

УДК 519.17

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ РАДИАЦИОННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ¹*Леоненко Д. В.²*

THE NATURAL VIBRATION OF SANDWICH CIRCULAR PLATE UNDER RADIATION EXPOSURE

Leonenko D. V.

The axisymmetrical natural vibrations of elastic circular sandwich plate on an elastic foundation in radiation field. The Kirchhoff hypotheses are accepted for the isotropic face layers. The light filler is incompressible along the thickness, the strained normal of the filler remains rectilinear but rotates. Reaction of foundation was described on the base of Winkler's model. Analytical deciding is conducted. Numerical results for sandwich ceramics-metal-polymeric plate were adduced.

Keywords: natural vibration, radiation field, sandwich circular plate, elastic foundation

Введение

Широкое применение трехслойных элементов конструкций в современных отраслях промышленности обуславливает необходимость разработки методов их расчета. В условиях деформации изгиба эти конструкции оказываются наиболее рациональными, то есть близкими оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. Воздействие локальных статических нагрузок, в том числе температурных, на трехслойные пластины на упругом основании исследовано в работах [1–3]. В статьях [4, 5] рассмотрены свободные колебания слоистых пластин при жестком защемлении контура. В настоящей работе рассмотрены собственные колебания в радиационном поле круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим винклеровским основанием.

1. Постановка задачи

Решение рассматриваемой задачи проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z (рис. 1). Для изотропных несущих слоев толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине запол-

нитель ($h_3 = 2c$) является легким, т.е. в нем пренебрегается работой касательных напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении. Деформированная нормаль заполнителя остается прямолинейной, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . На границах слоев перемещения непрерывны. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , т.е. $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$. Далее эти функции считаем искомыми.

Пусть в начальный момент времени на поверхность $z = c + h_1$ рассматриваемой шарнирно опертой пластины, связанной с упругим основанием, падает поток нейтронов интенсивностью ϕ_0 в направлении, противоположном внешней нормали. Радиационное облучение твердых тел сопровождается многочисленными эффектами, в результате которых в них возникает дополнительная объемная деформация θ_I , изменяются упругие и особенно пластические характеристики вещества. Если на границу ($z = c + h_1$) параллельно оси z падают нейтроны с одинако-

¹Работа выполнена при поддержке БРФФИ (T09K-012).

²Леоненко Денис Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта; e-mail: leoden@tut.by

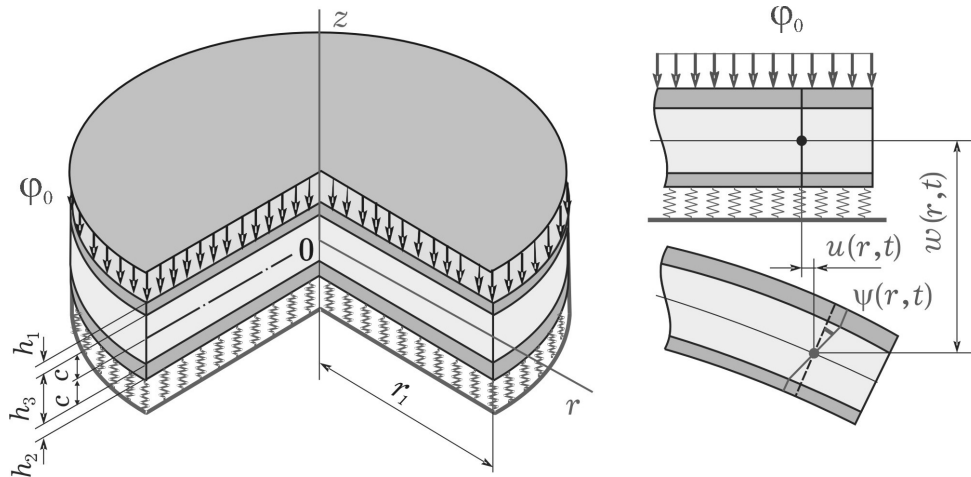


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины

вой средней энергией и интенсивностью ϕ_0 , нейтрон/(м²·с), то интегральный нейтронный поток на глубине z в нашем случае определяется формулой [6]

