

УДК 539.3

## ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНАЯ ПРОЦЕДУРА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ И ОТВЕРСТИЯМИ

*Мазин В. А.<sup>1</sup>, Михайлова В. Л.<sup>2</sup>, Сухомлинов Л. Г.<sup>3</sup>*

A VARIATIONAL FINITE-DIFFERENCE PROCEDURE FOR NUMERICAL SOLUTION OF A PLANE ELASTIC PROBLEM FOR A RECTANGULAR DOMAIN WITH INCLUSIONS AND HOLES

Mazin V. A., Mikhaylova V. L., Sukhomlinov L. G.

A variational finite-difference computational procedure for the analysis of stresses in rectangular domains with inclusions and holes is presented. The results of numerical simulations are compared with the existing analytical solutions and experimental data for stress distributions around a circular inclusion and around a circular hole.

Keywords: plane elastic problem, variational finite-difference procedure, stresses around holes and inclusions

Широко распространенной при решении вопросов о концентрации напряжений в несущих элементах конструкций и сооружений является формулировка в виде плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с локальными отверстиями и включениями [1, 2]. Под включением при этом понимается ядро (образованное из материала, отличного от материала рассматриваемой области), целиком заполняющее сделанное в области отверстие и сцепленное с материалом области по всему контуру отверстия. При численном решении подобного рода задач, как правило, используются известные программные комплексы конечно-элементного расчета [3], которые в интерактивном режиме способны строить соответствующие (нерегулярные) сетки конечных элементов, сгущающиеся с приближением к границам отверстий. Построение такой сетки для каждой конкретной задачи рассматриваемого типа представляет собой самостоятельную (достаточно сложную) проблему, от решения которой существенным образом зависит точность результатов последующего расчета напряженно-деформированного состоя-

ния. Все это в значительной мере затрудняет работу исследователя (особенно при проведении параметрических исследований со сложной конфигурацией отверстий, мест их расположения, а также размеров). Излагаемое ниже демонстрирует возможности использования легко генерируемых прямоугольных сеток при численном решении того же класса задач. Расчеты выполняются с применением вариационно-разностной процедуры, формулируемой в терминах перемещений узлов прямоугольной сетки элементов.

Как известно [1], плоская задача теории упругости формулируется для области  $S$ , лежащей в плоскости  $Oxy$  прямоугольной декартовой системы координат  $Oxyz$ . Упомянутая область  $S$  представляет собой либо срединную поверхность тонкой пластинки (случай плоского напряженного состояния), либо поперечное сечение протяженного вдоль оси  $Oz$  цилиндра (случай плоского деформированного состояния). Указанные пластинка и цилиндр находятся под действием поверхностных и объемных сил, интенсивности которых будем обозначать  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{f}$ , а их проекции на оси  $Oxy$  —  $q_x, q_y$  и  $f_x, f_y$  со-

<sup>1</sup>Мазин Василий Александрович, старший преподаватель кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета; e-mail: vasilm@yandex.ru

<sup>2</sup>Михайлова Виктория Львовна, канд. техн. наук, доцент кафедры теоретической механики Московского государственного технического университета «МАМИ»; e-mail: tm@mami.ru

<sup>3</sup>Сухомлинов Лев Георгиевич, д-р техн. наук, профессор кафедры теоретической механики Московского государственного технического университета «МАМИ»; e-mail: tm@mami.ru

ответственно. Для компонент вектора перемещений вводим обозначения  $u_x$  и  $u_y$ , а для компонент тензоров напряжений и деформаций, входящих в формулировку плоской задачи, — обозначения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  и  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{xy}$ .

В случае изотропного материала вытекающая из закона Гука связь между обозначенными напряжениями и деформациями может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda_1 \varepsilon_{xx} + \lambda_2 \varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda_2 \varepsilon_{xx} + \lambda_1 \varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy}.\end{aligned}\quad (1)$$

Коэффициенты  $G$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  линейных зависимостей (1) выражаются через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  материала исследуемого тела согласно следующей схеме:

1)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

2) в случае плоского напряженного состояния

$$\lambda_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \lambda_2 = \nu \lambda_1;$$

3) в случае плоского деформированного состояния

$$\lambda_1 = 2G + \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda,$$

где

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Деформации  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{xy}$ , входящие в выражения (1), связаны с перемещениями  $u_x$  и  $u_y$  в каждой точке исследуемого тела соотношениями Коши вида

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (2)$$

Граничные условия в рассматриваемой плоской постановке задачи формулируются для границы  $\Gamma$  упомянутой выше области  $S$ . В рамках такой формулировки полагаем, что на части  $\Gamma_u$  границы  $\Gamma$  заданы перемещения, а именно

$$u_x|_{\Gamma_u} = u_x^*, \quad u_y|_{\Gamma_u} = u_y^*.\quad (3)$$

Здесь  $u_x^*$ ,  $u_y^*$  заданные функции, определяющие распределение перемещений вдоль участка  $\Gamma_u$  границы  $\Gamma$ . К остальной части  $\Gamma_q$  границы  $\Gamma$  приложены заданные нагрузки  $q_x$  и  $q_y$ .

