УДК 539.3

# О БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ С НЕПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

***Бабешко В. А.*[2], *Евдокимова О. В.*[3], *Бабешко О. М.*[4]**

BLOCK ELEMENTS WITH NOT PLATE BOUNDARY

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M.

Block elements with a spherical boundary are constructed by the differential factorization method with application of the generalized factorization. Block elements for the ball and the space with the cutout ball for the boundary problems of the Helmholz equation were constructed. The case under consideration allows demonstrating the use of the method for problems solvable by other approaches.

Keywords: boundary-value problems, factorization, block element, functional equation, pseudo-differential equation, generalized factorization

Ряд задач механики деформируемого твердого тела, дефектоскопии, нанотехнологий требуют моделирования физико-механических процессов в областях как геометрически, так и физически сложного строения. В работах [1–4] предложен достаточно универсальный метод построения представления решений соответствующих граничных задач, использующих простейшие блочные элементы с плоскими границами. Однако в ряде случаев в областях со сложной границей оказывается более целесообразным использование блочных элементов, имеющих неплоские границы. Это, с одной стороны, уточняет решение задачи, описывая его более сложными, но зато и более точными функциями, а с другой — уменьшает количество блочных элементов, сокращая и количество псевдодифференциальных элементов.

Дифференциальным методом факторизации строятся блочные элементы с границей, имеющей сферическую форму. В отличие от подходов, изложенных в [1–4], где осуществляется простая факторизация, связанная с представлением группы поступательных движений пространства, в данном случае применяется обобщенная факторизация [5]. Она продиктована использованием представления группы вращений пространства, порожденной автоморфизмом шара, в одном случае и пространства с удаленным шаром как многообразий с краем в другом. Как и в работах [1–4], для описания блочного элемента строятся функциональные и псевдодифференциальные уравнения, а также представление решения граничной задачи. Ниже приведены блочные элементы для шара и пространства с вырезанным шаром, построенные для граничных задач уравнения Гельмгольца. Рассматриваемый случай позволяет продемонстрировать применение метода к задачам, решаемым с помощью других подходов. В процессе применения метода вскрываются отличительные особенно-

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (09-08-00170, 08-08-00468, 09-08-00171, 08-08-00669), программы Юг России, проекты (09-01-96500, 09-01-96503, 09-08-96522, 09-08-96527, 09-08-00294), проекта НШ-3765.2010.1, проекта ФЦП 2009-1.5-503-004-006, Гранта Президента МД-1554.2009.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru

[3]Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru

[4]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru

сти простой и обобщенной факторизаций, применение методов в неограниченной области, особенность удовлетворения граничных условий. Выбор уравнения граничной задачи связан также и с тем, что составляющими решений ряда граничных задач динамики деформируемого твердого тела являются решения именно этого уравнения.

**1.** Ниже для иллюстрации метода в качестве примера, построены блочные элементы для граничной задачи в шаровой области $\Omega_1$ радиуса $b$ и в пространстве с вырезанной шаровой областью $\Omega_2$ радиуса $a$ с границами $\partial\Omega_s$, $s = 1, 2$ для дифференциального уравнения Гельмгольца вида

$$\mathbf{Q}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \\ = \left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + k^2\right] \times \\ \times \psi(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (1)$$

Ниже показано, что псевдодифференциальные уравнения блочного элемента позволяют использовать все возможные варианты граничных условий для дифференциального уравнения в частных производных. Для этого рассматриваются граничные условия как Дирихле, так и Неймана.

В сферической системе координат $\theta$, $\varphi$, $r$ уравнение (1) для шара имеет вид

$$(\Delta + k_1^2)\psi = 0, \quad (2)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \\ + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

$$r, \theta, \varphi \in \Omega_1.$$

Аналогичное уравнение для полупространства с полостью берется в форме

$$(\Delta + k_2^2)w = 0, \quad r, \theta, \varphi \in \Omega_2. \quad (3)$$

Решения граничных задач для уравнений (2)–(3) ищутся в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s$.

