УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ ЖЕСТКИМ КРУГЛЫМ ШТАМПОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА[1]

***Васильев А. С.*[2], *Айзикович С. М.*[3]**

MATHEMATICAL MODELING OF THE TORSION PROBLEM OF A FUNCTIONALLY-GRADED COMPOSITE MATERIAL BY A CIRCULAR INDENTOR WITH A FLAT BASE

Vasiliev A. S., Aizikovich S. M.

Approximated analytical solution of the problem is developed. The case when gradient of elastic properties of coating changes sign for many times is considered in the paper. Simple analytical formulas for calculating mechanical characteristics of the problem allowing to distinguish qualitative differences between layered and functionally-graded materials are obtained. Conditions of applicability and an analysis of accuracy of the results are discussed.

Keywords: contact problem, functionally-graded coating, analytical solution

Задача о кручении однородного упругого полупространства круглым штампом впервые была решена Рейснером и Сагочи [1]. В работах Снеддона [2, 3] задача решается методом парных интегральных уравнений. Используется метод интегральных преобразований.

Задачу о кручении для изотропной двухслойной среды и ортотропном упругом слое изучал Грилицкий В. Д. [4]. Решение представлено в виде ряда по степеням δ^{-1}, где δ — отношение толщины первого слоя к радиусу штампа. Вычислены также напряжения и смещения на поверхности первого слоя.

Впервые задача о кручении неоднородного полупространства с произвольным законом неоднородности рассмотрена в работе [5].

Усложнения и обобщения классической задачи Рейснера-Сагочи по настоящее время активно рассматриваются различными авторами [6–10].

1. Постановка задачи о кручении

Недеформируемый круглый штамп с плоским основанием жестко сцеплен с верхней гранью Γ упругого неоднородного полупространства Ω. С полупространством связана цилиндрическая система координат r, φ, z. Штамп контактирует с полупространством по поверхности $z = 0$, $r \leqslant a$. К штампу приложен крутящий момент M, ось которого совпадает с осью z (рис. 1). Под его действием штамп повернется относительно оси z на угол ε, вызвав деформацию кручения Ω. Модуль сдвига G полупространства с глубиной изменяется по закону

$$G(z) = \begin{cases} G_0(z) = G^S \varphi_i(z), \ -H \leqslant z \leqslant 0, \\ G_1(z) \equiv G^S, \ -\infty \leqslant z < -H. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $G^S \in R$.

Вне штампа Γ не нагружена. При сделанных предположениях граничные условия задачи имеют вид

$$z = 0, \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad \begin{cases} \tau_{z\varphi} = 0, \ r > a, \\ u_\varphi = r\varepsilon, \ r \leqslant a. \end{cases}$$

При $r \to \infty$ и $z \to -\infty$ напряжения исчезают.

Считаем, что перемещения u_φ и напряжения $\tau_{z\varphi}$ сопрягаются на границе изменения

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-01-00003, 09-08-011410, 10-08-01296, 10-08-90025-Бел) и ГК № 02.740.11.0413, ГК № 02.740.11.5193, АВЦП 2.1.2/5729.

[2]Васильев Андрей Сергеевич, младший научный сотрудник Управления научных исследований Донского государственного технического университета; e-mail: andre.vasiliev@gmail.com.

[3]Айзикович Сергей Михайлович, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Управления научных исследований Донского государственного технического университета; e-mail: saizikovich@gmail.com.

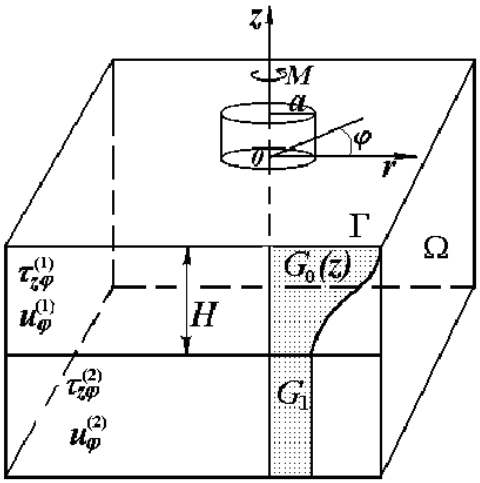


Рис. 1. Постановка задачи

закона неоднородности:

$$z = -H, \quad \tau_{z\varphi}^{(1)} = \tau_{z\varphi}^{(2)}, \quad u_\varphi^{(1)} = u_\varphi^{(2)}.$$

Здесь индекс $^{(1)}$ соответствует покрытию, а индекс $^{(2)}$ соответствует подложке — однородному полупространству.

Требуется определить закон распределения контактных касательных напряжений под штампом

$$\tau_{z\varphi}\,|_{z=0} = \tau_a(r), \quad r \leqslant a$$

и связь между приложенным моментом и углом поворота штампа.

