

УДК 539.3

## О ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ КЛИНОВИДНОЙ СРЕДЕ

*Беркович В. Н.<sup>1</sup>*

ON THE LOCALIZATION OF WAVE PROCESS IN THE PIECEWISE HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED MEDIUM

Berkovich V. N.

The paper offers the method of investigating the peculiarity of wave field formation in the heterogeneous medium composed of two elastic wedge-shaped components with common edge and different mechanical characteristics under plane steady vibrations. The problem in question is reduced to the one of the existence of generalized natural vibrations exciting the interface wave localized in the neighborhood of the line separating wedge media. The method of reconstructing the amplitude displacement field in the zone of localization of the wave process is suggested. Some numerical results are adduced.

Keywords: generalized natural vibration, function-invariant solution, critical angle, interface wave

Существование волны типа Релея, локализованной в окрестности свободной поверхности при плоских установившихся колебаниях однородной клиновидной среды для некоторых критических углов раствора было установлено ранее в работе [1]. В настоящей работе исследуется проблема существования обобщенных собственных колебаний, порождающих интерфейсную (каналовую по терминологии [2, 3]) волну, локализованную в окрестности линии раздела клиновидных компонент при установившихся плоских колебаниях среды, составленной из двух упругих клиньев с общим ребром. Вопросы локализации волнового процесса в многослойных средах детально рассмотрены в [3–5] и др. Для клиновидных сред исследования в указанном направлении носят эмпирический характер и обнаружены автором лишь в руководствах по виброрейсразведке, например, в [2] и др. В данной работе в рамках модели линейной динамической теории упругости предложен численно-аналитический метод расчета фазовой скорости и амплитуды каналовой волны в кусочно-однородной клиновидной среде. Приведены некоторые результаты численного анализа.

1. Рассматриваются плоские колебания неоднородной клиновидной среды  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , составленной из 2-х клиновидных компонент  $\Omega_1, \Omega_2$  с общей вершиной, углами раствора  $\theta_1, \theta_2$  и различными механическими характеристиками. Грани клиновидной среды предполагаются свободными от напряжений  $\sigma|_{\partial\Omega} = \{\sigma_\phi, \sigma_{r\phi}\}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$ , а на линии раздела сред  $L = \Omega_1 \cap \Omega_2$  выполняются условия сопряжения  $[\mathbf{u}]_L = [\sigma]_L = \mathbf{0}$ , где  $[\mathbf{f}]_L$  — скачок вектор-функции на  $L$ . На ребре предполагается выполнение условия ограниченности вектора смещений, а на бесконечности — выполнение условий излучения. На основе рассмотрения соответствующей краевой задачи в обобщенной постановке исследуется проблема существования критических углов раствора и соотношений между геометрическими и механическими параметрами кусочно-однородной среды, для которой в окрестности границы раздела  $L$  возникнет интерфейсная волна типа Стоунли [5]. Отметим, что рассмотрение данной проблемы в рамках одного лишь классического подхода, как показывает анализ, оказывается нецелесообразным.

<sup>1</sup>Беркович Вячеслав Николаевич, канд. физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой физики и математики филиала Московского государственного университета технологий и управления в г. Ростове-на-Дону (МГУТУ); e-mail: vberkovich@mail.ru

Предлагаемый метод основан на результатах [1] и состоит в построении специальной системы функционально-инвариантных решений динамических уравнений линейной теории упругости в форме плоских «комплексных» волн Смирнова–Соболева [6]. Используя представления [7] для вектора смещений  $\mathbf{V}(r, \phi, t)$ , такие решения после ряда преобразований можно получить в следующей форме:

$$\begin{aligned} 2\mu\mathbf{V} &= -\nabla F + 4(1-\nu)\Psi, \\ F(r, \phi) &= \Psi_0(r, \phi, t) + r\Psi_r(r, \phi, t), \\ \nabla^2\Psi_0 + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial t^2} &= \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{p^2}\right)r\frac{\partial^2\Psi_r}{\partial t^2}, \quad (1) \\ \Psi &= \{\Psi_r(r, \phi, t), \quad \Psi_\phi(r, \phi, t)\}, \\ \Psi_r &= \Psi_1(r, \phi, t)\cos\phi + \Psi_2(r, \phi, t)\sin\phi, \\ \Psi_\phi &= -\Psi_1(r, \phi, t)\sin\phi + \Psi_2(r, \phi, t)\cos\phi, \\ \nabla^2\Psi_{1,2} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\Psi_{1,2}}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\Psi_1(r, \phi, t) = \sqrt{1 - \frac{c^2}{s^2}} \operatorname{Im} f \left[ t - c^{-1}r \left( \cos\phi + i \sin\phi \sqrt{1 - c^2/s^2} \right) \right], \quad (2)$$