Для исследования этого уравнения дифференциальным методом факторизации введем преобразование и обращение Фурье–Бесселя в сферических функциях вида

$$\mathbf{B}_2(l, m) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta, \varphi)\times \\ \times Y_l^{m-}(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = G(l, m),$$

$$\mathbf{B}_2^{-1}(\theta, \varphi)G = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} G(l, m)\times \\ \times Y_l^{m+}(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi),$$

$$\mathbf{B}_3(\lambda, l, m)g = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(r, \theta, \varphi)J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\times \\ \times Y_l^{m-}(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi r dr = \\ = G(\lambda, l, m), \quad (4)$$

$$\mathbf{B}_3^{-1}(r, \theta, \varphi)G = \\ = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int_0^{\infty} G(\lambda, l, m)J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r)\times \\ \times Y_l^{m+}(\theta, \varphi)\lambda d\lambda = g(r, \theta, \varphi).$$

Здесь $J_\nu(\lambda r)$ — функция Бесселя, $Y_l^m(\theta, \psi)$ — сферическая функция

$$Y_l^{m\pm}(\theta, \varphi) = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2l+1}{\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{\pm im\varphi}.$$

Применяя к уравнению (2) преобразования (3), построим внешнюю форму [6,7], которая принимает вид

$$\omega = Pb^2\sin\theta d\theta\wedge d\varphi + Qbdr\wedge d\theta + Rb\sin\theta d\varphi\wedge dr,$$

где $P$, $Q$, $R$ — некоторые функции.

Осуществим переход к функциональному уравнению. Оно представимо в форме [6,7]

$$K(\lambda)\Psi(l, m, \lambda) = \int_{\partial\Omega}\omega, \\ K(\lambda) = \lambda^2 - k_1^2. \quad (5)$$

В случае шара имеем

$$(\lambda^2 - k^2)\Psi(l, m, \lambda) = L_{lm}(\lambda),$$

$$L_{lm}(\lambda) = b^2\psi'_{lm}(b)T_{lm}(\lambda, b) - \\ - b^2\psi_{lm}(b)T'_{lm}(\lambda, b), \quad (6)$$

$$\psi_{lm}(r) = \mathbf{B}_2(l,m)\psi(r,\theta,\varphi),$$

$$T_{lm}(\lambda, r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r).$$

Для обеспечения автоморфизма и получения псевдодифференциального уравнения строится представление решения граничной задачи в виде

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \mathbf{B}_3^{-1}(r,\theta,\varphi)\frac{L_{lm}(\lambda)}{(\lambda^2 - k_1^2)}. \qquad (7)$$

Требование автоморфизма состоит в выполнении равенства [6, 7]

$$\psi(r,\theta,\varphi) = 0, \quad r > b. \qquad (8)$$

В результате несложных преобразований для рассматриваемой простой задачи получается псевдодифференциальное уравнение, вырождающееся в алгебрагическое,

$$L_{lm}(k_1) = 0. \qquad (9)$$

В сложных пространственных задачах это уравнение является псевдодифференциальным в прямом смысле.

На примере настоящей задачи уже можно наблюдать отличие обобщенной факторизации от простой: хотя характеристическое уравнение $K(\lambda)$ имеет два корня, соотношение (9) должно выполняться лишь для одного.

Аналогичная задача, рассматриваемая простой факторизацией в слое, потребовала бы выполнения соотношения (9) для обоих корней.