2. Построение решения задачи

Задача сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_0^1 \tau(\rho)\rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_1\left(\frac{ur}{\lambda}\right) J_1\left(\frac{u\rho}{\lambda}\right) du = \lambda G_0(0) r\varepsilon, \quad r \leqslant 1.$$

Здесь $\tau(\rho) = \tau_a(\rho a)$; $\lambda = H/a$ — геометрический параметр задачи, $J_1(x)$ — функция Бесселя 1-го рода, и $L(u)$ — трансформанта ядра интегрального уравнения. В общем случае, значение трансформанты ядра строится численно, используя метод моделирующих функций [5].

В работе [11] показано, что трансформанта ядра обладает следующими свойствами:

$$L(u) = A + B\,|u| + Cu^2 + \mathrm{O}\left(|u|^3\right), \quad (2.1)$$

$$u \to 0,$$

$$L(u) = 1 + D\,|u|^{-1} + Eu^{-2} + \mathrm{O}\left(|u|^{-3}\right), \quad (2.2)$$

$$u \to \infty,$$

$$\lim_{u\to 0} L(u) \equiv A = G_0(0)G_0^{-1}(-H). \quad (2.3)$$

В случае многослойных сред свойства функции податливости, аналогичные (2.3), были замечены А. К. Приварниковым в 1973 г. [12].

Отметим, что свойство (2.3) означает, что значение $L(0)$ не зависит от того, каким образом изменяется неоднородность в слое от $G_0(0)$ до $G_0(-H)$, а определяется только этими значениями. Графически это будет выглядеть так, что, если множество кривых, описывающих некоторые законы изменения модуля сдвига с глубиной, имеют одинаковые значения модуля сдвига на поверхности полупространства и на глубине H, то графики соответствующих трансформант $L(u)$ будут выходить из одной общей точки $L(0) = G_0(0)G_0^{-1}(-H)$ и сходиться в одну точку $L(\infty) = 1$.

Обозначим

$$L_\Pi^N(u) = \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, \qquad L_\Sigma^M(u) = \sum_{k=1}^M \frac{\mathrm{C}_k\,|u|}{u^2 + D_k^2}. \quad (2.4)$$

Здесь A_i, B_i, $D_k \in C$; $C_k \in R$ — некоторые константы.

Рассмотрим выражение

$$L(u) = L_\Pi^N(u) + L_\Sigma^\infty(u). \quad (2.5)$$

Используя следующую лемму [13, 14], можно показать, что выражение (2.5) аппроксимирует функцию $L(u)$ со свойствами (2.3)–(2.4).

Лемма. Пусть четная, вещественная, непрерывная на всей вещественной оси функция $\varphi(u)$ обращается в нуль на бесконечности. Тогда она допускает приближение в $C_{(-\infty,\infty)}$ рядами из функций вида $\varphi_k(u) = \left(u^2 + D_k^2\right)^{-1}$.

Для трансформанты ядра $L(u)$ в форме (2.4) можно построить решение задачи [15]

$$\tau(r) = \frac{4G_0(0)\varepsilon}{\pi}\left\{\frac{r\cdot L^{-1}(0)}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^{N} C_i Z(r, \frac{A_i}{\lambda})\right\},$$

где постоянные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} C_i p\left(\frac{A_i}{\lambda}, \frac{B_k}{\lambda}\right) + \frac{1 + B_k\lambda^{-1}}{L_N(0)B_k^2\lambda^{-2}} = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, N.$$

Связь между моментом и углом поворота имеет вид

$$M = 16G_0(0)\varepsilon a^3\left[\frac{L^{-1}(0)}{3} + \sum_{i=1}^{N} C_i F\left(\frac{A_i}{\lambda}\right)\right].$$

Здесь использованы обозначения

$$Z(r, A) = \\ = \frac{\operatorname{sh} Ar}{r} + \frac{r\operatorname{sh} A}{S(1,r)} - Ar\int_r^1 \frac{\operatorname{ch} Atdt}{S(t,r)}, \quad (2.6)$$

$$p\,(A, B) = \\ = (A\operatorname{ch} A + B\operatorname{sh} A)\left(B^2 - A^2\right)^{-1}, \quad (2.7)$$

$$F\,(A) = A^{-2}\,(A\operatorname{ch} A - \operatorname{sh} A)\,,$$

$$S(t,r) = \sqrt{t^2 - r^2}\left(t^2 + \sqrt{t^2 - r^2}.\right)$$

Построенное решение является асимптотически точным как при больших, так и при малых значениях характерного геометрического параметра задачи λ и его точность напрямую зависит от точности приближения трансформанты ядра интегрального уравнения выражениями вида (2.4).

Алгоритм построения указанной аппроксимации описан в работе [15].