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, \phi, t) &= \\ &= \operatorname{Re} f \left[ t - c^{-1}r \left( \cos\phi + i \sin\phi \sqrt{1 - c^2/s^2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(r, \phi, t) &= \\ &= \operatorname{Re} f_0 \left[ t - c^{-1}r \left( \cos\phi + i \sin\phi \sqrt{1 - c^2/p^2} \right) \right] - \\ &\quad - r [\Psi_1(r, \phi, t)\cos\phi + \Psi_2(r, \phi, t)\sin\phi]. \end{aligned}$$

В формулах (2)  $f(z)$ ,  $f_0(z)$  — произвольные аналитические функции комплексного аргумента  $z$ , величины  $p$ ,  $s$  — скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно,  $c$  — некоторый параметр, имеющий размерность фазовой скорости,  $\mu$ ,  $\nu$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно.

При задании режима установившихся гармонических колебаний среды с круговой частотой  $\omega$  указанные функции

выберем в виде  $f(z) = B \exp(-i\omega z)$ ,  $f_0(z) = D \exp(-i\omega z)$ , где  $B$  и  $D$  — произвольные постоянные. Тогда, как следует из (2), амплитуда уходящих волн будет экспоненциально затухать при удалении по нормали от линии  $L$  раздела сред ( $\phi = 0$ ), что соответствует наличию каналовой волны с фазовой скоростью  $s$ .

Используем представления (1), (2) при построении однородных решений, удовлетворяющих сформулированным выше граничным условиям и условиям сопряжения в 2-х компонентной клиновидной среде. В частности, удовлетворение условиям сопряжения в классическом смысле приводит к уравнению для определения скорости каналовой волны  $s$  на границе раздела

$$\det \begin{pmatrix} \eta_{11} & 1 & \eta_{13} & -\delta \\ k^2 & S_1(k) & \eta_{23} & -S_2(k) \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} & \eta_{34} \\ \eta_{41} & -S_1(k) & \eta_{43} & S_2(k) \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

$$\eta_{11} = P_1(k); \quad \eta_{13} = -\delta P_2(k); \quad \eta_{23} = -\delta k^2;$$

$$\eta_{31} = 2k^2 P_1(k); \quad \eta_{32} = \gamma_1^2 k^2 + S_1^2(k);$$

$$\eta_{33} = -2k^2 P_2(k); \quad \eta_{34} = -\gamma_2^2 k^2 - S_2^2(k);$$

$$\eta_{41} = -k^2 + 0,5K_1^2; \quad \eta_{43} = k^2 - 0,5K_1^2,$$

$$P_n = \sqrt{k^2 - k_n^2}, \quad S_{1,2} = \sqrt{k^2 - K_n^2},$$

$$k = \omega/c, \quad \gamma_n^2 = \frac{1 - 2\nu_n}{2(1 - \nu_n)}, \quad \delta = \mu_1/\mu_2,$$

$$n = 1, 2.$$

В соотношениях (3)  $k_n$ ,  $K_n$  — волновые числа продольных и поперечных волн упругих клиновидных компонент,  $\mu_n$ ,  $\nu_n$  — их модули сдвига и коэффициенты Пуассона соответственно. Из уравнения (3), рассматриваемого относительно  $s$  следует, что его решение  $s_{**}$  не зависит от частоты  $\omega$ , поскольку левая часть уравнения (3) оказывается однородной функцией  $\omega$  шестого порядка. Это означает, что в случае появления в составной клиновидной среде каналовой волны, последняя не будет обладать дисперсией по частоте.