$$I(z, t) = \phi_0 t e^{-\mu(c+h_1-z)}. \quad (1.1)$$

Величина μ является эффективным макроскопическим сечением. Для любого химического элемента

$$\mu = \sigma n_0 = \sigma A_0 \rho / A$$

и имеет порядок 1/см, причем здесь σ — эффективное сечение, отнесенное к одному ядру, n_0 — число ядер в 1 см³, A_0 — число Авогадро, ρ — плотность, A — атомный вес. В нашем случае под μ будем понимать осредненную по толщине пластинки характеристику пакета

$$\mu = \frac{1}{h_1 + h_2 + h_3} \sum_{k=1}^3 \mu_k h_k.$$

В грубом приближении можно считать, что изменение объема вещества прямо пропорционально интегральному потоку $I(z, t)$ [6], введенному соотношением (1.1), и, следовательно,

$$\theta_{Ik} = B_k I(z, t), \quad (1.2)$$

где B_k — константа материала, получаемая из опыта.

Связь между реакцией и прогибом принимается в соответствии с моделью Винклера

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (1.3)$$

где κ_0 — коэффициент жесткости основания.

Закон Гука для k -го слоя пластины можно записать в виде

$$s_{ij}^k = 2G_k \varepsilon_{ij}^k, \quad \sigma^k = K_k (3\varepsilon^k - B_k I), \quad (1.4)$$

где s_{ij}^k , ε_{ij}^k — девиаторные и σ^k , ε^k — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k — модули сдвиговой и объемной деформации.

Система дифференциальных уравнений, описывающая поперечные колебания рассматриваемой пластины без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, выводится из вариационного принципа Лагранжа. Она будет совпадать с приведенной в [5] системой уравнений, описывающей свободные колебания подобной пластины на основании (1.3), без учета воздействия внешних физических полей

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w, r) = 0,$$

$$L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w, r) = 0,$$

$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w, r) - M_0 \ddot{w} - \kappa_0 w = 0. \quad (1.5)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате; коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 , L_3 введены в [5].

Начальные условия движения принимаются однородными, при отсутствии радиационного поля

$$\begin{aligned} w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = 0, \\ I(z, t) = I(z, 0) = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Контур пластинки предполагаем шарнирно опертым, т. е. при $r = r_1$ должны выполняться

ся условия:

$$u = \psi = w = 0, \quad (1.7)$$

$$M_r = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz \Big|_{r=r_1} = 0,$$

где $\sigma_r^{(k)}$ — радиальные напряжения в k -слое.

2. Решение задачи

Используя закон Гука (1.4) и принятые гипотезы для рассматриваемой пластины, последнее условие в (1.7) можно записать в виде

$$M_r = a_2 u_{,r} + a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_{60} w_{,r} / r - M_I = 0, \quad (2.1)$$

где

$$a_{60} = h_1(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3})K_1^- + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3})K_2^- + \frac{2}{3}c^3 K_3^-,$$

$$K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k,$$

$$M_I = 3 \sum_{k=1}^3 K_k^- B_k \int_{h_k} I(z, t) z dz = M_{I0} t,$$

$$M_{I0} = 3\phi_0 \left\{ \frac{B_1}{\mu_1} K_1^- \left[\left(c + h_1 - \frac{1}{\mu_1} \right) - \left(c - \frac{1}{\mu_1} \right) e^{-\mu_1 h_1} \right] - \frac{B_2}{\mu_2} K_2^- \left[\left(c + \frac{1}{\mu_2} \right) e^{-\mu_2(h_1+2c)} - \left(c + h_2 + \frac{1}{\mu_2} \right) e^{-\mu_2(h_1+2c+h_2)} \right] + \frac{B_3}{\mu_3} K_3^- \left[\left(c - \frac{1}{\mu_3} \right) e^{-\mu_3 h_1} + \left(c + \frac{1}{\mu_3} \right) e^{-\mu_3(h_1+2c)} \right] \right\}.$$

Таким образом, в граничном условии (2.1) появился «радиационный» M_I момент, обусловленный дополнительной объемной деформацией от радиационного (1.2) воздействия. Этот момент и может возбудить колебания рассматриваемой трехслойной пластины.