3. Примеры неоднородных сред

Предположим, что в (1.1) $\varphi_i(z)$ изменяется по одному из следующих законов:

$$1)\ \varphi_1(z) = \varphi_0;$$

$$2)\ \varphi_2(z) = 1/\varphi_0;$$

$$3)\ \varphi_3(z) = \varphi_0 + (\varphi_0 - 1)\,z/H;$$

$$4)\ \varphi_4(z) = \frac{1}{\varphi_0} - \frac{\varphi_0 - 1}{\varphi_0}\frac{z}{H};$$

$$5)\ \varphi_5(z) = \frac{\varphi_0 + 1}{2} - \frac{\varphi_0 - 1}{2}\cos\left(2\pi k\frac{z}{H}\right);$$

$$6)\ \varphi_6(z) = \frac{\varphi_0 + 1}{2\varphi_0} + \frac{\varphi_0 - 1}{2\varphi_0}\cos\left(2\pi k\frac{z}{H}\right).$$

Здесь $\varphi_0 > 1$ показатель неоднородности, характеризующий отношение модуля сдвига на поверхности к модулю сдвига подложки. Далее для простоты записи законы неоднородности будем называть в соответствии с их порядковыми номерами.

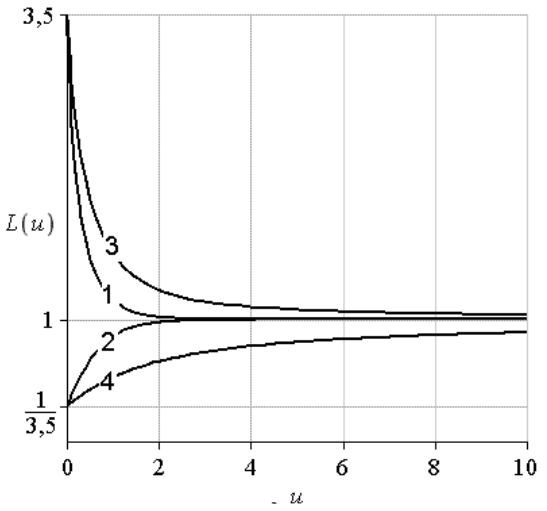
Законы неоднородности 1, 2 соответствуют двухслойной среде. Закон 1 описывает однородное покрытие, более жесткое, чем подложка (или просто жесткий слой); а закон 2 — однородное покрытие, более мягкое, чем подложка (мягкий слой). Законы 3, 4 описывают линейное изменение модуля сдвига в покрытии. Закон 3 — «линейный убывающий», закон 4 — «линейный возрастающий».

Законы неоднородности 5, 6 описывают среду, в которой модуль сдвига изменяется по синусоиде. Параметр k, фигурирующий в законах, задает количество волн синусоиды и соответствует числу перемен знака градиента изменения упругих свойств среды.

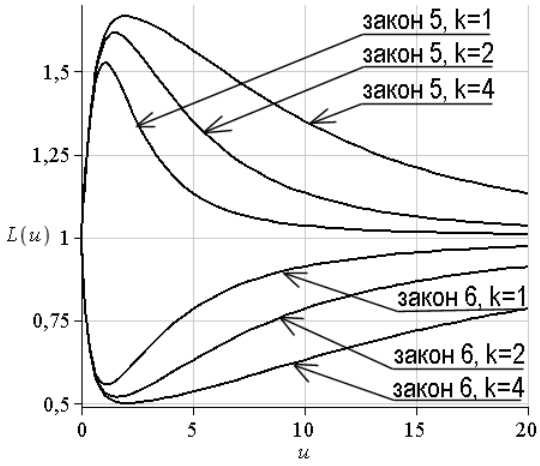
Графики изменения модуля сдвига по глубине для законов 1–4, 5 и 6 при $k = 1$ изображены на рис. 2г. Здесь порядковый номер рисунка соответствует порядковому номеру закона неоднородности.

На рис. 2а приведены построенные численно трансформанты ядра для законов 1–4 при $\varphi_0 = 3{,}5$. Номер кривой соответствует порядковому номеру закона. На рис. 2б изображены трансформанты ядра для законов 5, 6 при $\varphi_0 = 3{,}5$ в случае $k = 1, 2, 4$. На графиках видно, что при увеличении числа волн, трансформанта ядра медленнее сходится к 1 при $u \to \infty$.

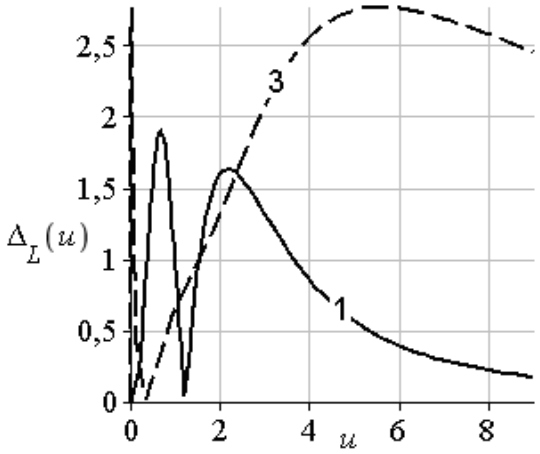
На рис. 2в изображены графики погрешности аппроксимации трансформанты выражениями вида (2.4) для законов 1 и 3 (номер кривой соответствует порядковому номеру закона). Здесь погрешность определяется