Результаты численного анализа зависимости относительной скорости каналовой волны  $c/s_1$  от отношения  $chi$  волновых сопротивлений в окрестности границы раздела  $L$  контактирующих клиновидных сред  $\Omega_{1,2}$  представлены на рис. 1 для различных значений коэффициентов Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ . Точками на графиках помечены результаты, полученные с помощью (3) на основе данных

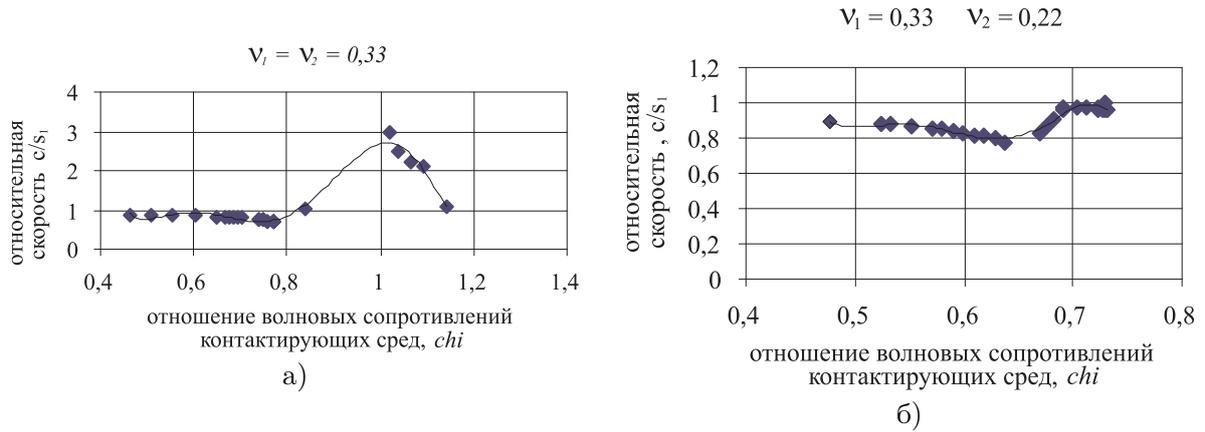


Рис. 1

из таблиц геофизических наблюдений [2]. Сплошная линия на графиках — результат полиномиального сглаживания указанного множества точек.

Отметим, что в условиях контакта одних и тех же пар материалов, отличие скорости  $c_{**}$  каналовой волны в кусочно-однородной клиновидной среде от скорости волны Стоунли  $c_{st}$  [5] в пространстве составляет  $\sim 3-5\%$ .

**2.** Удовлетворение однородным граничным условиям на гранях составной клиновидной среды осуществляется в обобщенном смысле [8]. При этом решение исходной краевой задачи о стационарных колебаниях рассматривается как предел решения соответствующей нестационарной задачи для  $t \rightarrow \infty$ , следуя известному в теории колебаний принципу предельной амплитуды [9], математическая корректность которого в рассматриваемом случае установлена в [1].

Указанный принцип позволяет реализовать сформулированный выше подход, если воспользоваться вариационным принципом Гамильтона–Остроградского и ввести его функционал действия

$$H(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Omega} W(\mathbf{u}) d\Omega dt - \frac{1}{2} \rho \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 d\Omega dt, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \phi, t), \quad \forall t_2 > t_1 > 0, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

где  $W(\mathbf{u})$  — потенциал упругой среды,  $\rho$  — её плотность.

Проблема существования каналковых волн в описанной выше кусочно-однородной

клиновидной среде со свободными границами при отсутствии массовых сил может быть сведена к проблеме отыскания точек стационарности  $\delta H(\mathbf{u}) = 0$  функционала (4) (обобщенных однородных решений начально-краевой задачи). Предполагается, что начальные условия согласованы с (1), (2). Тогда при отыскании установившегося периодического режима колебаний с помощью принципа предельной амплитуды эти условия можно исключить из рассмотрения.

Для нахождения критических углов раствора  $\theta_{1,2}$  клиновидных сред, при которых возникают каналковые волны на линии раздела  $L$ , следует отыскивать точки стационарности функционала действия (4) на множестве решений (1), (2), не затухающих на линии  $L$ .

Введем функциональное пространство  $L_{2,T} \{H^1(\Omega)\}$  с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{L_{2,T}\{H^1(\Omega)\}}^2 = \int_T \|\mathbf{u}(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt, \quad T = (t_1, t_2),$$

где норма в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$  — определяется традиционным образом. Приведем формулировку теоремы, установленной в [1].

