УДК 517.929.2

ДОПУСТИМОСТЬ ПАР ПРОСТРАНСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ

Афанасьева Т. Н.[1]***, Цалюк З. Б.***[2]

ADMISSIBILITY COUPLES OF SPACES FOR LINEAR DIFFERENCE OPERATORS AND EQUATIONS

Afanasyeva T. N., Tsalyuk Z. B.

The assumptions are obtained for the subspace X of the space l_∞ under which the admissibility of the couple (l_∞, l_∞) for the linear difference operator follows from the admissibility of the couple (X, l_∞). Using this, the criterion for admissibility of the couple (X, X) for the linear difference equation is derived.

Keywords: linear difference equation, linear difference operator, space of bounded sequences, admissibility of couples of spaces

Рассмотрим линейное разностное уравнение

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}\mathbf{x}_k + \mathbf{f}_n,\ n \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_n, \mathbf{f}_n$ — векторы из C^m, $\mathbf{A}_{nk}$ — $m\times m$ матрицы с комплексными элементами. Матрица $A = \{\mathbf{A}_{nk}\}$ называется ядром уравнения (1).

Положим по определению

$$\sum_{k=i+1}^{i} \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Резольвентой ядра A называется матрица $R = \{\mathbf{R}_{nk}\}$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{R}_{nk} = \mathbf{A}_{nk} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \mathbf{A}_{ni}\mathbf{R}_{ik}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Резольвента R является единственным решением уравнения

$$\mathbf{R}_{nk} = \mathbf{A}_{nk} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \mathbf{R}_{ni}\mathbf{A}_{ik}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

и уравнение (1) всегда имеет единственное решение $x = \{\mathbf{x}_n\}$, представимое в виде

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{x}_k + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0.$$

Определение 1. Пусть F и X — некоторые подмножества. Пара (F, X) называется допустимой относительно уравнения (1), если при любом $f \in F$ решение $x \in X$.

Определение 2. Пара (F, X) называется допустимой относительно оператора $\tilde{A}$, если $\tilde{A}x \in X$ при любом $f \in F$.

Изучается допустимость различных пар пространств относительно разностных операторов

$$\tilde{A}x = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}\mathbf{x}_k \right\}$$

и разностных уравнений $x = \widetilde{A}x + f$. Так как решение $x = \widetilde{R}f + f$, где $\widetilde{R}$ — разностный оператор, порожденный резольвентой R ядра A, то каждый критерий допустимости пары (F, X), $F \subset X$ относительно оператора приводит к сформулированному в терминах резольвенты критерию допустимости этой пары относительно разностного уравнения. Но

[1]Афанасьева Татьяна Николаевна, старший преподаватель кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Кубанского государственного университета; e-mail: podpolkovnik23@rambler.ru

[2]Цалюк Зиновий Борисович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений Кубанского государственного университета; e-mail: dif@math.kubsu.ru

резольвента может быть найдена лишь в редких случаях, поэтому интерес представляют критерии, сформулированные в терминах ядра.

Обозначим через l_2^m линейное пространство векторов из C^m с нормой

$$\|\mathbf{x}\|_{l_2^m} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x^j|^2};$$

l_∞ — пространство ограниченных последовательностей векторов из C^m с нормой

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n\geqslant 0} \|\mathbf{x}_n\|_{l_2^m};$$

l_p (p=1,2) — подпространство l_∞ последовательностей с нормой

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\|_{l_2^m}^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

α_0 — подпространство l_∞ последовательностей, имеющих конечный предел при $n\to\infty$; c_0 — подпространство l_∞ последовательностей, имеющих нулевой предел при $n\to\infty$.

Для некоторых подпространств F из допустимости пары (F,F) относительно разностного уравнения следует его устойчивость. Естественным образом возникает задача описания подпространств, для которых это справедливо. Так как допустимость пары (F,l_∞) относительно разностного уравнения равносильна допустимости этой пары для оператора $\widetilde{R}$, то необходимо описать такие подпространства $F\subset l_\infty$, что из допустимости относительно разностного оператора пары (F,l_∞) следует допустимость пары (l_∞,l_∞). Решение этой задачи дает возможность, в частности, при рассмотрении вопроса о существовании ограниченных решений разностного уравнения воспользоваться более узким, чем l_∞, «пробным» множеством свободных членов f.

Определение 3. P-срезкой вектора

$$b = col(\mathbf{b}_0,\ldots,\mathbf{b}_{P-1},\mathbf{b}_P,\ldots)$$

называется вектор

$$b^P = col(\mathbf{b}_0,\ldots,\mathbf{b}_{P-1},\mathbf{0},\ldots).$$

Пусть X — некоторое подпространство l_∞, через X^P обозначим множество P-срезок векторов из X, K_r^P — шар радиуса r из множества P-срезок.

1. Рассмотрим линейное разностное уравнение (1), где $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{f}_n$ — векторы из R^m, $\mathbf{A}_{nk}$ — $m\times m$ матрицы с вещественными элементами. Пусть X — замкнутое линейное подпространство пространства l_∞.