Используя псевдодифференциальное уравнение (9), рассмотрим постановку граничных задач для уравнения (2). В случае задания на границе $\partial\Omega$ условий Дирихле вида

$$\psi(b,\theta,\varphi) = \psi_0(b,\theta,\varphi) \qquad (10)$$

решение псевдодифференциального уравнения (9) получается в форме

$$\psi'_{lm}(b) = \frac{\psi_{lm0}(b)T'_{lm}(k_1,b)}{T_{lm}(k_1,b)}.$$

Здесь принято обозначение

$$\psi_{lm0}(b) = \mathbf{B}_2(l,m)\psi_0(b,\theta,\varphi).$$

В сложных пространственных задачах вместо алгебраического уравнения получается интегральное или интегродифференциальное уравнение. Для его решения применяется, например, интегральный метод факторизации [8]. Внеся полученные соотношение в (7) и осуществив необходимые преобразование, имеем при $r \to b$

$$\psi(r,\theta,\varphi) \to \psi_0(b,\theta,\varphi). \qquad (11)$$

Тот же алгоритмом применяется для решения задач с граничным условием Неймана. В этом случае вместо условия (10) на границе задается условие

$$\psi'(b,\theta,\varphi) = \psi_1(b,\theta,\varphi).$$

Решение псевдодифференциального уравнения имеет вид

$$\psi_{lm}(b) = \frac{\psi'_{lm1}(b)T_{lm}(k_1,b)}{T'_{lm}(k_1,b)}.$$

Здесь введено обозначение

$$\psi_{lm1}(b) = \mathbf{B}_2(l,m)\psi_1(b,\theta,\varphi).$$

Внеся это соотношение в (7), вновь получаем выполнение граничных условий, как и в задаче Дирихле, т. е.

$$\psi'(r,\theta,\varphi) \to \psi_1(b,\theta,\varphi), \quad r \to b, \qquad (12)$$

но для классической составляющей решения.

**Замечание.** Особо отметим, что найденное решение (7) граничной задачи в пространстве медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s$ состоит из классической составляющей и обобщенных функций. Если исходные граничные задачи поставлены для достаточно гладких граничных условий, например, обеспечивающих принадлежность решений Соболевским пространствам, то классическая составляющая совпадает с этим решением. Обобщенная составляющая появляется только в результате дифференцирования по нормали к границе $\partial\Omega$ носителя ступенчатой функции. Это обстоятельство детально разъяснено в [9], а также последующих работах авторов.

Соотношение (12) получено с учетом сделанного замечания. Таким образом, псевдодифференциальное уравнение заключает в себе все возможные варианты постановки граничных условий задачи.

**2.** Рассмотрим краевую задачу для пространства с шаровой полостью радиуса $a$ для

уравнения (3). В отличие от метода конечного элемента, блочный элемент может занимать и неограниченную область. Требование состоит в том, чтобы область была многообразием с краем и допускала автоморфизм. Заметим, что рассматриваемая краевая задача в неограниченной области при вещественном $k_2$ для корректности постановки нуждается в выполнении условия излучения на бесконечности, в качестве которого можно использовать, например, принцип предельного поглощения [10]. Этот принцип диктует требование соответствующего расположения контура интегрирования по параметру $\lambda$ в представлении оператора $\mathbf{B}_3^{-1}$ (4). Контур должен огибать вещественный полюс снизу. В дальнейшем это свойство расположения контура интегрирования и учитывается при применении указанного оператора.

Подобно предыдущему случаю, строится функциональное уравнение (5) с тем же представлением внешних форм. Для данной граничной задачи оно принимает вид

$$(\lambda^2 - k^2)W(l,m,\lambda) = N_{lm}(\lambda),$$

$$N_{lm}(\lambda) = b^2 w'_{lm}(a)P_{lm}(\lambda,a) - \\ - b^2 w_{lm}(a)P'_{lm}(\lambda,a), \quad (13)$$

$$w_{lm}(r) = \mathbf{B}_2(l,m)w(r,\theta,\varphi),$$

$$P_{lm}(\lambda,r) = \frac{1}{\sqrt{r}}H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(\lambda r).$$

Здесь $H^{(1)}_{\nu}(\lambda r)$ — функция Ханкеля первого рода.