**Теорема 1.** Системы функций  $\{z^k\}$ ,  $\{\zeta^k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,

$$z = \exp \left[ -i\omega(t - c^{-1}r \cos \phi) - c^{-1}r M \sin \phi \right], \quad (5)$$

$$\zeta = \exp \left[ -i\omega(t - c^{-1}r \cos \phi) - c^{-1}r m \sin \phi \right]$$

полны в  $L_{2,T} \{H^1(\Omega)\}$ ,

$$\Omega = \left\{ (r, \phi) : 0 < r < \infty, 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$\forall T = [t_1, t_2], \quad M, m > 0.$$

Результаты исследования вопроса о существовании критических углов раствора клиновидных компонент, для которых появляется интерфейсная волна на границе раздела сред, формулируются в виде следующей теоремы.

Введем гильбертово пространство  $H$  со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) = \int_T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))_{H^1(\Omega)} dt,$$

$$T = (t_1, t_2),$$

где скалярное произведение  $(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))_{H^1(\Omega)}$  под знаком интеграла порождает норму в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$ .

**Теорема 2.** Пусть дифференциальные операторы  $\mathbf{A} = \mu \Delta^*$ ,  $\mathbf{B} = \rho \frac{d^2}{dt^2}$  определены  $\forall T$  в гильбертовом пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\beta$ , порождающим норму в пространстве  $L_{2,T} \{H^1(\Omega_\beta)\}$ , где  $\Omega_\beta$  — составная клиновидная среда с углом раствора  $\beta \in (0, \pi)$ ,  $\beta = \theta_1 + \theta_2$ . Тогда для обобщенной краевой задачи

$$\begin{cases} (\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \lambda(\beta) (\mathbf{B} \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \\ \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{C}^\infty, \\ ([\mathbf{u}]_L, \mathbf{v}) = ([\boldsymbol{\sigma}]_L, \mathbf{v}) = \\ \quad = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})|_{\partial\Omega_\beta}, \mathbf{v}) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

всегда найдутся такие  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  и такое  $\beta^* \in (0, \pi)$ ,  $\beta^* = \theta_1^* + \theta_2^*$ , что  $\lambda(\beta^*) = 1$ . При этом существует обобщенное однородное решение задачи (6).

Доказательство теоремы в рассматриваемом случае, когда обобщенная краевая задача (6) зависит от 2-х параметров  $\beta = (\theta_1, \theta_2)$ , практически не отличается от доказательства аналогичной теоремы, установленной в [1] для случая зависимости от одного параметра  $\theta$ , так как соответствующие билинейные формы (6) голоморфны как функции  $(\theta_1, \theta_2)$ ,  $0 < \theta_{1,2} < \pi$ . Тогда в силу результатов [10] собственные значения  $\lambda = \lambda(\theta_1, \theta_2)$  также голоморфны для  $0 < \theta_{1,2} < \pi$ .

**3.** Применяя результат теоремы, аппроксимируем в (1), (2) функции  $f(z)$ ,  $f_0(z)$  в круге  $|z| \leq 1$  линейными комбинациями (5), где

$M = \sqrt{1 - c^2/p^2} > 0$ ,  $m = \sqrt{1 - c^2/s^2} > 0$ ,  $p$ ,  $s$ ,  $c = c_{**}$  — скорости продольных, поперечных и каналовых волн соответственно. Тогда аппроксимация смещений  $\mathbf{u}(r, \phi, t)$ , принимает вид

$$\mathbf{u}_N(r, \phi, t) = \sum_{n=1}^N B_n^{(N)} \mathbf{u}_n(r, \phi, t), \quad (7)$$

$$(r, \phi) \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2},$$

где  $\mathbf{u}_n(r, \phi, t)$  удовлетворяют в классическом смысле уравнениям динамической теории упругости и условиям сопряжения. Применение метода Трефтца [10] для отыскания точек стационарности функционала (4) на множестве (6) приводит к системе относительно  $B_n^{(N)}$

$$\sum_{n=1}^N B_n^{(N)} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{u}_n) \mathbf{u}_m dl dt - \iint_{\Omega} \mathbf{u}_n \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \Big|_{t_1}^{t_2} d\Omega \right] = 0, \quad (8)$$

$$(m = 1, 2, \dots, N).$$

При получении (8) учтены условия сопряжения и граничные условия  $\forall t_{1,2} \in R_+^1$ . В качестве интервала  $[t_1, t_2]$  выбирался для натурального  $P$  интервал  $\left[ \frac{2\pi P}{\omega}, \frac{2\pi(P+1)}{\omega} \right]$  длины  $\frac{2\pi}{\omega}$ . В соответствии с принципом предельной амплитуды полагалось  $P \gg 1$ . Из условия существования ненулевых решений системы (8) вытекает уравнение относительно критических углов раствора  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  клиновидных сред  $\Omega_{1,2}$  при наличии каналовых волн на границе контакта.

