) $\delta_3 M_1 T < \delta/15$;

e) для всех $\tau \geqslant 0$ и $z', z'' \in D_\beta$, таких, что $\|z' - z''\|_{B^\beta} < \delta_4$, $\quad |t' - t''| < \delta_4$ выполняются оценки

$$\big\|F(z'', t'') - F(z', t')\big\|_{B^\varepsilon} < \delta_3,$$

$$\big\|f(z'', t'', \tau) - F(z', t'.\tau)\big\|_{B^\varepsilon} < \delta_3;$$

f) для всех t', t'' таких, что $\varepsilon_1 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant T - \varepsilon_1$, выполняется неравенство $\|\zeta_0(t'') - \zeta_0(t')\|_{B^\beta} < \delta_3$;

g) $T/n < \min\{\delta_2, \delta_4, \delta_5\}$;

h) для всех $N > K_2$ и $(z,t) \in G$ выполняется оценка

$$2nTM_1 \left\| F(z,t) - \frac{1}{N}\int\limits_0^N f(z,t,\tau)\,d\tau \right\|_{B^\varepsilon} < \delta/15.$$

Покажем, что ω_0 можно положить равным K_2/ε_1. Пусть $2\varepsilon_1 \leqslant t \leqslant T$ и $\omega > K_2/\varepsilon_1$. Положим $\tau_k = \varepsilon_1 + k\left(\frac{t-2\varepsilon_1}{n}\right)$ $\quad (k = 0, \ldots, n)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| \int\limits_{\varepsilon_1}^{t-\varepsilon_1} U(t,\tau)\big[f(\zeta_0(\tau),\tau,\omega\tau) - \\
&- F(\zeta_0(\tau),\tau)\big]d\tau \Bigg\|_{B^\beta} \leqslant I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 = \Bigg\| \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} &[U(t,\tau) - U(t,\tau_{i+1})] \times \\
&\times P_m\big[f(\zeta_0(\tau),\tau,\omega\tau) - F(\zeta_0(\tau),\tau)\big]d\tau \Bigg\|_{B^\beta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = \Bigg\| \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} &[U(t,\tau) - U(t,\tau_{i+1})]\,[I - P_m] \times \\
&\times \big[f(\zeta_0(\tau),\tau,\omega\tau) - F(\zeta_0(\tau),\tau)\big]d\tau \Bigg\|_{B^\beta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = \Bigg\| \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} &U(t,\tau_{i+1}) \times \\
&\times \big[F(\zeta_0(\tau_{i+1}),\tau_{i+1}) - F(\zeta_0(\tau),\tau)\big]d\tau \Bigg\|_{B^\beta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 = \Bigg\| \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} &U(t,\tau_{i+1})\big[f(\zeta_0(\tau_{i+1}),\tau_{i+1},\omega\tau) - \\
&- F(\zeta_0(\tau_{i+1}),\tau_{i+1})\big]d\tau \Bigg\|_{B^\beta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 = \Bigg\| \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} &U(t,\tau_{i+1})\big[f(\zeta_0(\tau),\tau,\omega\tau) - \\
&- f(\zeta_0(\tau_{i+1}),\tau_{i+1},\omega\tau)\big]d\tau \Bigg\|_{B^\beta}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$I_1 \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Bigg\| \Bigg[\int\limits_0^1 \frac{\partial U}{\partial \tau}(t, \tau_{i+1} + \\ + \theta(\tau - \tau_{i+1}))(\tau - \tau_{i+1}) d\theta \Bigg] \times \\ \times P_m \big[f(\zeta_0(\tau), \tau, \omega\tau) - F(\zeta_0(\tau), \tau) \big] \Bigg\|_{B^\beta} d\tau \leqslant \\ \leqslant 2\delta_2 M_2 M_3 T M < \delta/15,$$

$$I_2 \leqslant 4\delta_1 M_1 T M < \delta/15, \text{ в силу условий a) и b)}$$

$$I_3 \leqslant \delta_3 M_1 T < \delta/15, \text{ в силу условий d)–g)}$$

$$I_5 \leqslant \delta_3 M_1 T < \delta/15.$$

Оценим теперь I_4. В силу следующих равенств

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \cdots d\tau = \int\limits_0^{\tau_{i+1}} \cdots d\tau - \int\limits_0^{\tau_i} \cdots d\tau = \\ = \frac{\tau_{i+1}}{\omega\tau_{i+1}} \int\limits_0^{\omega\tau_{i+1}} \cdots d\tau - \frac{\tau_i}{\omega\tau_i} \int\limits_0^{\omega\tau_i} \cdots d\tau$$

выполняется следующее неравенство:

$$I_4 \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg\| U(t, \tau_{i+1}) \tau_{i+1} \Bigg[F(\zeta_0(\tau_{i+1}), \tau_{i+1}) - \\ - \frac{1}{\omega\tau_{i+1}} \int\limits_0^{\omega\tau_{i+1}} f(\zeta_0(\tau_{i+1}), \tau_{i+1}, s) ds \Bigg] \Bigg\|_{B^\beta} + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg\| U(t, \tau_{i+1}) \tau_i \Bigg[F(\zeta_0(\tau_{i+1}), \tau_{i+1}) - \\ - \frac{1}{\omega\tau_i} \int\limits_0^{\omega\tau_i} f(\zeta_0(\tau_{i+1}), \tau_{i+1}, s) ds \Bigg] \Bigg\|_{B^\beta}.$$

Так как $\omega > K_2/\varepsilon_1$, а $\tau_i \geqslant \varepsilon_1$, то $\omega\tau_i > K_1$, поэтому в силу условия h) $I_4 < \delta/15$. Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{5} I_k < \delta/3$, что и требовалось доказать.

Итак, задачи (1.5), (1.6) равносильны интегральным уравнениям (3.2), (3.3), решения которых ищутся в G_β. Эти решения принадлежат множеству $G_{\beta,\mu}$. В силу предыдущих рассуждений отображение $N : G_{\beta,\mu} \times B^\beta \times (0, \infty] \to C_\mu(B^\beta)$, определяемое равенством

$$[N(\zeta, x_0, \omega)](t) = \\ = \begin{cases} U(t,0)x_0 + [V_{f,\omega}\zeta](t), & \text{при } \omega \neq +\infty, \\ U(t,0)x_0 + [V_F\zeta](t), & \text{при } \omega = +\infty, \end{cases}$$

непрерывно и $(C_\mu(B^\beta), C_\mu(B^\beta))$ — непрерывно дифференцируемо по первому переменному. Для любых $\zeta \in G_{\beta,\nu}$ и $x_0 \in B^\beta$ дифференциал Фреше $(D_\zeta N)(\zeta, x_0, \omega)$ является оператором Вольтерра, а потому оператор $I - (D_\zeta N)(\zeta, x_0, \omega)$ в пространстве $C_\mu(B^\beta)$, где I — единичный оператор, обратим. Отсюда на основании теоремы о неявнях операторах справедлива теорема 1.

Литература

1. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений // Матем. сб. 1970 Т. 81(123). №1. С. 53–61.
2. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды Моск. матем. об-ва. 1961. №. 10. С. 297–350.
3. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Матем. сб. 1972. Т. 87(129). №2. С. 236–253.
4. Александров В. Ю., Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для параболических уравнений с переменной главной частью // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. Спец. выпуск. Исследования проблем механики сплошной среды. 2003. С. 92–95.
5. *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1989. 112 с.

Ключевые слова: абстрактные параболические уравнения с переменной главной частью, метод усреднения

Статья поступила 24 августа 2010 г.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