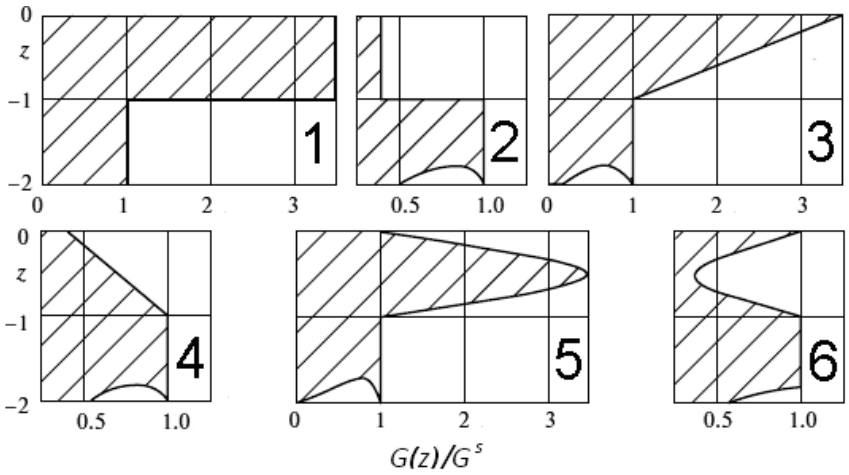
а)



б)



в)



г)

Рис. 2. а), б) — Трансформанты ядер интегральных уравнений; в) — погрешность аппроксимации трансформанты для законов 1, 3; г) — графики изменения модуля сдвига по глубине

Таблица 1. Постановка задачи

№ закона	k=1	k=2	k=4	k=10	k=50
5	5%	7%	11,7%	18%	36%
6	2,8%	4,5%	6,5%	11%	23%

формулой

$$\Delta_L(u) = \left| \frac{L_N(u) - L(u)}{L_N(u)} \right| \cdot 100\%. \qquad (3.1)$$

4. Неоднородные покрытия, градиент изменения упругих свойств которых меняет знак

Рассмотрим законы, описывающие неоднородные покрытия, градиент изменения упругих свойств которых, меняет знак 1, 2, 4, 10 и более раз (законы 5, 6). Для наглядности рассмотрим случай $\varphi_0 = 3,5$.

Табл. 1 содержит величины погрешностей аппроксимации трансформанты ядра выражениями вида (2.4) для законов 5 и 6. Под погрешностью понимаем $\max\limits_{u>0} \Delta_L(u)$. Расчеты сделаны при $N = 60$.

На рис. 3, 4 изображены графики величины $\tau_{\text{отн}}(r,\lambda) = \frac{\tau_{\text{неодн}}(r,\lambda)}{\tau_{\text{одн}}(r,\lambda)}$, характеризующей распределение контактных касательных напряжений под штампом для неоднородной среды по сравнению с однородной подложкой при различных значениях λ. Здесь $r \in (0,1)$ — удаление точки от центра штампа, λ — геометрический параметр задачи, равный отношению толщины слоя к радиусу штампа. Рис. 3 соответствует закону 5, рис. 4 — закону 6, иллюстрируются случаи $k = 1$, 2, 4, 10.

Для закона 5 для всех значений k функция $\tau_{\text{отн}}(r,\lambda)$ имеет один экстремум (максимум), обозначим его λ_k. При λ близких к $1/8$ значение $\tau_{\text{отн}}(r,\lambda)$ близко к 1, с увеличением λ до λ_k наблюдается возрастание $\tau_{\text{отн}}(r)$, а при $\lambda > \lambda_k$ значение $\tau_{\text{отн}}(r,\lambda)$ монотонно стремится к 1. С увеличением k, точка экстремума увеличивается (смещается в зону больших λ). Кроме того видно, что при увеличении k $\tau_{\text{отн}}(r,\lambda)$ медленнее стремится к 1 при $\lambda \to \infty$. Максимальное значение $\tau_{\text{отн}}(r,\lambda)$ с увеличением k практически не изменяется.

Из рисунков видно подобие распределений контактных напряжений для законов 5, 6 при одинаковых значениях параметра k — зоны возрастания сменяются зонами убывания, точки максимума — точками минимума, отличие от случая однородной среды для закона 5 при $k = 2$ не превышает 2,2 раза, а для закона 6 при $k = 2$ — 2 раза.

Увеличение числа волн k аналогичным образом влияет на распределение контактных напряжений для закона 6, в чем можно убедиться из рис. 4.