Как и в случае существования поверхностных волн типа Релея [1], интерфейсные волны в составной клиновидной среде существуют лишь для критических углов раствора клиновидных компонент в интервале  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ , которые определяются из уравнения (8), в выражение которого входит величина фазовой скорости интерфейсной волны. Поскольку уравнение оказывается многопараметрическим, то вопрос о существовании у него действительных решений исследовался численно. На рис. 2 представлен график взаимосвязи максимальных возможных

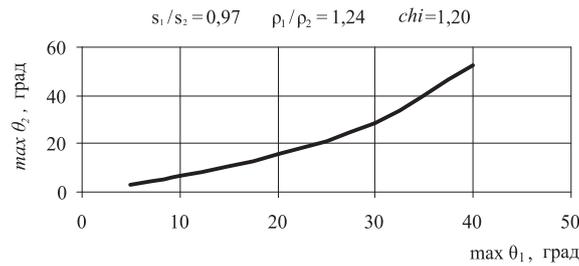


Рис. 2

значений критических углов раствора клиновидных компонент  $\max \theta_1^*$ ,  $\max \theta_2^*$ , полученных в результате численного решения уравнения относительно критических углов раствора  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  для заданного отношения плотностей  $\rho_1/\rho_2$ , скоростей сдвига  $s_1/s_2$  и отношения  $chi$  волновых сопротивлений контактирующих сред.

На основе численного анализа с использованием пакета Maple-8 составлена таблица контактного соответствия реальных геологических пород клиновидной формы, порождающего интерфейсную волну. Наряду с указанием основных волновых характеристик контактирующих пород в этой таблице приведены расчетные значения максимальных критических углов раствора клиновидных компонент, на границах раздела которых появляется волна интерфейсного типа. Её относительная фазовая скорость  $c_{**}/s_1$ , где  $s_1$  — минимальная из скоростей поперечных волн контактирующих материалов, подсчитана с помощью изложенной выше методики и приведена в таблице. Результаты расчетов показывают, что величина фазовой скорости интерфейсной волны  $c_{**}$  оказывается меньше  $s_1$  в соответствии с равенствами (2). Например, при контакте клиновидных *водонасыщенных* геологических пород ( $p_1 = 2,5$  км/с,  $s_1 = 1,25$  км/с,  $\rho_1 = 2,0$  г/см<sup>3</sup>) и *мерзлоты* ( $p_2 = 2,7$  км/с,  $s_2 = 1,35$  км/с,  $\rho_2 = 1,4$  г/см<sup>3</sup>) при максимальных углах раствора клиновидных сред  $\theta_1 \approx 41^{\circ},8$ ,  $\theta_2 \approx 61^{\circ},8$  в рамках рассмотренной линейной модели существует интерфейсная волна с фазовой скоростью  $c_{**} \approx 0,8s_1$  км/с. При контакте *известняка* ( $p_1 = 3,8$  км/с,  $s_1 = 1,85$  км/с,  $\rho_1 = 2,2$  г/см<sup>3</sup>) и *водонасыщенной глины* ( $p_2 = 3,6$  км/с,  $s_2 = 1,8$  км/с,  $\rho_2 = 2,6$  г/см<sup>3</sup>) для углов раствора сред  $\theta_1 \approx 44^{\circ},7$ ,  $\theta_2 \approx 41^{\circ},3$  величина фазовой скорости интерфейсной волны оказывается равной  $c_{**} \approx 0,77s_1$  км/с. Полностью таблица контактного соответствия различных геоло-

гических пород клиновидного типа не может быть приведена в данной работе ввиду её громоздкости. Как следует из справочных материалов по сейсморазведке [2], её результаты согласуются с имеющимися данными геофизических наблюдений.