Общее представление решения можно записать в виде

$$w(r,\theta,\varphi) = \mathbf{B}_3^{-1}(r,\theta,\varphi)\frac{N_{lm}(\lambda)}{(\lambda^2 - k_2^2)}. \quad (14)$$

Автоморфизм многообразия с краем — пространства с удаленным шаром, обеспечивается, если

$$w(r,\theta,\varphi) = 0, \quad r < a.$$

Это требование приводит к следующему псевдодифференциальному уравнению

$$w'_{lm}(a)P_{lm}(\lambda,a) - w_{lm}(a)P'_{lm}(\lambda,a) = 0. \quad (15)$$

Подобно предыдущей граничной задаче в рассматриваемой области $\Omega_2$ дифференциальным методом факторизации можно решать граничные задачи как с граничным условием Дирихле, так и Неймана, повторив практически все рассуждение из предыдущего пункта.

В случае задания граничного условия Дирихле

$$w(a,\theta,\varphi) = w_0(a,\theta,\varphi)$$

решение псевдодифференциального уравнения (15) представимо в форме

$$w'_{lm}(a) = \frac{w_{lm0}(a)P'_{lm}(k_2,a)}{P_{lm}(k_2,a)}.$$

Здесь

$$w_{lm0}(a) = \mathbf{B}_2(l,m)w_0(a,\theta,\varphi).$$

Подстановка решения в формулу (14) приводит при $r \to a$, $r > a$ к соотношению

$$w(r,\theta,\varphi) \to w_0(a,\theta,\varphi).$$

Как сказано в замечании, эта сходимость имеет место при гладких граничных условиях в пространстве непрерывных функций.

При задании граничного условия Неймана вида

$$w'(a,\theta,\varphi) = w_1(a,\theta,\varphi)$$

решение псевдодифференциального уравнения представимо в форме

$$w_{lm}(a) = \frac{w'_{lm0}(a)P_{lm}(k_2,a)}{P'_{lm}(k_2,a)}.$$

Здесь

$$w_{lm1}(a) = \mathbf{B}_2(l,m)w_1(a,\theta,\varphi).$$

Внесение этого решения в соотношение (14) приводит при $r \to a$, $r > a$, в соответствии с замечанием, к следующей сходимости для классической составляющей решения:

$$w'(r,\theta,\varphi) \to w_1(a,\theta,\varphi).$$

Аналогичным образом строятся решения для шарового слоя, полушара, шарового конуса и других подобных элементов.

Построенные блочные элементы можно использовать для формирования более сложной блочной структуры, сопрягая последние.

Например, взяв $a > b$ и организовав контакт поверхностей блоков, получаем шаровую подшипниковую пару. Можно строить и более сложные конструкции. Вопросы сопряжения блочных элементов достаточно просты, подобны сопряжению в слоистых структурах, некоторые примеры приведены в [6, 7, 11]. Аналогичным образом рассматриваются граничные задачи для более сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

### *Литература*


1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О проблеме блочных структур академика М. А. Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. № 4. С. 480–485.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427. № 2. С. 183–186.
3. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О пирамидальном блочном элементе // ДАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 30–34.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О блочном элементе в форме произвольной треугольной пирамиды // ДАН. 2009. Т. 429. №6. С. 758–761.
5. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* Обобщенная факторизация в краевых задачах в многосвязных областях // ДАН. 2003. Т. 392. №2. С. 163–167.
6. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и нано структурах // ДАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 596–599.
7. *Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418. № 3. С. 321–323.
8. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Интегральный метод факторизации в смешанных задачах для анизотропных сред // ДАН. 2009. Т. 426. № 4. С. 471–475.
9. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Выполнение граничных условий в дифференциальном методе факторизации // ДАН. 2007. Т. 412. № 5. С. 600–603.
10. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
11. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Павлова А. В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424. № 1. С. 36–39.


Ключевые слова: граничные задачи, факторизация, блочный элемент, функциональное уравнение, псевдодифференциальное уравнение, обобщенная факторизация

Статья поступила 10 июня 2010 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., 2010