Условия равновесия для рассматриваемой области  $S$  сформулируем в виде вариационного уравнения принципа возможных перемещений [4], утверждающего, что при равновесии деформируемого тела работа приложенных к точкам тела сил на вариациях перемещений этих точек равна работе напряжений на соответствующих вариациях деформаций. Такое уравнение в случае плоской постановки задачи можно записать в виде

$$\begin{aligned}\iint_S \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} dS &= \\ &= \iint_S (f_x \delta u_x + f_y \delta u_y) dS + \\ &+ \int_{\Gamma_q} (q_x \delta u_x + q_y \delta u_y) d\Gamma.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь  $dS$  — элемент площади области  $S$ , а  $d\Gamma$  — элемент длины границы  $\Gamma$ . Последний интеграл в (4) берется только по части  $\Gamma_q$  границы  $\Gamma$ , т. к. на участке  $\Gamma_u$  в соответствии с граничными условиями (3) должно быть

$$\delta u_x|_{\Gamma_u} = 0, \quad \delta u_y|_{\Gamma_u} = 0.\quad (5)$$

Входящие в уравнение (4) вариации деформаций с использованием равенств (2) могут быть выражены через вариации перемещений так, что

$$\begin{aligned}\delta \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial \delta u_x}{\partial x}, \quad \delta \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \delta u_y}{\partial y}, \\ \delta \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_y}{\partial x} \right).\end{aligned}\quad (6)$$

В случае области с включением интеграл в левой части равенства (4) представляется в виде суммы двух интегралов, один из которых соответствует включению, а другой — остальной части области  $S$ . При этом для напряжений, входящих в подынтегральные выражения, используются физические соотношения (1) с упругими постоянными, соответствующими материалу той части области  $S$ , по которой распространяется каждый из отмеченных интегралов.

Отметим, что из вариационной формулировки (3)–(5) с использованием связей

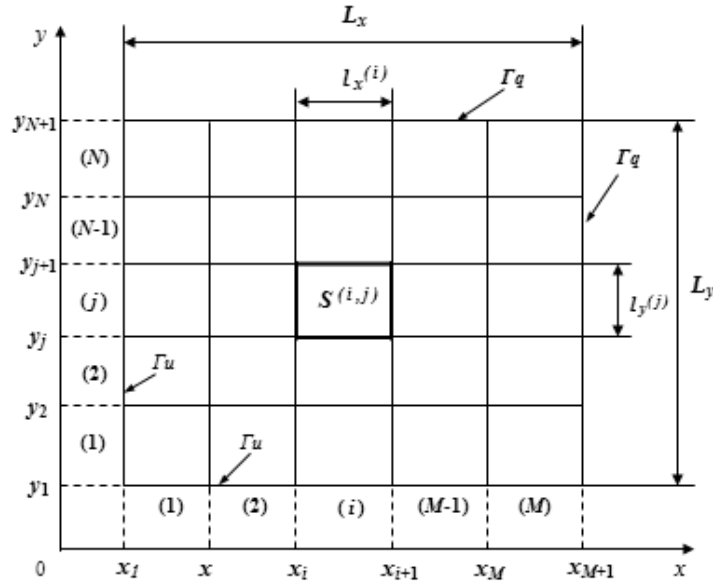


Рис. 1. Прямоугольная область с сеткой прямоугольных элементов

(6) можно получить традиционную формулировку плоской задачи теории упругости для области с включением [2]. Осуществляя известным образом процедуру варьирования [4], получаем дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях (для каждой внутренней точки области и включения), граничные условия в напряжениях на части  $\Gamma_q$  границы  $\Gamma$ , контактные условия в напряжениях на контуре сцепления области с включением. Формулировка дополняется граничными условиями в перемещениях (3), геометрическими соотношениями (2) и физическими соотношениями (1), где упругие постоянные для материалов области и включения принимают различные значения.