С помощью первых двух уравнений обнуляются коэффициенты перед u и ψ в третьем уравнении системы (1.5). После двукратного интегрирования получаем

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r,$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r,$$

$$L_3(w_{,r}) + \kappa^4 w + M^4 \ddot{w} = 0, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D, \quad (2.2)$$

где

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2},$$

$$\kappa^4 = \kappa_0 D, \quad M^4 = M_0 D,$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

В связи с ограниченностью искомого решения в начале координат для сплошных пластин в (2.2) необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$. Из первых двух условий на границе (1.7) следует

$$C_1 = -\frac{1}{r_1} b_1 w_{,r} \Big|_{r=r_1},$$

$$C_3 = -\frac{1}{r_1} b_2 w_{,r} \Big|_{r=r_1}.$$

Это позволяет выписать два граничные условия для прогиба на контуре пластины

$$w = 0, \quad a_7 w_{,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{,r} + M_I = 0, \quad (2.3)$$

$$a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2, \quad a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2.$$

Решение последнего из уравнений системы (2.2) представим в виде суммы квазистатического прогиба w_s и динамической его части w_d

$$w = w_s + w_d. \quad (2.4)$$

Квазистатический прогиб удовлетворяет уравнению

$$L_3(w_s, r) = 0$$

при граничных условиях на контуре

$$w_s = 0, \quad a_7 w_{s,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{s,r} + M_I = 0.$$

В рассматриваемом случае для сплошной пластины он имеет вид

$$w_s = \frac{M_I r_1^2}{2(a_7 + a_8)} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right]. \quad (2.5)$$

Подставляя решение (2.4) в общее уравнение для прогиба (2.2), в начальные (1.6) и граничные (2.3) условия и учитывая квазистатический прогиб (2.5), получим замкнутую начально-краевую задачу для определения динамической части прогиба w_d . Дифференциальное уравнение в частных производных для его определения становится неоднородным

$$L_3(w_d, r) + \kappa^4 w_d + M^4 \ddot{w}_d = -\frac{r_1^2 (\kappa^4 M_I + M^4)}{2(a_7 + a_8)} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right], \quad (2.6)$$

$$\ddot{M}_t = \sum_{k=1}^3 \ddot{M}_{kt}.$$

В начальных условиях движения появляется ненулевая исходная скорость

$$\begin{aligned} w_d &= 0, \\ \dot{w}_d &= -\frac{r_1^2 M_{I0}}{2(a_7 + a_8)} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right], \\ t &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Граничные условия станут однородными

$$\begin{aligned} w_d &= 0, \quad a_7 w_{d,rr} + \frac{a_8}{r_1} w_{d,r} = 0, \\ r &= r_1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рассмотрим сначала однородное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (2.6)

$$L_3(w_d, r) + \kappa^4 w_d + M^4 \ddot{w}_d = 0, \quad (2.9)$$

Его решение представим в виде

$$w_d^0 = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (2.10)$$

где ω — частота собственных колебаний.

После подстановки (2.10) в (2.9), получим дифференциальное уравнение для определения функции $v(r)$

$$L_3(v, r) - \lambda^4 v = 0, \quad (2.11)$$

где $\lambda^4 = \beta^4 - \kappa^4$, $\beta^4 = M^4 \omega^2$.

Решение уравнения (2.11) с учетом ограниченности в начале координат примет вид

$$v(\lambda r) = C_5 J_0(\lambda r) + C_6 I_0(\lambda r), \quad (2.12)$$

где J_0, I_0 — функции Бесселя и Макдональда первого рода.