4. С помощью обобщенных однородных решений для составной клиновидной среды с критическими углами раствора  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$  клиновидных компонент этой среды построен тензор Грина  $\tilde{\mathbf{G}}(x, y|\xi, \eta)$ , удовлетворяющий заданным граничным условиям в том же обобщенном смысле, структура матричного представления которого имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}(x, y|\xi, \eta) &= \\ &= \frac{1}{K^2 \mu} \int_Z \tilde{\mathbf{g}}(y|\zeta, \eta) \frac{e^{-i\zeta|x-\xi|}}{Q(\zeta)} d\zeta, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}(y|\zeta, \eta) &= \tilde{\mathbf{g}}_1(\zeta) e^{-(\eta+y)\sigma_1} + \tilde{\mathbf{g}}_2(\zeta) e^{-(\eta+y)\sigma_2} + \\ &+ \tilde{\mathbf{g}}_3(\zeta) e^{-\eta\sigma_1 - y\sigma_2} + \tilde{\mathbf{g}}_4(\zeta) e^{-\eta\sigma_1 - y\sigma_2}, \end{aligned}$$

$$\sigma_1(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2 K^2}, \quad \sigma_2(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - K^2}.$$

Здесь  $Q(\zeta)$  — левая часть уравнения для определения фазовой скорости поверхностной волны типа Релея,  $\tilde{\mathbf{g}}(y|\zeta, \eta)$  — подынтегральная матрица, формирующая интегральное представление тензора Грина. Для вычисления интеграла (9) по вычетам контур интегрирования  $Z$  замыкается полуокружностью в верхнюю полуплоскость с вертикальными разрезами  $C_1^N, C_\gamma^N$ , обходящими точки ветвления  $\pm K, \pm \gamma K$  в отрицательном направлении. При этом ветви многозначных функций  $\sigma_1(\zeta), \sigma_2(\zeta)$  выбираются из условий

$$\begin{aligned} \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2 K^2} &> 0, \quad |\zeta| > \gamma K, \\ \sqrt{\zeta^2 - K^2} &> 0, \quad |\zeta| > K. \end{aligned} \quad (10)$$

Тензор Грина позволяет с помощью формул Бетти получить решение задачи о возбуждении колебаний в клиновидной среде

внешним источником. В результате вычисления по вычетам выражение вектора амплитуд смещений свободной поверхности принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(r, 0) = & \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{G}}(r, 0 | \rho \cos(\alpha_* - \psi), \rho \sin(\alpha_* - \psi)) \times & \\ \times \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\rho, \psi) dl = \tilde{\mathbf{R}}(\zeta_h | \alpha_*) e^{-i\zeta_h r} + & \\ + \tilde{\mathbf{A}}_s(r | \alpha_*) e^{-iKr} + \tilde{\mathbf{A}}_p(r | \alpha_*) e^{-i\gamma Kr}, & \quad (11) \end{aligned}$$

$$\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1,$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_s(r | \alpha_*, c_*), \tilde{\mathbf{A}}_p(r | \alpha_*, c_*) = o(r^{-1/2}), \quad r > b,$$

где  $\tilde{\mathbf{R}}(\zeta_h | \alpha_*)$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_s(r | \alpha_*)$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_p(r | \alpha_*)$  — соответственно амплитуды поверхностных волн типа Релея [1] с волновым числом  $\zeta_h$ , а также поперечных и продольных волн. Амплитуды содержат контурные интегралы, порождаемые правой частью (9), по границам двух вертикальных разрезов, обходящих точки ветвления при замыкании контура  $Z$  в верхнюю полуплоскость. Построенное решение удовлетворяет вне области задания источников колебаний динамическим уравнениям теории упругости и граничным условиям уже в классическом смысле.

Для случая появления интерфейсных (каналовых) волн вдоль границы раздела сред  $L$  кусочно-однородной клиновидной среды векторное поле амплитуд смещений в указанной зоне, как и в предыдущем случае, представляется с помощью тензора Грина  $\tilde{\mathbf{G}}$  контурным интегралом типа (11), который затем вычисляется по вычетам подынтегральной функции

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}(x, y | \xi, \eta) = & \\ = \frac{1}{K_1^2 \mu} \int_Z \tilde{\mathbf{g}}(y | \zeta, \eta) \frac{e^{-i\zeta|x-\xi|}}{Q_{Ch}(\zeta)} d\zeta, & \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}(y | \zeta, \eta) = \sum_{n=1}^2 \left[ \tilde{\mathbf{g}}_{1n}(\zeta) e^{-(\eta+y)\sigma_{1n}} + \right. & \\ + \tilde{\mathbf{g}}_{2n}(\zeta) e^{-(\eta+y)\sigma_{2n}} + & \\ \left. + \tilde{\mathbf{g}}_{3n}(\zeta) e^{-\eta\sigma_{1n} - y\sigma_{2n}} + \tilde{\mathbf{g}}_{4n}(\zeta) e^{-\eta\sigma_{1n} - y\sigma_{2n}} \right], & \end{aligned}$$