5. Простейшие аналитические решения интегральных уравнений контактных задач для материалов с функционально-градиентными покрытиями

При построении решения двусторонним асимптотическим методом используется приближение трансформанты ядра выражением вида (2.4). При этом с увеличением N точность возрастает. Рассмотрим случай $N = 1$, при котором решение задачи принимает более простой вид

$$\tau(r) = \frac{4G_0(0)\varepsilon}{\pi} \times \\ \times \left(\frac{rL^{-1}(0)}{\sqrt{1-r^2}} - CZ\left(r, \frac{A}{\lambda}\right) \right), \quad (5.1)$$

где

$$C = -\frac{(1 + B/\lambda)}{B^2\lambda^{-2}p\,(A/\lambda, B/\lambda)} L_N^{-1}(0),$$

а $p\,(A/\lambda, B/\lambda)$, $Z(r, A/\lambda)$ вычисляются по формулам (2.6), (2.7).

Проанализируем применимость такого вида аппроксимации на примере простых законов 1–4. Ниже будем рассматривать три случая неоднородности: $\varphi_0 = 1,5$, $\varphi_0 = 3,5$ и $\varphi_0 = 10$.При $\varphi_0 = 1,5$ свойства покрытия и подложки отличаются незначительно, что соответствует случаю слабой неоднородности, $\varphi_0 = 10$ соответствует существенному отличию свойств покрытия и подложки — случай сильной неоднородности, и $\varphi_0 = 3,5$ — средний случай. Следует отметить, что понятия сильной, слабой и средней неоднородности являются условными и не привязаны к определенным численным значениям, а в статье используются лишь для простоты изложения.