Определение 4. Будем говорить, что замкнутое подпространство X обладает свойством (L), если существует такое число $r>0$, что для любого $N\geqslant 1$ единичный шар из X^N содержит шар радиуса r пространства N–срезок векторов из l_∞. Другими словами, линейное подпространство X обладает свойством (L), если существует такое число $r>0$, что для любого $N\geqslant 1$ выполняется включение $K_1^N(X)\supseteq K_r^N$.

Очевидно, фигурирующее в определении число $r\leqslant 1$. Пример подпространства $X=\{x\in l_\infty : \|\mathbf{x}_n\|\leqslant \varphi_n\}$, где $\inf\limits_{n\geqslant 0}\varphi_n = r$ и $r\in[0,1]$, показывает, что радиус r шара пространства N-срезок векторов из l_∞, который содержится в единичном шаре из X^N, может принимать любые значения из $(0,1]$.

Покажем, что если X обладает свойством (L) в пространстве l_∞, то существует такое число $r>0$, что для любого $N\geqslant 1$ и каждой N–срезки $u^N\in l_1$ справедливо неравенство

$$\sup_{x\in X,\,\|x\|\leqslant 1}\left|\sum_{k=0}^{N-1}(\mathbf{u}_k,\mathbf{x}_k)\right| \geqslant r\sum_{k=0}^{N-1}\|\mathbf{u}_k\|_{l_2^m}, \quad (2)$$

где

$$(\mathbf{u}_k,\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^{m} u_k^j x_k^j.$$

Действительно, рассмотрим в пространстве l_∞ линейный функционал

$$\varphi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1}(\mathbf{u}_k,\mathbf{x}_k), \quad N\geqslant 1.$$

Норма этого функционала равна

$$\|\varphi_N\| = \sum_{k=0}^{N-1}\|\mathbf{u}_k\|_1,$$

где $\|\mathbf{u}_k\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{m}|u_k^j|$ [1].

Сужение функционала φ_N на подпространство X будем обозначать той же буквой. Так как X обладает свойством (L) в l_∞, то найдется такое число $r>0$, что для любого $N \geqslant 1$ выполняется включение $K_1^N(X) \supseteq K_r^N$. Поэтому

$$\sup_{x\in X,\,\|x\|\leqslant 1} |\varphi_N(x)| \geqslant r \sup_{x\in l_\infty,\,\|x\|\leqslant 1} |\varphi_N(x)|.$$

Откуда следует неравенство (2).

Покажем, что и обратно, если существует такое число $r > 0$, что для любых N–срезок $u^N \in l_1$, $N \geqslant 1$ справедливо неравенство (2), то X обладает свойством (L) в l_∞. Можно считать, что $\left\|u^N\right\|_{l_1} = 1$. Тогда из неравенства (2) следует

$$\sup_{x\in X,\,\|x\|\leqslant 1} \left|(u^N, x)\right| \geqslant r. \tag{3}$$

Предположим, что X не обладает свойством (L) в l_∞. Тогда найдется такой номер N_l, начиная с которого единичный шар из X^N $(N \geqslant N_l)$ не содержит шар радиуса $\frac{1}{l}$ пространства N-срезок пространства l_∞.

Фиксируем l. Обозначим через через $\overline{X}^{N_l}$ — замыкание единичного шара из X^{N_l} в пространстве N_l-срезок векторов из l_2.Множество $\overline{X}^{N_l}$ — ограниченное, выпуклое и симметричное. Так как в пространстве N_l-срезок векторов из l_∞ все нормы эквивалентны, то множество $\overline{X}^{N_l}$ не может содержать в себе шар этого пространства радиуса, большего $\frac{c}{l}$ (c — коэффициент эквивалентности норм). Поэтому существует такой вектор

$$v^{N_l}, \quad \|v^{N_l}\| \leqslant \frac{2c}{l},$$

что $v^{N_l} \notin \overline{X}^{N_l}$. Пусть $\overline{v}^{N_l}$ — ближайший к v^{N_l} элемент из $\overline{X}^{N_l}$. Тогда для всех $x^{N_l} \in \overline{X}^{N_l}$ выполняется неравенство

$$(v^{N_l} - \overline{v}^{N_l},\, x^{N_l} - \overline{v}^{N_l}) \leqslant 0 \text{ [2]}.$$

Отсюда и из симметричности $\overline{X}^{N_l}$ следует, что для всех $x^{N_l} \in \overline{X}^{N_l}$ справедливо неравенство

$$|(v^{N_l} - \overline{v}^{N_l},\, x^{N_l})| \leqslant \|v^{N_l}\|\|v^{N_l} - \overline{v}^{N_l}\|.$$

Обозначим через

$$u^{N_l} = \|v^{N_l} - \overline{v}^{N_l}\|^{-1}(v^{N_l} - \overline{v}^{N_l}), \quad u^{N_l} \in l_1,$$

получим

$$\sup_{x^{N_l}\in \overline{X}^{N_l}} \left|(u^{N_l},\, x^{N_l})\right| \leqslant \frac{2c}{l}.$$

Следовательно, при достаточно больших l имеем неравенство

$$\sup_{x\in X,\,\|x\|\leqslant 1} \left|(u^N,\, x)\right| < r.$$

Полученное противоречие неравенству 3) показывает, что X обладает свойством (L) в l_∞.