Подставляя значения производных бesselевых функций [7], а также (2.12), (2.10) в граничные условия (2.8) и требуя нетривиальности решения вытекающей системы уравнений относительно неизвестных констант интегрирования C_5, C_6 , получим трансцендентное уравнение для определения собственных чисел λ_n

$$\frac{J_1(\lambda r_1)}{J_0(\lambda r_1)} + \frac{I_1(\lambda r_1)}{I_0(\lambda r_1)} = 2 \frac{a_7}{a_7 - a_8} \lambda r_1. \quad (2.13)$$

Частоты собственных колебаний пластины можно определить после решения (2.13) из выражения

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4} = \frac{\beta_n^4}{M_0 D}, \quad \beta_n^4 = \lambda_n^4 + \kappa^4.$$

В результате, для описания динамической части прогиба исследуемой круговой трехслойной пластины при радиационном ударе используется фундаментальная система собственных ортонормированных функций [3, 5]

$$\begin{aligned} v_n(\lambda_n, r) &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{d_n} \left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Искомый прогиб w_d , удовлетворяющий уравнению (2.6), можно представить с помощью разложения в ряд по системе функций (2.14):

$$w_d = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t). \quad (2.15)$$

Подставляя решение (2.15) в уравнение колебаний (2.6), начальные (2.7) и граничные (2.8) условия, умножая члены уравнения на величину $r v_n dr$ и интегрируя по радиусу пластины от 0 до r_1 , в силу ортонормированности системы собственных функций (2.14) получим для неизвестной функции $T_n(t)$ уравнение

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = -\frac{r_1^2 (\kappa^4 M_I) I(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8) M^4}, \quad (2.16)$$

при начальных условиях

$$T_n = 0, \quad \dot{T}_n = -\frac{r_1^2 I(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8)} M_{I0} \text{ при } t = 0.$$

Таблица 1. Собственные числа для шарнирно опертой по контуру пластины

Номер n	Собственное число λ_n	Номер n	Собственное число λ_n
0	3,193	8	28,254
1	6,301	9	31,392
2	9,431	10	34,531
3	12,566	11	37,679
4	15,702	12	40,808
5	18,840	13	43,947
6	21,977	14	47,086
7	25,116	15	50,224

Здесь через $I(\lambda_n)$ обозначен следующий интеграл:

$$I(\lambda_n) = \int_0^{r_1} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right] r v_n dr = \frac{2}{d_n \lambda_n^2} \left(J_2(\lambda_n r_1) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_2(\lambda_n r_1) \right). \quad (2.17)$$

Решение (2.16) можно представить

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) - \frac{r_1^2 I(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} \times \int_0^t \kappa^4 M_{I0}(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau, \quad (2.18)$$

$$A_n = 0, \quad B_n = -\frac{r_1^2 I(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} M_{I0}.$$

Квазистатический прогиб (2.5) разлагается в ряд по собственным функциям v_n

$$w_s = \frac{M_I r_1^2}{2(a_7 + a_8)} \sum_{n=0}^{\infty} I(\lambda_n) v_n. \quad (2.19)$$

Величина $I(\lambda_n)$ определена выражением (2.17).

Полный динамический прогиб рассматриваемой пластины получим, просуммировав (2.15) и (2.19), после чего радиальное перемещение и сдвиг следуют из соотношений (2.2):

$$u = \frac{r_1^2 b_1 M_{I0}}{2(a_7 + a_8)} \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,r} \frac{I(\lambda_n)}{\omega_n} \times (\omega_n t - \sin(\omega_n t)) \left(1 - \frac{\kappa^4}{\omega_n M^4} \right) + C_1 r,$$

$$\psi = \frac{r_1^2 b_2 M_{I0}}{2(a_7 + a_8)} \sum_{n=0}^{\infty} v_{n,r} \frac{I(\lambda_n)}{\omega_n} \times (\omega_n t - \sin(\omega_n t)) \left(1 - \frac{\kappa^4}{\omega_n M^4} \right) + C_3 r,$$

$$w = \frac{r_1^2 M_{I0}}{2(a_7 + a_8)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n I(\lambda_n)}{\omega_n} \times (\omega_n t - \sin(\omega_n t)) \left(1 - \frac{\kappa^4}{\omega_n M^4} \right). \quad (2.20)$$