Далее принимаем в качестве объекта исследования заданную в первой четверти плоскости  $Oxy$  прямоугольную область  $S$  с размерами  $L_x, L_y$ . На рис. 1 представлена схема разбиения данной области на  $M \times N$  прямоугольных элементов  $S^{(i,j)}$  ( $i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$ ). На рис. 2 представлена схема, изображающая элементарный прямоугольник  $S^{(i,j)}$  с системой его срединных материальных волокон и узловых точек. Для определенности считаем, что участок  $\Gamma_u$  границы  $\Gamma$  рассматриваемой области  $S$  включает левую и нижнюю стороны прямоугольника  $S$ , а участок  $\Gamma_q$  — правую и верхнюю его стороны.

С учетом этого вариационное уравнение (4) для рассматриваемой прямоугольной об-

ласти может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \iint_{S^{(i,j)}} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} dS = \\ & = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \iint_{S^{(i,j)}} \delta u_x + f_y \delta u_y dS + \\ & + \sum_{i=1}^M \int_{x_i}^{x_{i+1}} [q_x(x) \delta u_x + q_y(x) \delta u_y] dx + \\ & + \sum_{j=1}^N \int_{y_j}^{y_{j+1}} [q_x(y) \delta u_x + q_y(y) \delta u_y] dy. \quad (7) \end{aligned}$$

Предполагая, что величины

$$l_x^{(i)} = x_{i+1} - x_i \quad \text{и} \quad l_y^{(j)} = y_{j+1} - y_j$$

$$(i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N)$$

достаточно малы, вычисление интегралов в уравнении (7) приближенно выполним по значениям подынтегральных функций в серединах соответствующих элементарных участков интегрирования. В результате по-

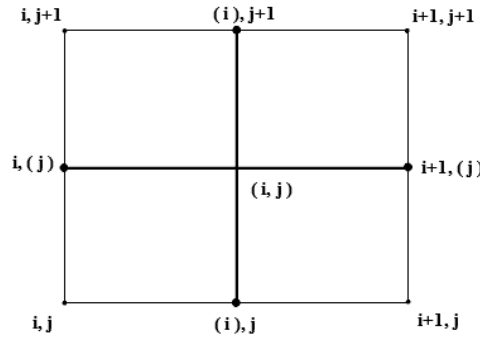


Рис. 2. Элементарный прямоугольник  $S^{(i,j)}$  с системой срединных материальных волокон и узловых точек

лучим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left[ \tilde{\sigma}_{xx}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} + \tilde{\sigma}_{yy}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)} + \right. \\ & \quad \left. + 2\tilde{\sigma}_{xy}^{(i,j)} \delta \tilde{\varepsilon}_{xy}^{(i,j)} \right] l_x^{(i)} l_y^{(j)} = \\ & = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left[ \tilde{f}_x^{(i,j)} \delta \tilde{u}_x^{(i,j)} + \tilde{f}_y^{(i,j)} \delta \tilde{u}_y^{(i,j)} \right] l_x^{(i)} l_y^{(j)} + \\ & \quad + \sum_{i=1}^M \left[ q_x(\tilde{x}^{(i)}) \delta \tilde{u}_x^{(i)} + q_y(\tilde{x}^{(i)}) \delta \tilde{u}_y^{(i)} \right] l_x^{(i)} + \\ & \quad + \sum_{j=1}^N \left[ q_x(\tilde{y}^{(j)}) \delta \tilde{u}_x^{(j)} + q_y(\tilde{y}^{(j)}) \delta \tilde{u}_y^{(j)} \right] l_y^{(j)}. \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь «волной» отмечены величины, определяемые в серединах соответствующих участков интегрирования. При этом

$$\tilde{x}^{(i)} = x_i + l_x^{(i)}/2, \quad \tilde{y}^{(j)} = y_j + l_y^{(j)}/2.$$

Вводим далее обозначения  $u_x^{i,j}$ ,  $u_y^{i,j}$  для значений перемещений в узловых точках рассматриваемой сетки прямоугольных элементов с координатами  $x_i$ ,  $y_j$  ( $i = 1, 2, \dots, M+1$ ;  $j = 1, 2, \dots, N+1$ ). Обозначаем также как  $u_x^{i,(j)}$ ,  $u_y^{i,(j)}$ ,  $u_x^{(i),j}$ ,  $u_y^{(i),j}$  ( $(i) = 1, 2, \dots, M$ ;  $(j) = 1, 2, \dots, N$ ) перемещения узловых точек срединных материальных волокон элементарных прямоугольников. Входящие в вариационное уравнение (8) деформации, относящиеся к середине элемента  $S^{(i,j)}$ , определяем на основе соотношений (2), вычисляя при этом соответствующие частные производные с применением центрально-разностных схем. В результате имеем

$$\tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} = (u_x^{i+1,(j)} - u_x^{i,(j)})/l_x^{(i)},$$

$$\tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)} = (u_y^{(i),j+1} - u_y^{(i),j})/l_y^{(j)}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{xy}^{(i,j)} = 0, 5(u_x^{(i),j+1} - u_x^{(i),j})/l_y^{(j)} + \\ + 0, 5(u_y^{i+1,(j)} - u_y^{i,(j)})/l_x^{(i)}. \end{aligned}$$