В табл. 2 приведены значения относительной погрешности при приближении

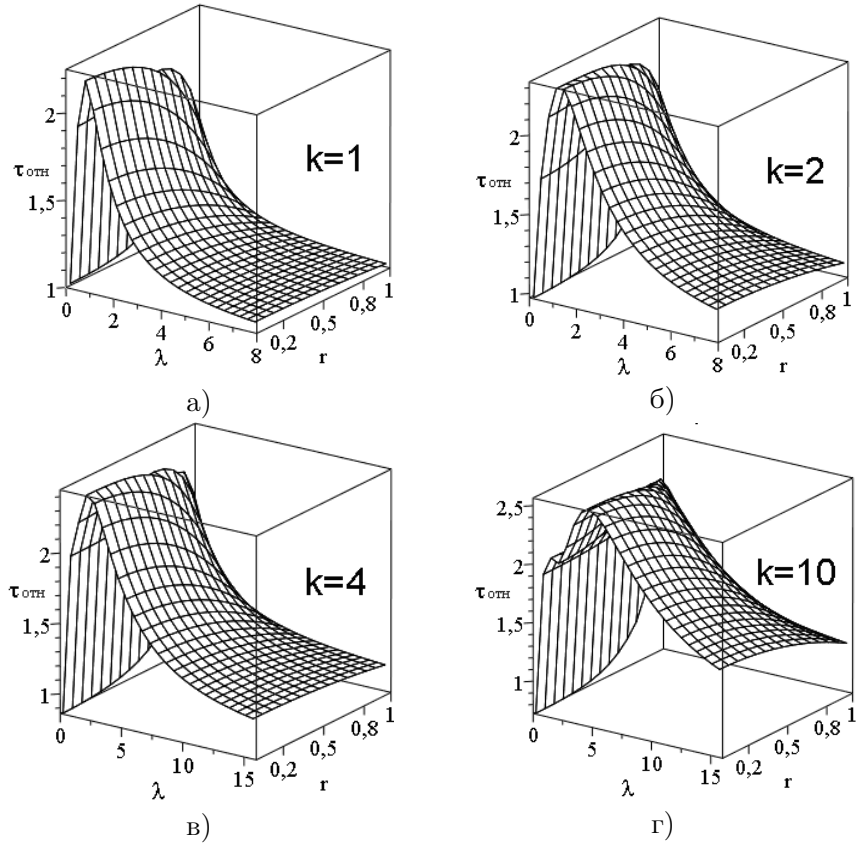


Рис. 3. Распределение контактных напряжений под штампом для закона 5

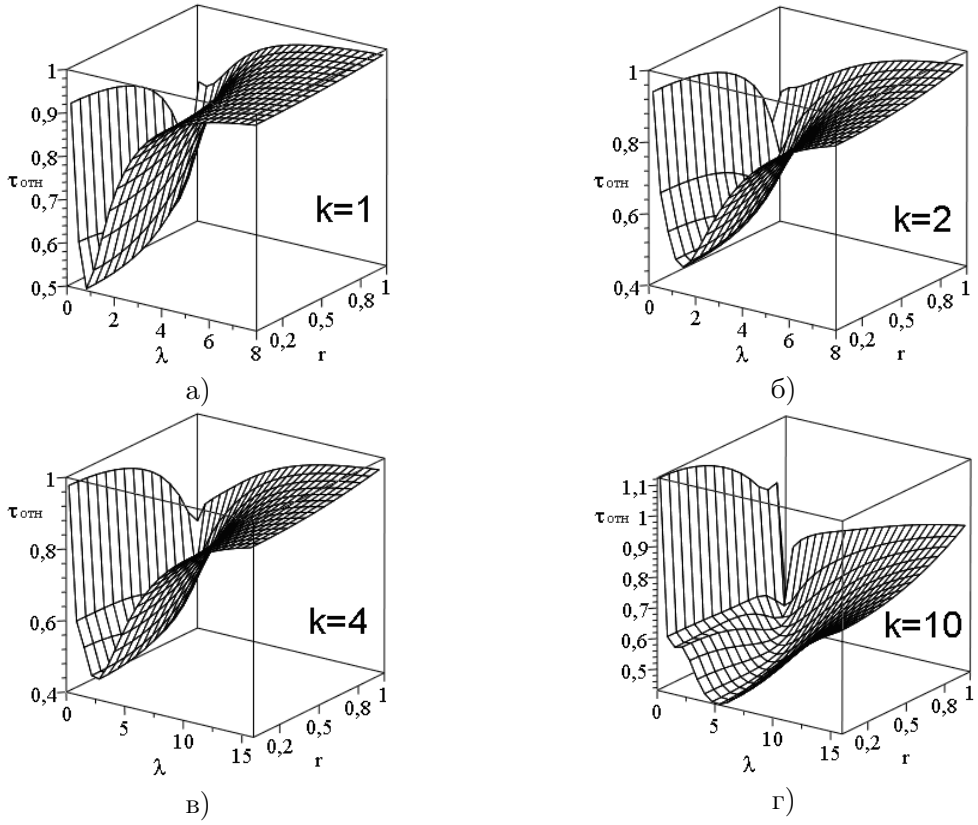


Рис. 4. Распределение контактных напряжений под штампом для закона 6

Таблица 2. Погрешность аппроксимации трансформанты ядра для законов 1–4

Закон	$\varphi_0 = 1,5$ $N = 1$	$\varphi_0 = 1,5$ $N = 60$	$\varphi_0 = 3,5$ $N = 1$	$\varphi_0 = 3,5$ $N = 60$	$\varphi_0 = 10$ $N = 1$	$\varphi_0 = 10$ $N = 60$
1	2,4 %	0,57 %	7,9 %	1,93 %	17 %	4,5 %
2	2,4 %	0,62 %	8,1 %	1,9 %	17,4 %	4,4 %
3	3,3 %	0,96 %	9,7 %	2, 8%	18,7 %	5,3 %
4	3,7 %	1,1 %	13,1 %	4,2 %	28,2 %	10 %

Таблица 3. Погрешность решения задачи, полученного при помощи простейшей аппроксимации, для законов 1, 2

	$1/8 \leqslant \lambda < 1/2$	$1/2 \leqslant \lambda < 1$	$1 \leqslant \lambda \leqslant 4$
закон 1, $\varphi_0 = 1,5$	5,2 %	2 %	0,3 %
закон 2, $\varphi_0 = 1,5$	3,1 %	1,5 %	0,3 %
закон 1, $\varphi_0 = 3,5$	26 %	8 %	1,5 %
закон 2, $\varphi_0 = 3,5$	7,7 %	4 %	1 %
закон 1, $\varphi_0 = 10$	100 %	20 %	5 %
закон 2, $\varphi_0 = 10$	14 %	8 %	3 %

трансформанты для законов 1–4, выражениями (2.4). Как и в предыдущем параграфе под погрешностью понимаем $\max\limits_{u>0} \Delta_L(u)$, где $\Delta_L(u)$ задается формулой (1.1).

Из данных в табл. 2 видно, что для законов 1–4 хорошее приближение трансформанты при $N = 1$ достигается в случае слабой ($\varphi_0 = 1,5$) и средней ($\varphi_0 = 3,5$) неоднородности. На рисунке рис. 5 изображены графики величины

$$\Delta\tau(r,\lambda) = \left|\frac{\tau_N(r,\lambda) - \tau_1(r,\lambda)}{\tau_N(r,\lambda)}\right| \cdot 100\%,$$

где $\tau_N(r,\lambda)$ — решение задачи, построенное при $N = 60$, $\tau_1(r,\lambda)$ — решение, построенное при $N = 1$. Величина $\Delta\tau(r,\lambda)$ характеризует относительную погрешность при расчете контактных напряжений под штампом при $N = 1$ по сравнению с результатами, полученными при $N = 60$. Анализируется диапазон $\lambda \in (1/8, 4)$. Иллюстрации соответствуют случаю слабой неоднородности $\varphi_0 = 1,5$.