Доказанное выше позволяет переформулировать определение свойства (L) следующим образом

Определение 5. Замкнутое подпространство X обладает свойством (L) в пространстве l_∞, если существует такое число $r > 0$, что для любого $N \geqslant 1$ и каждой N-срезки $u^N \in l_1$ выполнено неравенство (2).

Далее считаем, что $\|u^N\|_{l_1} = 1$. Пусть

$$\|\mathbf{A}_{nk}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} |a_{nk}^{ij}|.$$

Теорема 1. Если X обладает свойством (L) в l_∞ и пара (X, l_∞) допустима относительно оператора $\tilde{A}$, то

$$M = \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{A}_{nk}\| < \infty. \tag{4}$$

Обратно, если для любого оператора $\tilde{A}$, для которого пара (X, l_∞) допустима, выполняется условие (4), то X обладает свойством (L) в l_∞.

Доказательство. Пусть пара (X, l_∞) допустима относительно оператора $\tilde{A}$. При любом натуральном N и каждом натуральном $1 \leqslant i \leqslant m$ определим в X ограниченный линейный функционал

$$\varphi_N^i(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{m} a_{Nk}^{ij} x_k^j.$$

Т. к. при каждом $x \in X$ множество значений функционалов $\varphi_N^i(x)$, $N \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$ ограничено, то по принципу равномерной ограниченности $\left\|\varphi_N^i\right\|_X \leqslant C$. Подпространство X обладает свойством (L) в l_∞, тогда, по определению 5, имеем неравенство

$$\left\|\varphi_N^i\right\|_X \geqslant r \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{A}_{Nk}\|.$$

Таким образом, выполняется неравенство (4).

Обратно, пусть X не обладает свойством (L) в l_∞. Построим оператор, для которого пара (X, l_∞) допустима, но условие (4) не выполняется. В силу определения 5, для каждого $r > 0$, в частности, $r = \frac{1}{N}$, найдется такая N–срезка $u^N \in l_1$, что справедливо неравенство

$$\sup_{x\in X,\,\|x\|\leqslant 1} \left|(u^N, x)\right| < \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{u}_k\|_{l_2^m}. \qquad (5)$$

Определим ядро

$$A = \left\{a_{nk}^{ij}\right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

следующим образом:

$$a_{Nk}^{1j} = N u_k^j, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

$$a_{nk}^{ij} = 0 \text{ для } i = 2, 3, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad n \neq N.$$

Пусть $\tilde{A}$ разностный оператор с ядром A. Тогда при $x \in X$ и $n = N$ имеем, в силу неравенства (5),

$$\left\|(\tilde{A}x)_N\right\| = \left|\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{m} a_{Nk}^{1j} x_k^j\right| = $$
$$= N\left|\left(u^N, \frac{x}{\|x\|_{l_\infty}}\right)\right| \|x\|_{l_\infty} < \|x\|_{l_\infty}.$$

Следовательно, если $x \in X$, то $\tilde{A}x \in l_\infty$. Откуда пара (X, l_∞) допустима относительно оператора $\tilde{A}$. С другой стороны, при $n = N$ получим

$$\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{m} |a_{Nk}^{1j}| = N\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{m} |u_k^j| \geqslant N$$

и потому $\sup\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{A}_{nk}\| = \infty$. $\square$

Следствие 1. Для того, чтобы пара (l_∞, l_∞) была допустима относительно оператора $\widetilde{A}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (4). Если оператор $\widetilde{A}$ действует из l_∞ в l_∞, то он непрерывен и норма $\|\widetilde{A}\| \leqslant M$.

Для числовой последовательности

$$e = (1, \ldots, 1, 1, \ldots)$$

обозначим P-срезку

$$e^P = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{P}, 0, \ldots).$$

Пусть D — некоторое подмножество l_∞. Обозначим через $\Pi(D)$ — множество таких последовательностей $m \times m$ — матриц $\mathbf{A}_n$, каждая последовательность одноименных столбцов которых лежит в D. Таким образом, $\{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\} \in D$ при любом $\mathbf{x} \in R^m$.