Значения перемещений в средних точках упомянутых участков интегрирования, а также в узловых точках введенных в рассмотрение срединных материальных волокон получаем путем осреднения перемещений соответствующих смежных узлов сетки прямоугольных элементов. В результате для узловых точек срединных материальных волокон имеем

$$\begin{aligned} u_x^{i,(j)} = 0, 5(u_x^{i,j+1} + u_x^{i,j}) \quad (x \Leftrightarrow y), \\ u_x^{(i),j} = 0, 5(u_x^{i+1,j} + u_x^{i,j}) \quad (x \Leftrightarrow y), \end{aligned} \quad (10)$$

для средин граничных отрезков —

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x^{(i)} = u_x^{(i),N+1} \quad (x \Leftrightarrow y), \\ \tilde{u}_x^{(j)} = u_x^{M+1,(j)} \quad (x \Leftrightarrow y), \end{aligned} \quad (11)$$

и для средин прямоугольных элементов —

$$\tilde{u}_x^{(i,j)} = 0, 25(u_x^{i,j} + u_x^{i+1,j} + u_x^{i,j+1} + u_x^{i+1,j+1}) \quad (x \Leftrightarrow y). \quad (12)$$

Для напряжений в серединах элементов в соответствии с соотношениями упругости (1) записываем

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx}^{(i,j)} = \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} + \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)}, \\ \tilde{\sigma}_{yy}^{(i,j)} = \lambda_2 \tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)} + \lambda_1 \tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}^{(i,j)} = 2G \tilde{\varepsilon}_{xy}^{(i,j)}.$$

При этом имеем в виду, что значения параметров упругости в выражениях (13) однозначно определяются принадлежностью данного элемента либо включению, либо остальной части области  $S$ .

Заметим, что определяемые схемой (9) параметры  $\tilde{\varepsilon}_{xx}^{(i,j)}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{yy}^{(i,j)}$  и  $2\tilde{\varepsilon}_{xy}^{(i,j)}$  представляют собой относительные удлинения срединных материальных волокон элементарного прямоугольника и угол сдвига между этими первоначально перпендикулярными волокнами (что соответствует известной трактовке компонент тензора деформаций применительно к достаточно малому элементу деформируемой среды, где картина деформации близка к однородной). Это дает основание сформировать представление о дискретной модели, строящейся с применением схемы (9), как об ансамбле элементарных пар срединных материальных волокон, работающих (с учетом схемы (13)) на растяжение-сжатие и сдвиг. Схема (10) обеспечивает совместность работы таких пар, принадлежащих смежным элементарным прямоугольникам. А вариационное уравнение в форме (8) обеспечивает приведение внутренних силовых факторов (напряжений) в каждом из элементарных прямоугольников области  $S$  к соответствующим срединным волокнам. Такое приведение осуществляется на основе критерия равенства работ.

С использованием связей (9)–(13) окончательно приходим к формулировке вариационного уравнения (8) в терминах перемещений узлов сетки прямоугольных элементов (узловых перемещений). С учетом того, что часть узловых перемещений задается граничными условиями (3), приравнявая коэффициенты при вариациях неизвестных узловых перемещений в левой и правой части указанного вариационного уравнения, получаем разрешающую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых перемещений. Решаем эту систему методом Гаусса, а затем определяем параметры напряженно-деформированного состояния в средних точках элементов расчетной модели с использованием связей (10), (9), (12), (13).

К важному свойству данной дискретной модели следует отнести то, что в случае однородного напряженно-деформированного состояния исследуемой области результаты численного моделирования совпадают с точным решением соответствующей задачи тео-

рии упругости. В этом можно убедиться, рассматривая случай прямоугольной области  $S$ , находящейся под действием равномерно распределенных по ее сторонам поверхностных нагрузок, обеспечивающих однородный характер ее напряженного состояния. В таком случае значения напряжений в точках области и значения интенсивностей соответствующих поверхностных нагрузок совпадают между собой. Если теперь область  $S$  представить в виде одного прямоугольного элемента ( $M = 1$ ,  $N = 1$ ), то из вариационного уравнения (8), сформулированного применительно к рассматриваемому случаю нагружения, с учетом связей (9) следует, что значения напряжений в середине элемента (в данном случае области  $S$ ) совпадают со значениями интенсивностей соответствующих поверхностных нагрузок. Другими словами, в рассматриваемом случае получаемые численным моделированием результаты по напряжениям в середине области  $S$  совпадают с точным решением. Аналогичное совпадение имеет место для деформаций и перемещений, вычисляемых в середине области  $S$ .