Здесь константы интегрирования вычисляются по формулам

$$\{C_1, C_3\} = \{b_1, b_2\} \frac{r_1 M_{I0}}{2(a_7 + a_8)} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n I(\lambda_n)}{d_n \omega_n} \left[J_1(\lambda_n r_1) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n r_1) \right] \times (\omega_n t - \sin(\omega_n t)) \left(1 - \frac{\kappa^4}{\omega_n M^4} \right) \right).$$

Таким образом, функции, описывающие поперечные колебания трехслойной круговой пластины, связанной с упругим основанием, вследствие теплового удара, определены выражением (2.20).

3. Численные результаты

Численные результаты получены для шарнирно опертой трехслойной круговой пластины, защитный слой которой выполнен из кордиерита, заполнитель – фторопласт (ПТФЭ), несущий слой – дюралюминий (сплав Д16Т). При этом принималось, что весь нейтронный поток реализуется во внешнем слое: $\phi_0 = 5 \cdot 10^{16}$ нейтрон/(м)².с.

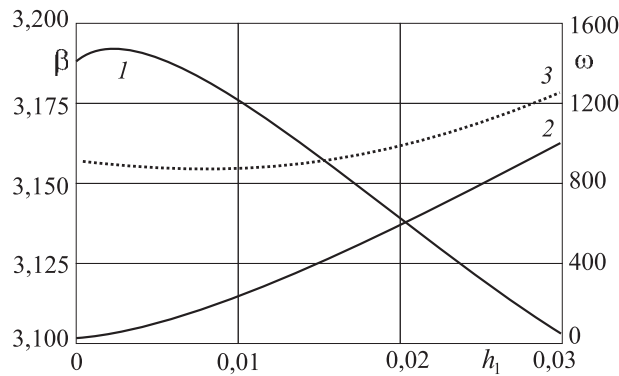


Рис. 2. Зависимость собственных чисел и частот колебаний от толщины первого несущего слоя. 1 — собственные числа β_0 ; 2 — собственные частоты ω_0 пластины без основания; 3 — собственные частоты пластины на основании средней жесткости

Термомеханические характеристики принятых материалов приведены в [8].

Трансцендентное уравнение для собственных чисел (2.13) при шарнирном опирании контура пластины численно исследовалось при $h_3 = 10h_2 = 20h_1 = 0,05$. Первые 16 корней, вычисленные с точностью до 0,001, приведены в таблице.

На рис. 2 показана зависимость параметров колебаний от толщины первого несущего слоя.

Здесь характер поведения собственных чисел и частот противоположен характеру поведения собственных чисел и частот при росте толщины несущего слоя — собственные числа убывают, частоты — растут. При этом увеличение теплозащитного кордиеритового слоя приводит к большему увеличению жесткости круговой трехслойной пластины и вызывает сравнительно усиленный рост частот. Наличие упругого основания приводит к существенному росту частот при увеличении толщины внешнего слоя.

Рассмотрим коэффициент k_n , характеризующий отношение динамической компоненты прогиба w_{dn} (2.15) к квазистатической составляющей w_{sn} (2.19). Используя выражение (2.18) для функций T_n , получаем ($\tau_n = \omega_n t$)

$$k_n = \frac{w_{dn}}{w_{sn}} = -\frac{1}{\tau_n} \left(\sin \tau_n + \frac{\kappa^4}{\omega_n^2 M^4} (\tau_n - \sin \tau_n) \right).$$

Соответствующие графики зависимости от времени коэффициентов k_n при $n = 0, 1$ приведены на рис. 3, 4.