Теорема 2. Пусть D — замкнутое линейное подпространство l_∞. Пара (c_0, D) допустима относительно оператора $\widetilde{A}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (4) и при любом $N \geqslant 0$

$$\{\mathbf{A}_{nN}\} \in \Pi(D). \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть пара (c_0, D) допустима относительно оператора $\widetilde{A}$. Тогда $\widetilde{A}(c_0) \subset D$ и так как пространство c_0 обладает свойством (L) (с $r = 1$), то, в силу теоремы 1, справедливо условие (4). Далее, при любых

$$\mathbf{x} \in R^m \text{ и } N \geqslant 0$$

последовательность

$$u^N = \{\mathbf{u}_n^N\}, \quad \mathbf{u}_n^N = e_n^{N+1}\mathbf{x} - e_n^N\mathbf{x}, \quad n \geqslant 0,$$

(где e^{N+1} и e^N — N+1 и N-срезки e), принадлежит c_0, и, значит,

$$\widetilde{A}u^N = \{\mathbf{A}_{nN}\mathbf{x}\} \in D.$$

Обратно, пусть выполнены условия (4) и (6). Для произвольного вектора $x \in l_\infty$ определим последовательность — разность срезок

$$v^N = x^{N+1} - x^N, \quad N \geqslant 0.$$

Обозначим через T — множество всех последовательностей v^N, $N \geqslant 0$, через $L(T)$ — линейную оболочку, натянутую на T, а через $\overline{L(T)}$ — замыкание $L(T)$ в l_∞. Из условия (6) следует, что для любой последовательности $u \in T$ выполняется включение

$$\{(\widetilde{A}u)_n\} = \{\mathbf{A}_{nN}\mathbf{x}_N\} \in D, \quad N \geqslant 0.$$

Так как $\widetilde{A}$ — линейный оператор, то

$$\widetilde{A}(L(T)) \subset D.$$

Согласно следствия 1 теоремы 1 оператор $\widetilde{A}$ непрерывен в l_∞. Отсюда и из замкнутости D следует

$$\widetilde{A}(\overline{L(T)}) \subset \overline{\widetilde{A}(L(T))} \subset \overline{D} = D,$$

т. е. пара $(\overline{L(T)}, D)$ допустима относительно оператора $\widetilde{A}$. Для того, чтобы доказать допустимость пары (c_0, D) достаточно показать, что $\overline{L(T)} \supset c_0$. Возьмем произвольную последовательность $x \in c_0$ и число $\epsilon > 0$. Существует такой номер N_0, что $\|\mathbf{x}_n\| \leqslant \epsilon$ при $n \geqslant N_0$. Рассмотрим N_0–срезку $x^{N_0} \in L(T)$. Имеем

$$\left\|x - x^{N_0}\right\| = \sup_{n \geqslant N_0} \|\mathbf{x}_n\| \leqslant \epsilon.$$

Это означает, что $L(T)$ плотно в c_0. □

Следствие 2. Пусть выполнено условие (4) и при любом $N \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_{nN} = \mathbf{0}.$$

Тогда пара (c_0, c_0) допустима относительно оператора $\widetilde{A}$.

Теорема 3. Пусть D — замкнутое подпространство l_∞. Пара (α_0, D) допустима относительно оператора $\widetilde{A}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (4), (6) и

$$\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}\right\} \in \Pi(D). \tag{7}$$

Доказательство. Так как $\alpha_0 = c_0 \oplus R^m$ ($\oplus$ — прямая сумма пространств), то допустимость пары (α_0, D) относительно оператора $\widetilde{A}$ равносильна одновременной допустимости относительно $\widetilde{A}$ пар (c_0, D) и (R^m, D). Допустимость первой пары, в силу теоремы 2, равносильна (4) и (6), допустимость второй пары равносильна (7). □

При изучении вопросов допустимости различных пар пространств относительно разностных уравнений допустимость оказывается тесно связанной с устойчивостью уравнения. Уравнение (1) или ядро A устойчиво, если $\widetilde{R}(l_\infty) \subset l_\infty$.

2. Рассмотрим линейное разностное уравнение (1), где $\mathbf{A}_{nk}$ — $m \times m$ матрицы с вещественными положительными элементами.

Если $\widetilde{A}$ — линейный разностный оператор с ядром A, то его степени $\widetilde{A}^l$, $l = 2, 3, \ldots$ также являются линейными разностными операторами. Обозначим через

$$A_l = \{(\mathbf{A}_l)_{nk}\}$$

ядро оператора $\widetilde{A}^l$ и

$$(\mathbf{A}_l)_{nk} = \sum_{i=k+1}^{n-1} \mathbf{A}_{ni}(\mathbf{A}_{l-1})_{ik}.$$

Ясно, что $A_1 = A$.

Определение 6. Ядро A_l, $l \geqslant 2$ оператора $\widetilde{A}^l$ называется l-тым итерированным ядром ядра A.

Для векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$ положим $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$, если $x^j \geqslant y^j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, для $m \times m$ матриц $\mathbf{A} = \left\{a^{ij}\right\}$, $\mathbf{B} = \left\{b^{ij}\right\}$ — $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{B}$ при $a^{ij} \geqslant b^{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Пусть

$$|\mathbf{x}| = col\left(|x^1|, \ldots, |x^m|\right), \quad \mathbf{x} \in R^m.$$

Для числовой последовательности

$$e = (1, \ldots, 1, 1, \ldots)$$

обозначим m-срезку

$$\mathbf{e}^m = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, 0, \ldots).$$

Теорема 4. Пусть $\mathbf{A}_{nk} \geqslant \mathbf{0}$ при $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и ядро A устойчиво, X — замкнутое подпространство l_∞. Для допустимости пары (X, X) относительно уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{A}(X) \subset X$.