Остановимся далее на примерах решения задач с использованием изложенной вариационно-разностной процедуры. Прежде всего обратимся к имеющей точное аналитическое решение задаче об изгибе прямоугольной полосы на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки [1]. При численном моделировании указанную полосу рассматриваем как прямоугольник (см. рис. 1) с размерами  $L_x$  и  $L_y$ , левая нижняя вершина которого совпадает с началом координат. Для точек его левой и правой сторон считаем заданными перемещения  $u_x^*$  и  $u_y^*$ , соответствующие точному аналитическому решению данной задачи. Полагаем также, что вдоль верхней стороны рассматриваемой прямоугольной области равномерно распределена направленная вертикально вниз поверхностная нагрузка с интенсивностью  $q$ . Нижняя сторона области при этом считается свободной от нагрузок.

Результатами аналитического решения данной задачи являются напряжения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ , зависимости которых от координат  $x$ ,  $y$  имеют вид полиномов третьей степени. Получаемые на основе этих результатов зависимости  $u_x = u_x(x, y)$  и  $u_y = u_y(x, y)$  для перемещений имеют вид полиномов четвертой степени. В данном исследовании ис-

Таблица 1. Результаты численного моделирования в сравнении с точным аналитическим решением для задачи об изгибе полосы

	$u_x$	$u_y$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{xy}$
9×9	1,696599	-1,121568	-0,630863	-0,984378	-0,267634
27×27	1,705782	-1,147172	-0,642817	-0,990115	-0,278653
81×81	1,706773	-1,150106	-0,644019	-0,990984	-0,279703
243×243	1,706883	-1,150432	-0,644153	-0,991073	-0,279821
точ. реш.	1,706897	-1,150473	-0,644170	-0,991084	-0,279835

пользован вариант этих зависимостей, соответствующий условиям  $u_x(0, L_y/2) = 0$ ,  $u_y(0, 0) = 0$ ,  $u_y(0, L_x) = 0$ .

Расчеты выполнялись для полосы с размерами  $L_y = 1$ ,  $L_x = 2$ , находящейся под действием нагрузки с интенсивностью  $q = 1$ . Упругие постоянные материала полосы задавались в виде  $E = 1$ ,  $\nu = 0,3$ . При численном моделировании использовалась равномерная сетка прямоугольных элементов. Рассматривались варианты разбиения исследуемой прямоугольной области на  $9 \times 9$ ,  $27 \times 27$ ,  $81 \times 81$ ,  $243 \times 243$  элементов. В табл. 1 представлены результаты численного моделирования и точного аналитического решения для случая плоского напряженного состояния полосы. Указанные здесь значения перемещений и напряжений относятся к точке полосы с координатами  $x = 0,111111$ ;  $y = 0,944444$ . Как видно, даже в случае достаточно крупной ( $9 \times 9$ ) сетки результаты численного моделирования хорошо согласуются с точным решением. Отклонение от точного решения здесь наблюдается, лишь начиная со второй значащей цифры после десятичной запятой. При переходе к сетке  $243 \times 243$  такое расхождение имеет место, лишь начиная с пятой значащей цифры после десятичной запятой. Отметим, что результаты, аналогичные представленным в табл. 1, были получены и для ряда других точек исследуемой полосы. Все они демонстрировали такую же картину стремления к точному решению при измельчении сетки дискретной модели.

Аналогичные исследования были проведены и для случая плоского деформированного состояния рассматриваемой полосы. Результатами явились те же выводы, что и для плоского напряженного состояния.