Из графиков, изображенных на рис. 5а и рис. 5б, видно, что максимальная погрешность для законов 1, 2 наблюдается при $\lambda < 1$, а с увеличением λ — уменьшается. Данные о значении погрешности при $\varphi_0 = 3,5$ и $\varphi_0 = 10$ для различных интервалов по λ содержатся в табл. 3. Здесь в ячейках приводится максимальное значение погрешности на соответствующем интервале, т. е. величина $\max\limits_{\lambda} \Delta_M(\lambda)$, где

$$\Delta_M(\lambda) = \max_{0\leqslant r\leqslant 1} \Delta_\tau(r,\lambda). \qquad (5.2)$$

Графики погрешностей для линейных законов, изображенные на рис. 5в и рис. 5г, на отрезке $\lambda \in [1/8, 4]$ имеют три точки экстремума, две точки максимума (обозначим их $\lambda_{\max 1}$, $\lambda_{\max 2}$) и точку минимума $\lambda_{\min 1}$, в которой погрешность равна 0 (точка пересечения графиков решений задачи для $N = 1$ и $N = 60$). С увеличением λ погрешность, как и для двухслойных законов, стремится к нулю. При $\lambda \to 0$ погрешность также стремится к нулю. В табл. 4 приведены значения точек экстремума графика функции погрешности (5.2) и значения самой погрешности в этих точках, а также значения функции $\Delta_M(\lambda)$ на краях отрезка $\lambda \in [1/8, 4]$.

Анализируя данные в табл. 3, 4 и графики на рисунке рис. 5, можно сделать следующие выводы:

1) для всех рассматриваемых законов при небольшом отличии свойств подложки и покрытия ($\varphi_0 = 1,5$) даже при $N = 1$ достигается хорошая точность на всем рассматриваемом интервале λ ($\lambda \in [1/8, 4]$);

2) при среднем отличии свойств подложки и покрытия ($\varphi_0 = 3,5$) хорошая точность остается для законов 1, 2 (двухслойная среда) и для законов 3, 4 (среда с линейным изменением модуля сдвига) при $\lambda > 1$;

3) при большом отличии свойств подложки и покрытия ($\varphi_0 = 10$) неплохая точность остается для мягкого слоя, для жесткого слоя при $\lambda > 0,75$ и для линейных законов при больших значениях λ;

4) для всех законов и при любом отличии свойств подложки и покрытия, наибольшая

Таблица 4. Погрешность решения задачи, полученного при помощи простейшей аппроксимации, для законов 3, 4

	$\lambda_{\max 1}$	$\lambda_{\max 2}$	$\lambda\min 1$	$\Delta_M(\lambda_{\max 1})$	$\Delta_M\lambda_{\max 2})$	$\Delta_M(4)$	$\Delta_M(\frac{1}{8})$
закон 3, $\varphi_0 = 1,5$	0,35	0,6	1,2	8,5%	4,8%	1,6%	2,2%
закон 4, $\varphi_0 = 1,5$	0,35	0,8	1,5	8%	4,5%	2,4%	0,5%
закон 3, $\varphi_0 = 3,5$	0,3	0,5	0,9	30%	18%	3%	16%
закон 4, $\varphi_0 = 3,5$	0,4	0,95	2	24%	18%	10%	2%
закон 3, $\varphi_0 = 10$	0,13	0,4	0,6	85%	44%	4%	85%
закон 4, $\varphi_0 = 10$	0,6	1,4	3	56%	25%	20%	12%