Доказательство. Пусть пара (X, X) допустима относительно оператора $\widetilde{A}$. Ядро A устойчиво, следовательно, найдутся такие $\alpha \in (0; 1)$ и последовательность $\gamma \in l_\infty$, что $\boldsymbol{\gamma}_n \geqslant \mathbf{e}^m$ и

$$(\widetilde{A}\gamma)_n \leqslant \alpha \boldsymbol{\gamma}_n, \; n \geqslant 0. \tag{8}$$

Действительно, обозначим через γ — решение уравнения

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}\boldsymbol{\gamma}_k + \mathbf{e}^m,$$

$n \geqslant 0$. Так как решение этого уравнения

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{e}^m + \mathbf{e}^m,$$

то
$$\boldsymbol{\gamma}_n \geqslant \mathbf{e}^m, \quad n \geqslant 0 \text{ и } \gamma \in l_\infty.$$
Положим
$$\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=0}^{n-1}\|\mathbf{R}_{nk}\| = C < \infty \ \ [3],$$
тогда
$$\boldsymbol{\gamma}_n \leqslant (C+1)\mathbf{e}^m.$$
Поэтому
$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}_{nk}\boldsymbol{\gamma}_k = \boldsymbol{\gamma}_n - \mathbf{e}^m \leqslant \alpha\boldsymbol{\gamma}_n,$$
где
$$\alpha = 1 - \frac{1}{C+1} \in (0;1).$$
Следовательно, условие (8) выполнено.

Далее, допустим
$$(\widetilde{A}^l\gamma)_n \leqslant \alpha^l\boldsymbol{\gamma}_n, \ n \geqslant 0. \tag{9}$$
Из положительности A следует
$$(\widetilde{A}^{l+1}\gamma)_n \leqslant \alpha(\widetilde{A}^l\gamma)_n \leqslant \alpha^{l+1}\boldsymbol{\gamma}_n, \quad n \geqslant 0.$$
Таким образом, неравенство (9) справедливо при всех l.

Пусть $x \in l_\infty$. Тогда при некотором c (зависящим от выбранной в R^m нормы)
$$|\mathbf{x}_n| \leqslant c\|x\|\mathbf{e}^m \leqslant c\|x\|\boldsymbol{\gamma}_n.$$
Отсюда, из (9) и положительности A следует
$$\|\widetilde{A}^l x\| = \Big\||\widetilde{A}^l x|\Big\| \leqslant c\|x\|\alpha^l\|\gamma\|.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty}\|\widetilde{A}^l\|$ сходится и, значит, сходится в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих из l_∞ в l_∞, и ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty}\widetilde{A}^l$. Так как $\widetilde{A}(X) \subset X$, то и $\widetilde{A}^l(X) \subset X$. Поэтому при $f \in X$ и любом N сумма $\sum\limits_{l=0}^{N}\widetilde{A}^l f \in X$, откуда в силу замкнутости X получим
$$x = \lim_{N\to\infty}\sum_{l=0}^{N}\widetilde{A}^l f \in X.$$
Таким образом, пара (X, X) допустима относительно уравнения (1).