Рассмотрим теперь задачу для бесконечной области, имеющей круговое включение и находящейся на бесконечности в условиях однородного равносостороннего напряжен-

ного состояния, характеризуемого напряжением  $q$ . Обозначая через  $r$  и  $\theta$  полярные координаты, а через  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  — радиальную и окружную компоненты тензора напряжений, в соответствии с условием задачи записываем

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_r = \sigma_\theta = q \quad (\text{при } r \rightarrow \infty).$$

Решение такой задачи строится с использованием решения задачи Ламе для полого цилиндра с заданными значениями внутреннего и наружного давления [1]. Предварительно осуществляем переформулировку задачи Ламе, переходя от задания давлений к заданию нормальных напряжений на поверхностях цилиндра, считая, что нормальное напряжение на внешней его поверхности имеет величину  $q$ . Устремляя радиус внешней поверхности цилиндра к бесконечности, приходим к случаю бесконечной области с отверстием в условиях заданного нормального напряжения на контуре отверстия и заданного напряжения  $q$  на бесконечности. Далее учитываем, что отверстие заполнено материалом включения с модулем Юнга  $E_V$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_V$ . Принимая во внимание, что зона включения находится в условиях однородного напряженно-деформированного состояния и учитывая контактные условия по перемещениям и напряжениям на контуре отверстия, окончательно получаем аналитическое решение рассматриваемой задачи.

В подобного рода задачах (о концентрации напряжений) главный интерес представляют напряжения, имеющие место на кромке отверстия. Поэтому при анализе будем использовать лишь формулы, определяющие зависимости безразмерных параметров напряжений  $\sigma_\theta/q$  и  $\sigma_r/q$  на кромке отверстия (заполненного в данном случае материалом включения) от безразмерных параметров  $E_V/E$ ,  $\nu_V$  и  $\nu$ , характеризующих упругие свойства системы «область–включение».

Таблица 2. Напряжения на кромке отверстия в зависимости от модуля упругости  $E_B$  включения, заполняющего отверстие

$E_B/E$	$\sigma_r/q$	$\sigma_\theta/q$
0	0,000000	2,000000
0,0001	0,000286	1,999714
0,001	0,002852	1,997148
0,01	0,028050	1,971950
0,1	0,240964	1,759036
1/3	0,588235	1,411765
1	1,000000	1,000000
3	1,304348	0,695652
10	1,459854	0,540146
100	1,530222	0,469778
1000	1,537634	0,462366
10000	1,538379	0,461621
$\infty$	1,538462	0,461538

Из этих формул предельным переходом при  $E_B/E \rightarrow 0$  можно получить известный для случая бесконечной области со свободной от нагрузок кромкой отверстия результат  $\sigma_\theta/q = 2$ ,  $\sigma_r = 0$ . При  $E_B/E \rightarrow \infty$  можно получить соответствующие формулы для случая бесконечной области с закрепленной кромкой отверстия (случай жесткого включения). Расчетные данные, приведенные в табл. 2, дают представление о том, как изменяются напряжения на кромке отверстия при изменении параметра  $E_B/E$  в промежутке между указанными выше предельными значениями. Отметим, что эти данные относятся к случаю плоского напряженного состояния и получены при  $\nu = 0, 3$  и  $\nu_B = 0, 3$ .

Анализ данных табл. 2 позволяет заключить, что при  $E_B/E \leq 0,001$  жесткостные характеристики включения становятся настолько малыми, что практически реализуется ситуация свободной от нагрузок кромки отверстия (с погрешностью менее 1%). Наоборот, при  $E_B/E \geq 1000$  практически (с погрешностью менее 1%) реализуется ситуация жесткого включения. Расчеты показали, что эти выводы остаются в силе и при других значениях параметров  $\nu$  и  $\nu_B$ , характерных для конструкционных материалов, используемых в практике. Эти же выводы сохраняются и при переходе к случаю плоской деформации.

Представленные результаты аналитического решения используем далее для оценки точности результатов, получаемых при численном решении подобного рода задач на

основе изложенной вариационно-разностной процедуры. При численном моделировании вместо бесконечной области рассматриваем прямоугольную (с круговым включением) область с размерами  $b = d = a = 10R$  (см. рис. 3), по сторонам которой равномерно распределена растягивающая нагрузка с интенсивностью  $q$ . Размеры области выбраны в десять раз превышающими радиус отверстия, исходя из тех оценок, что на расстояниях более  $5R$  от центра отверстия влияние отверстия (с включением) становится пренебрежимо малым. Таким образом, обширная периферийная зона выбранной прямоугольной области практически находится в условиях однородного равностороннего напряженного состояния (моделируя тем самым случай бесконечной области).

С учетом симметрии выбранной расчетной схемы относительно оси  $Oy$ , численное моделирование проводим лишь для половины области (вместе с половиной включения). На участке границы моделируемой половины, лежащем на оси  $Oy$ , формулируем условия симметрии  $u_x = 0$ ,  $q_y = 0$ . Для исключения перемещений области как жесткого целого (в направлении оси  $Oy$ ) на участке ее границы, параллельном оси  $Ox$ , формулируем условия  $u_y = 0$ ,  $q_x = 0$ .