При малой жесткости основания характер колебаний не изменяется, несколько уве-

личивается частота, уменьшается амплитуда прогиба, колебательный процесс смещается вниз. Особенно при частоте основного тона ω_0 . При основании средней жесткости колебания практически прекращаются, т.е. уже основание средней жесткости не допускает возникновения колебаний при радиационном ударе.

Заключение

Таким образом, предложенная методика позволяет исследовать свободные колебания круговых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием, в радиационном поле. Полученные расчетные формулы описывают соответствующие динамические перемещения в пластине.

Литература

1. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Сулейман М. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 55–62.
2. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании // Механика твердого тела. Изв. РАН. 2009. № 5. С. 106–119.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 1. С. 16–20.
4. Ashour A.S. The free vibrations of symmetrically angle-ply laminated fully clamped

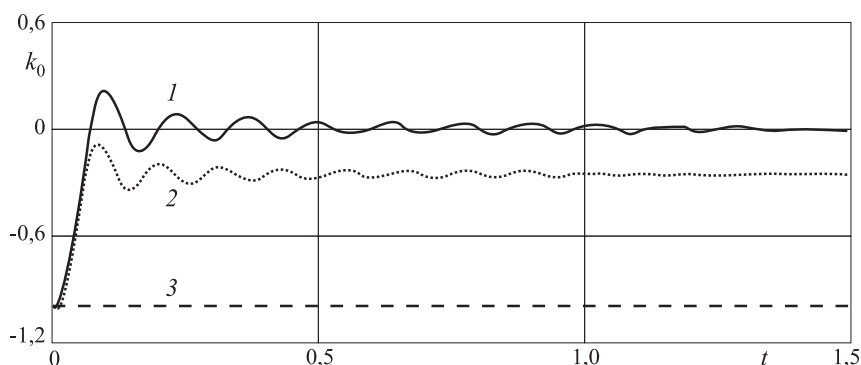


Рис. 3. Отношение динамической компоненты прогиба к квазистатической при частоте ω_0

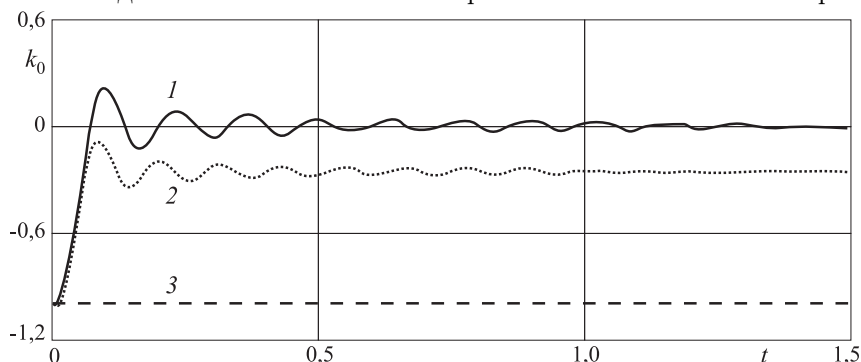


Рис. 4. Отношение динамической компоненты прогиба к квазистатической при частоте ω_1

1 — пластина, не связанная с основанием; 2 — пластина на основании малой жесткости, $\kappa_0 = 10^5$ Па/м; 3 — основание средней жесткости, $\kappa_0 = 10^8$ Па/м

skew plates // J. Sound and Vibr. 2009. 323. № 1–2. P. 444–450

5. Леоненко Д. В. Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 3. С. 42–47.
6. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Упругопла-

стические деформации полых цилиндров. М.: Изд-во МГУ, 1960. 224 с.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. 2. 295 с.
8. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании. М.: Физматлит, 2006. 379 с.

Ключевые слова: собственные колебания, радиационное поле, трехслойная круговая пластина, упругое основание

Статья поступила 28 мая 2010 г.

Белорусский государственный университет транспорта, г. Минск

© Леоненко Д. В., 2010