Обратно, пусть пара (X, X) допустима относительно уравнения (1). При $\lambda \neq 0$ обозначим через R_λ деленную на λ резольвенту ядра λA. Положим также $R_0 = A$. Тогда при любом λ имеем
$$(\mathbf{R}_\lambda)_{nk} = \sum_{l=1}^{\infty}\lambda^{l-1}(\mathbf{A}_l)_{nk}.$$
Отсюда и положительности $(\mathbf{A}_l)_{nk}$ при $\lambda \in [0;1]$ следует неравенство
$$0 \leqslant (\mathbf{R}_\lambda)_{nk} \leqslant (\mathbf{R}_1)_{nk} = \mathbf{R}_{nk},$$
и, значит,
$$\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=0}^{n-1}\|(\mathbf{R}_\lambda)_{nk}\| \leqslant C < \infty. \tag{10}$$
Пусть $\widetilde{R}_\lambda$ — разностный оператор с ядром R_λ. Из определения R_λ имеем
$$\widetilde{R}_\lambda = \widetilde{A} + \lambda\widetilde{A}\widetilde{R}_\lambda = \widetilde{A} + \lambda\widetilde{R}_\lambda\widetilde{A}.$$
Отсюда
$$\widetilde{R}_\lambda - \widetilde{R}_{\lambda_0} = \lambda_0\widetilde{A}(\widetilde{R}_\lambda - \widetilde{R}_{\lambda_0}) + (\lambda-\lambda_0)\widetilde{A}\widetilde{R}_\lambda$$
или
$$(I - \lambda_0\widetilde{A})(\widetilde{R}_\lambda - \widetilde{R}_{\lambda_0}) = (\lambda-\lambda_0)\widetilde{A}\widetilde{R}_\lambda.$$
Так как
$$(I - \lambda_0\widetilde{A})^{-1} = I + \lambda_0\widetilde{R}_{\lambda_0},$$
то
$$\widetilde{R}_\lambda - \widetilde{R}_{\lambda_0} = (\lambda-\lambda_0)\widetilde{R}_{\lambda_0}\widetilde{R}_\lambda.$$
Полученное равенство можно записать в виде
$$[I - (\lambda-\lambda_0)\widetilde{R}_{\lambda_0}]\widetilde{R}_\lambda = \widetilde{R}_{\lambda_0}.$$
Откуда
$$\widetilde{R}_\lambda = \Big[I - (\lambda-\lambda_0)\widetilde{R}_{\lambda_0}\Big]^{-1}\widetilde{R}_{\lambda_0}. \tag{11}$$
Из (10) следует, что при любом $\lambda \in [0;1]$ пара (l_∞, l_∞) допустима относительно $\widetilde{R}_\lambda$ и $\|\widetilde{R}_\lambda\| \leqslant C$. Поэтому при $|\lambda-\lambda_0|C < 1$ и $\lambda, \lambda_0 \in [0;1]$ ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^l\widetilde{R}_{\lambda_0}^l$ сходится в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в l_∞, и
$$\Big[I - (\lambda-\lambda_0)\widetilde{R}_{\lambda_0}\Big]^{-1} = I + \sum_{l=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^l\widetilde{R}_{\lambda_0}^l.$$

Отсюда и из (11) имеем при $|\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{C}$ и $\lambda, \lambda_0 \in [0;1]$

$$\widetilde{R}_\lambda = \sum_{l=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{l-1}\widetilde{R}^l_{\lambda_0}, \tag{12}$$

причем стоящий справа ряд сходится в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в l_∞. По условию, пара (X,X) допустима относительно уравнения (1). Следовательно, она допустима и относительно оператора $\widetilde{R}_1=\widetilde{R}$. Из (12) при $\lambda_0=1$ следует, что пара (X,X) допустима относительно $\widetilde{R}_\lambda$ при $\lambda\in\left[1-\frac{1}{2C};1\right]$. Полагая в (12) $\lambda_0=1-\frac{1}{2C}$, найдем, что пара (X,X) допустима относительно $\widetilde{R}_\lambda$ при $\lambda\in\left[1-\frac{1}{C};1-\frac{1}{2C}\right]$, $\lambda\geqslant 0$. Повторяя эту процедуру достаточное число раз, получим, что пара (X,X) допустима относительно $\widetilde{R}_0=\widetilde{A}$. $\Box$

Естественно возникает вопрос: а не будет ли справедлив аналог теоремы 4 и для неположительных ядер. Эта проблема, несмотря на многочисленные усилия до сих пор остается открытой. Однако для основных подпространств утверждение справедливо.

3. Рассмотрим линейное разностное уравнение (1), где $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{f}_n\}$ — векторы из C^m, $\mathbf{A}_{nk}$ — $m\times m$ матрицы с комплексными элементами.

Теорема 5. Если ядро A устойчиво и оператор $\widetilde{A}$ переводит c_0 в c_0, то пара (c_0,c_0) допустима относительно уравнения (1).

Если оператор $\widetilde{A}$ действует в l_∞, то справедливо обратное утверждение: из допустимости относительно уравнения (1) пары (c_0,c_0) следует, что $\widetilde{A}(c_0)\subset c_0$ и ядро A устойчиво.

Доказательство. Пусть ядро A устойчиво, $\widetilde{A}(c_0)\subset c_0$ и $f\in c_0$. Покажем, что решение x уравнения (1) также принадлежит c_0.

Фиксируем $N\geqslant 1$. Возьмем N-срезку x^N, $\mathbf{x}_n\in C^m$. Обозначим

$$f^N=x^N-\widetilde{A}x^N,\quad y^N=x-x^N,\quad \varphi^N=f-f^N.$$

Так как $x^N\in c_0$ и $\widetilde{A}(c_0)\subset c_0$, то $f^N\in c_0$, а, значит, $\varphi^N\in c_0$ при $N\geqslant 1$. В силу теоремы 1 [3], оператор $\widetilde{A}$ ограничен в пространстве l_∞, а так как последовательность x^N ограничена, то ограничены и последовательности f^N и φ^N, так, в частности, $\|\varphi^N\|\leqslant C$ при некотором C. Поэтому $\|\varphi^{N_0}\|\leqslant C+1$.