Поскольку напряжения в данной дискретной модели определяются исключительно в серединах элементов, разбиение области на элементы следует проводить так, чтобы середины элементов, граничащих с отверстием, оказывались на кромке отверстия. Что-

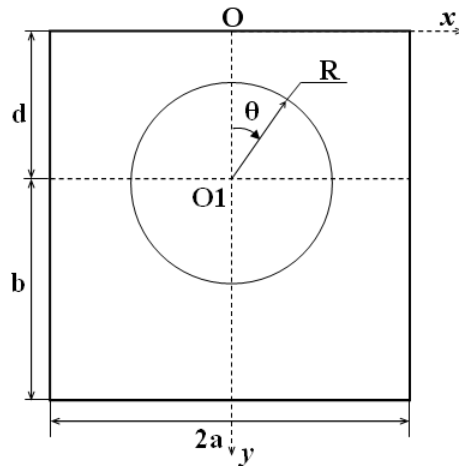


Рис. 3. Схема прямоугольной области с круговым отверстием (свободным или заполненным материалом включения)

бы получить отвечающую этому требованию сетку прямоугольных элементов, равномерно разбиваем контур отверстия на некоторое количество  $n$  элементарных дуг (достаточно малых размеров). Проводя через концы указанных дуг прямые, параллельные осям  $Ox$  и  $Oy$ , приходим к сетке элементов с требуемым свойством.

В процессе дальнейшего разбиения рассматриваемой области на элементы отрезок  $R \leq x \leq 10R$  на оси  $Ox$ , а также отрезки  $0 \leq y \leq 9R$  и  $11R \leq y \leq 20R$  на оси  $Oy$  разбиваем (двигаясь в направлении от центра к периферии) на участки с размерами  $0, 2R; 0, 2R; 0, 6R; 2R; 2R; 4R$ , которые в свою очередь разбиваем соответственно на 30, 20, 30, 20, 15, 20 одинаковых отрезков. Через концы образованных элементарных отрезков проводим прямые, параллельные осям  $Ox$  и  $Oy$ , завершая формирование сетки расчетной модели.

К сказанному добавим, что при выполнении операций с каждым из элементов образованной сетки алгоритм численного решения проверяет: попадает ли середина элемента в круговую зону, соответствующую включению. Если да, то параметрам упругости элемента присваиваются значения  $E_B, \nu_B$ , если нет, то  $-E, \nu$ . На завершающем этапе работы вычислительного процесса по найденным компонентам  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  тензора напряжений определяются его компоненты  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$  в полярных координатах. Для дальнейшего анализа берутся напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , вычисленные в точках, принадлежащих кромке отверстия. В рассматриваемом слу-

чае полученные в указанных точках значения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  сравниваются с точным решением (с данными табл. 2).

Результаты такого сравнения представлены в виде набора диаграмм на рис. 4. Здесь  $\varepsilon(\sigma_r)$  и  $\varepsilon(\sigma_\theta)$  — относительные отклонения полученных расчетным путем значений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  от соответствующих данных табл. 2;  $\theta$  — угловое положение точки (на контуре отверстия), которой соответствуют вычисленные значения  $\varepsilon(\sigma_r)$  и  $\varepsilon(\sigma_\theta)$ . Диаграммы, помеченные цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, относятся к случаям  $E_B/E = 1/3; 0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001; 3; 10; 100; 1000; 10000$ , соответственно. Отсутствие штриха у цифры означает, что численное моделирование осуществлялось с выбором сетки с  $n = 100$ . Цифра со штрихом соответствует результатам, полученным на сетке с  $n = 200$ . Наблюдаемая симметрия представленных диаграмм относительно оси  $\theta = 45^\circ$  отражает симметрию рассматриваемой дискретной модели относительно оси  $\theta = 45^\circ$  полярной системы координат. В силу аналогичной симметрии полученных числовых результатов относительно оси  $\theta = 90^\circ$  все иллюстрации ограничены диапазоном  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ . Как видно из рис. 4, в случае  $E_B/E > 1$  выбор сетки с  $n = 100$  обеспечивает получение числовых результатов с погрешностью менее 2%. В диапазоне  $E_B/E < 1$  погрешность результатов численного моделирования имеет тенденцию к увеличению с уменьшением значения  $E_B/E$ . Несмотря на это, выбор сетки с  $n = 200$  позволяет даже при  $E_B/E < 0, 0001$  (ситуация, близкая к случаю свободной от