$$\sigma_{1n}(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_n^2 K_n^2},$$

$$\sigma_{2n}(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - K_n^2},$$

Здесь  $Q_{Ch}(\zeta)$  — левая часть уравнения для определения фазовой скорости интерфейсной волны,  $\tilde{\mathbf{g}}(y | \zeta, \eta)$  — подынтегральная матрица, формирующая интегральное представление тензора Грина  $\tilde{\mathbf{G}}$ , удовлетворяющего как однородным граничным условиям, так и условиям сопряжения на границе раздела клиновидных сред. Ветви многозначных функций выбираются аналогично (10). Контур интегрирования  $Z$  в соотношении (12) замыкается в верхнюю полуплоскость полукругом и четырьмя вертикальными разрезами, обходящих в отрицательном направлении точки ветвления на действительной оси. Окончательное выражение вектора амплитуд смещений на линии раздела сред содержит продольные, поперечные волны и незатухающие интерфейсные волны, локализованные в окрестности границы раздела  $L$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{Ch}|_L = \tilde{\mathbf{R}}(\zeta_{Ch} | \theta_1^*, \theta_2^*) e^{-i\zeta_{Ch} r} + & \\ + \tilde{\mathbf{A}}_s^{(1)}(r | \theta_1^*, \theta_2^*) e^{-iK_1 r} + & \\ + \tilde{\mathbf{A}}_p^{(1)}(r | \theta_1^*, \theta_2^*) e^{-i\gamma_1 K_1 r} + & \\ + \tilde{\mathbf{A}}_s^{(1)}(r | \theta_1^*, \theta_2^*) e^{-iK_2 r} + & \\ + \tilde{\mathbf{A}}_p^{(1)}(r | \theta_1^*, \theta_2^*) e^{-i\gamma_2 K_2 r}, & \quad (13) \end{aligned}$$

$$r > b,$$

$$L = \Omega_1 \cap \Omega_2,$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_s^{(1,2)}(r), \tilde{\mathbf{A}}_p^{(1,2)}(r) = o(r^{-1/2}), \quad r \rightarrow \infty,$$

где  $\tilde{\mathbf{R}}(\zeta_{Ch} | \alpha_*)$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_s^{(1,2)}(r | \alpha_*)$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_p^{(1,2)}(r | \alpha_*)$  — соответственно амплитуды интерфейсной волны типа Стоунли с волновым числом  $\zeta_{Ch}$ , а также поперечных и продольных волн клиновидных компонент соответственно, составляющих кусочно-однородную клиновидную среду. Амплитуды содержат контурные интегралы, порождаемые правой частью (13), по границам четырех вертикальных разрезов, обходящих точки ветвления при замыкании контура  $Z$  в верхнюю полуплоскость.

Исследование характера локализации волнового поля в составной клиновидной среде позволяет внести существенные уточнения при разработке численных методов решения задач прикладного характера, связанных с детальным описанием волновых полей в кусочно-однородных упругих средах с компонентами клиновидного типа.

Автор выражает признательность академику РАН, проф. Бабешко В. А. и проф. Южного федерального университета Ватульяну А. О. за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

### Литература

1. Беркович В. Н. Плоские установившиеся колебания упругой клиновидной среды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 3. С. 27–36.
2. Сейсморазведка: справочник геофизика. В 2-х книгах / Под ред. Номоконова В. П. М.: Недра, 1990. 333 с.
3. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
4. Бабешко В. А., Бабешко О. М. К исследованию краевых задач сейсмологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 3. С. 5–10.
5. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка. 1981. 284 с.
6. Исраилов М. Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: МГУ, 1992. 204 с.
7. Зильберглейт А. С., Златина И. Н. О некоторых общих представлениях решения динамических уравнений теории упругости // ДАН. 1976. Т. 227. № 1. С. 71–74.
8. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Н. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977. 416 с.
9. Бабич В. М., Капилевич М. Б. и др. Линейные уравнения математической физики. Серия СМБ. М.: Наука, 1964. 368 с.
10. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Ключевые слова: обобщенные собственные колебания, функционально-инвариантные решения, критический угол, интерфейсные волны

Статья поступила 25 мая 2010 г.

Филиал Московского государственного университета технологий и управления в г. Ростове-на-Дону (МГУТУ)  
© Беркович В. Н., 2010