Пусть уже построены

$$\varphi^{N_0},\ldots,\varphi^{N_{k-1}},\varphi^{N_k},$$

$$N_{i+1}>N_i,\quad 0\leqslant i\leqslant k-1$$

так, что

$$\left\|\varphi^{N_0}+\ldots+\varphi^{N_{k-1}}+\varphi^{N_k}\right\|\leqslant C+1.$$

Найдем N_{k+1} и $\varphi^{N_{k+1}}$ ($N_{k+1}>N_k$) такие, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n^{N_0}+\ldots+\boldsymbol{\varphi}_n^{N_{k-1}}+\boldsymbol{\varphi}_n^{N_k}\|\leqslant 1$$

при $n\geqslant N_{k+1}$ и $\boldsymbol{\varphi}_n^{N_{k+1}}=\mathbf{0}$ при $0\leqslant n\leqslant N_{k+1}-1$. Это можно сделать, т. к.

$$\varphi^{N_0}+\ldots+\varphi^{N_{k-1}}+\varphi^{N_k}\in c_0$$

и $\boldsymbol{\varphi}_n^N=\mathbf{0}$ при $0\leqslant n\leqslant N-1$. Тогда

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n^{N_0}+\ldots+\boldsymbol{\varphi}_n^{N_k}+\boldsymbol{\varphi}_n^{N_{k+1}}\|\leqslant C+1$$

при $0\leqslant n\leqslant N_{k+1}-1$ и

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n^{N_0}+\ldots+\boldsymbol{\varphi}_n^{N_k}+\boldsymbol{\varphi}_n^{N_{k+1}}\|\leqslant 1+C$$

при $n\geqslant N_{k+1}$. Следовательно,

$$\|\boldsymbol{\varphi}_n^{N_0}+\ldots+\boldsymbol{\varphi}_n^{N_{k-2}}+\boldsymbol{\varphi}_n^{N_{k-1}}\|\leqslant C+1$$

и

$$\phi^k=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\varphi^{N_j}\to 0$$

при $k\to\infty$ в l_∞. Так как ядро A устойчиво и

$$u^k=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}y^{N_j}=\widetilde{A}u^k+\phi^k,$$

то $u^k\to 0$ при $k\to\infty$. Выберем $\epsilon>0$, и пусть $\|u^p\|\leqslant\epsilon$. Тогда при $n\geqslant N_{p-1}$ имеем

$$\|\mathbf{x}_n\|=\left\|\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\mathbf{y}_n^{N_j}\right\|=\|\mathbf{u}_n^p\|\leqslant\epsilon.$$

Следовательно, $\mathbf{x}_n\to\mathbf{0}$ при $n\to\infty$, т. е. пара (c_0,c_0) допустима относительно уравнения (1).

Обратно, пусть оператор $\widetilde{A}$ действует в l_∞ и уравнение (1) асимптотически устойчиво. В силу теорем 2 и 3 [3], $\widetilde{R}(c_0)\subset c_0$. Для ядра $-R$ резольвентой является $-A$, а так как $-\widetilde{A}$ действует в l_∞, то уравнение $u=-\widetilde{R}u+\varphi$ устойчиво. Отсюда, из включения $-\widetilde{R}(c_0)\subset c_0$ и первого утверждения теоремы следует, что пара (c_0,c_0) допустима относительно уравнения $u = -\widetilde{R}u + \varphi$. В силу теорем 2 и 3 [3], пара (c_0, c_0) допустима относительно оператора $-\widetilde{A}$, а, значит, и относительно оператора $\widetilde{A}$. $\square$

Подобное утверждение справедливо и для пространства α_0.

Теорема 6. Пусть ядро A удовлетворяет условию (4) и пара (l_∞, l_∞) допустима относительно уравнения (1). Пара (α_0, α_0) допустима относительно уравнения (1) тогда и только тогда, когда она допустима относительно оператора $\widetilde{A}$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{A}(\alpha_0) \subset \alpha_0$ и числовая последовательность $u^N = e - e^N$ (e^N — N-срезка числовой последовательности e). Определим матрицу $\mathbf{\Phi}_n^N$ равенством

$$\mathbf{\Phi}_n^N = u_n^N \mathbf{I} - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nj} u_j^N, \quad n \geqslant 0,$$

где $\mathbf{I}$ — единичная $m \times m$ матрица. Так как $\widetilde{A}(\alpha_0) \subset \alpha_0$, то существуют матрицы

$$\overline{\mathbf{\Phi}}^N = \lim_{n\to\infty} \mathbf{\Phi}_n^N.$$

Из условия (4) следует, что последовательность $\left\{\mathbf{\Phi}_n^N\right\}$ ограничена, а, значит, ограничена и последовательность $\left\{\overline{\mathbf{\Phi}}^N\right\}$. Поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, считаем сходящейся всю последовательность $\left\{\overline{\mathbf{\Phi}}^N\right\}$. Пусть

$$\overline{\mathbf{\Phi}} = \lim_{N\to\infty} \overline{\mathbf{\Phi}}^N.$$

Покажем, что $\overline{\mathbf{\Phi}}$ невырожденная матрица. Действительно, пусть $\overline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Так как $\mathbf{\Phi}_n^N \mathbf{h} = \mathbf{0}$ при $0 \leqslant n \leqslant N-1$ и