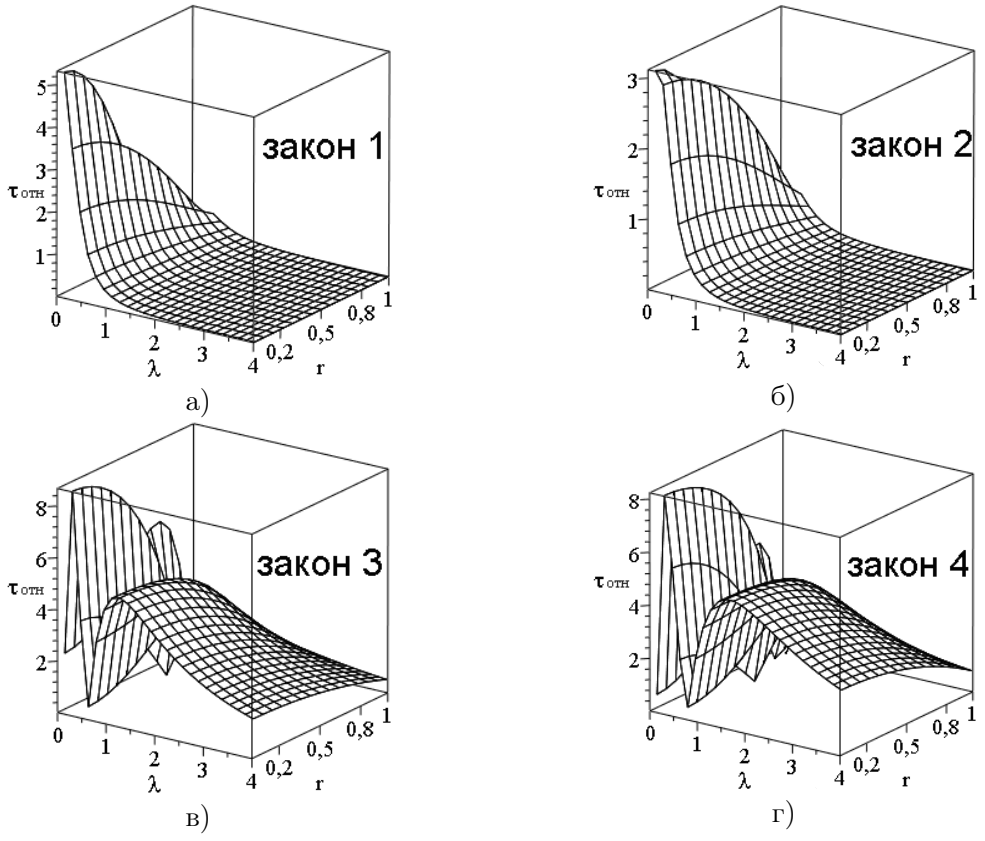


Рис. 5. Погрешность при расчете контактных напряжений под штампом при $N = 1$ по сравнению с результатами, полученными при $N = 60$, случай $\varphi_0 = 1,5$

погрешность наблюдается в диапазоне средних значений λ, т.е. $\lambda \in (1/8,\ 1)$;

5) для всех законов, при приближении к центру штампа (малых значениях r) погрешность увеличивается;

6) для линейного убывающего закона 3 с увеличением показателя неоднородности φ_0, значения точек экстремума функции погрешности уменьшаются (точки экстремума смещаются влево по оси λ), а для линейного убывающего закона 4 — наоборот увеличиваются (смещаются вправо).

Заключение

Используя алгоритм, подробно описанный в работе [15], удается добиться хорошей точности аппроксимации трансформанты ядра интегрального уравнения выражениями вида (2.4) даже для покрытий сложный структуры, градиент изменения упругих свойств которых изменяется 1, 2, 4 и более раз. В соответствии с этим и само решение, построенное двухсторонним асимптотическим методом, дает хорошую точность.

С увеличением числа волн в законах 5, 6 трансформанты ядра интегрального уравнения медленнее сходятся к 1 при $u \to \infty$, а графики распределения контактных напряжений под штампом растягиваются по оси λ, при этом характер самого распределения не изменяется.

При небольшом показателе неоднородности, формула простейшей аппроксимации (5.2) дает хорошую точность для всех законов. Законы 1, 2, описывающие слоистую среду, формула ухватывает лучше, чем законы 3, 4 (среда с линейным изменением модуля сдвига). Для законов 1, 2 при $\lambda > 1$ погрешность остается небольшой даже при сильной неоднородности. Но и для линейных законов 3, 4 при большом показателе неоднородности формула улавливает качественную структуру решения.

Литература

1. *Reissner E., Sagoci H. F.* Forced torsional oscillations of an elastic half-space // J. Appl. Phys. 15, 1944. P. 652–654.
2. *Sneddon I. N.* Note on a boundary value problem of Reissner and Sagoci // J. Appl. Phys. 18, 1947. P. 130–132.
3. *Sneddon I. N.* The Reissner–Sagoci problem // Proc. Glasgow Math. Assoc., 7, 1966. P. 136–144.
4. *Грилицкий Д. В.* Кручение двухслойной упругой среды // Прикладная механика. 1961. Т. 7. Вып. 1. С. 89–94.
5. *Айзикович С. М.* Кручение круглым штампом неоднородного полупространства // В сб.: Расчет оболочек и пластин. Ростов-на-Дону: РИСИ. 1978. С. 156–169.
6. *Gladwell G. M. L.* Contact problems in the classical theory of elasticity // Sijthof & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980. P. 364–375.
7. *Selvadurai A. P. S., Singh B. M., Vrbik J.* A Reissner-Sagoci problem for a nonhomogeneous elastic solid // J. Elasticity, 16, 1986. P. 383–391.
8. *Selvadurai A. P. S.* The settlement of a rigid circular foundation resting on a half-space exhibiting a near surface elastic nonhomogeneity // Int. J. Num. Analyt. Meth. Geomech. 20, 1996. P. 351–364.
9. *Singh B. M., Danyluk H. T., Vrbik J., Rokne J., Dhaliwal R. S.* The Reissner-Sagoci Problem for a Non-homogeneous Half-space with a Surface Constraint// Meccanica, 38, 2003. P. 453–465.
10. *Yu H. Y.* Forced torsional oscillations of multilayered solids // International Journal of Engineering Science 46, 2008. P. 250–259.
11. *Айзикович С. М., Александров В. М.* О свойствах функций податливости, соответствующих слоистому и непрерывно–неоднородному полупространству // ДАН СССР. 1982. Т. 266. №1. С. 40–43.
12. *Приварников А. К.* Пространственная деформация многослойного основания // В сб.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск. 1973. С. 27–45.
13. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимаций. М.: Наука, 1965.
14. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 88–99.
15. *Айзикович С. М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148–158.

Ключевые слова: контактные задачи, функционально-градиентные материалы, аналитическое решение

Статья поступила 3 июня 2010 г.
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону
© Васильев А. С., Айзикович С. М., 2010