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{\Phi}_n^N \mathbf{h} = \overline{\mathbf{\Phi}}\mathbf{h} = \mathbf{0},$$

то последовательность $\left\{\mathbf{\Phi}_n^N \mathbf{h}\right\}$ сходится к нулю в пространстве α_0 [4]. Следовательно, в силу теоремы Мазура [5], некоторая последовательность выпуклых комбинаций

$$\boldsymbol{\phi}_n^l = \sum_{k=1}^{q_l} \alpha_k^{(l)} \mathbf{\Phi}_n^k \mathbf{h}$$

$$\left(\alpha_k^{(l)} \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{q_l} \alpha_k^{(l)} = 1\right)$$

сходится к нулю по норме пространства α_0. Отсюда, из устойчивости уравнения (1) и равенства

$$\sum_{k=1}^{q_l} \alpha_k^{(l)} u_n^k \mathbf{h} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nj} \left[\sum_{k=1}^{q_l} \alpha_k^{(l)} u_j^k \mathbf{h}\right] + \boldsymbol{\phi}_n^l$$

вытекает, что последовательность векторов

$$\left\{\sum_{k=1}^{q_l} \alpha_k^{(l)} u_n^k \mathbf{h}\right\}$$

сходится к нулю по норме пространства α_0. Поэтому

$$\lim_{l\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{q_l} \alpha_k^{(l)} u_n^k \mathbf{h} = \mathbf{h} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, матрица $\overline{\mathbf{\Phi}}$ обратима. Следовательно, обратимы при достаточно больших N и матрицы $\overline{\mathbf{\Phi}}^N$. Не ограничивая общности, будем считать обратимыми все $\overline{\mathbf{\Phi}}^N$.

Пусть $x \in l_\infty$, x^N — N–срезка последовательности x. Положим

$$v = \{\mathbf{v}_n\}, \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{x}_n^N + u_n^N \mathbf{x}_N, \quad n \geqslant 0.$$

Так как $\widetilde{A}(\alpha_0) \subset \alpha_0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} (\widetilde{A}v^N)_n$, а, следовательно, и

$$\overline{\mathbf{y}}^N = \lim_{n\to\infty} \left[-\mathbf{v}_n^N + (\widetilde{A}v^N)_n + \mathbf{f}_n\right].$$

Обозначим через

$$\mathbf{y}_n^N = u_n^N \left[\overline{\mathbf{\Phi}}^N\right]^{-1} \overline{\mathbf{y}}^N,$$

$$z^N = v^N + y^N \text{ и } f^N = z^N - \widetilde{A}z^N.$$

Вектор $z^N \in \alpha_0$ и последовательность $\left\{z^N\right\}$ ограничена в l_∞. Из условия (4) следует, что ограничена и последовательность $\left\{f^N\right\}$. Так как $\mathbf{y}_n^N = \mathbf{0}$ при $0 \leqslant n \leqslant N-1$, а $\mathbf{v}_n^N = \mathbf{x}_n$ при тех же n, то $\mathbf{f}_n^N = \mathbf{f}_n$ при $0 \leqslant n \leqslant N-1$. Кроме того, из

$$\lim_{n\to\infty} \left[\mathbf{y}_n^N - \sum_{j=0}^{n-1} (\widetilde{A}y^N)_j\right] = \overline{\mathbf{y}}^N$$

следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{f}_n^N = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{f}_n$. Следовательно, некоторая последовательность выпуклых комбинаций f^N сходится по норме пространства l_∞ к f [5]. В силу устойчивости уравнения (1), последовательность соответствующих комбинаций z^N сходится по норме в l_∞ к

x, а так как $z^N \in \alpha_0$, то и $x \in \alpha_0$. Этим доказана допустимость относительно уравнения (1) пары (α_0, α_0).

Обратно, пусть пара (α_0, α_0) допустима относительно уравнения (1). Тогда она допустима и относительно оператора $\widetilde{R}$. Ядро $-A$ является резольвентой ядра $-R$. По теореме 1 [3] из условия (4) следует, что пара (l_∞, l_∞) допустима относительно уравнения $u = -\widetilde{R}u + \varphi$. Но тогда, в силу первой части доказательства, относительно этого уравнения допустима и пара (α_0, α_0). Значит, эта пара допустима и относительно оператора $-\widetilde{A}$, порожденного резольвентой $-A$ ядра $-R$. □

Литература

1. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
2. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. *Афанасьева Т. Н., Ойнас И. Л.* О допустимости некоторых пар пространств для разностного уравнения Вольтерра и об устойчивости его решений / Кубанский гос. университет. Краснодар, 2000. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 19.01.00, №94 В20ОО.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 750 с.
5. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

Ключевые слова: линейное разностное уравнение, линейный разностный оператор, пространство ограниченных последовательностей, допустимость пар пространств

Статья поступила 14 июня 2010 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Афанасьева Т. Н., Цалюк З. Б., 2010