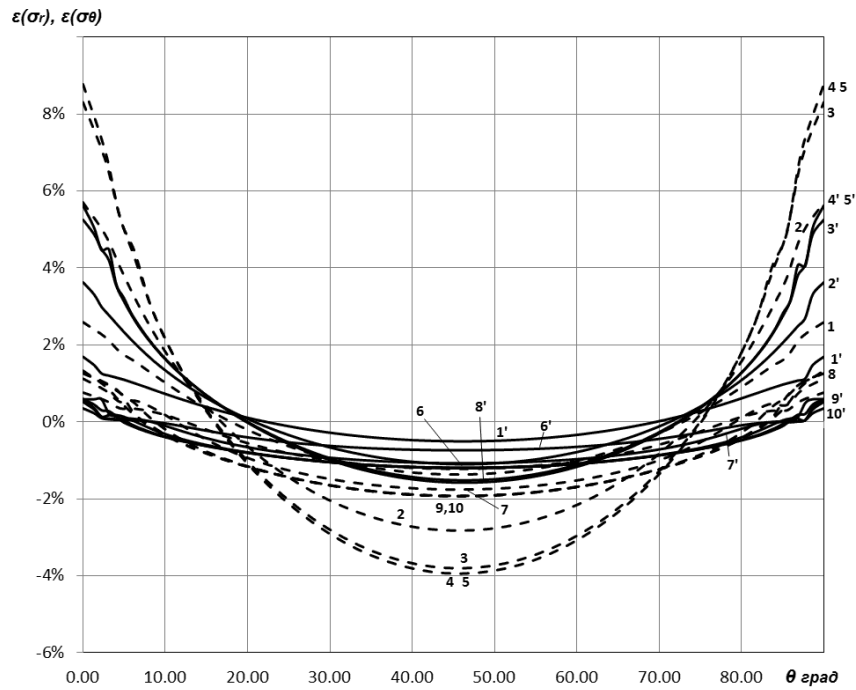


Рис. 4. Относительные отклонения результатов численного моделирования от точного аналитического решения в зависимости от параметра  $E_B/E$  и степени дискретизации  $n$

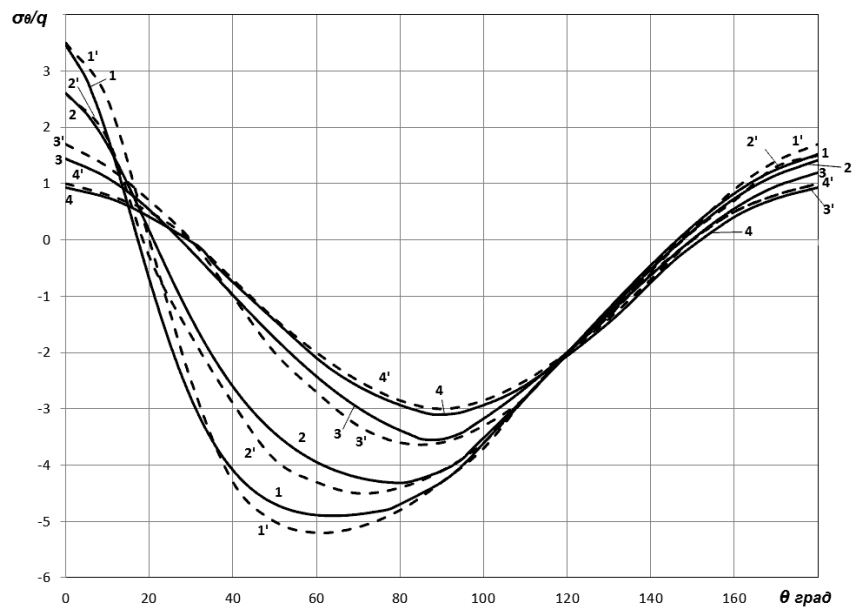


Рис. 5. Зависимость окружного напряжения  $\sigma_\theta$  на кромке отверстия от угла  $\theta$  в случае поперечного сжатия широкой полосы с отверстием

нагрузки кромки отверстия) получить численное решение с погрешностью менее 6%.

Таким образом, применительно к области с круговым включением, рассматриваемая вариационно-разностная процедура на одной и той же сетке прямоугольных элементов (с  $n = 200$ ) позволяет получить надежные числовые результаты в широком диапазоне значений модуля Юнга  $E_B$  материала включения. При этом случай жесткого включения может быть смоделирован заданием  $E_B/E > 1000$ , а случай свободной от нагрузок кромки отверстия — заданием  $E_B/E < 0,001$ .

Проиллюстрируем теперь изложенную методику численного моделирования на примере задачи о поперечном сжатии широкой полосы с круговым отверстием у края. Итак, рассматриваем прямоугольную область (см. рис. 3) с размерами  $b/r \gg 1$  и  $a/r \gg 1$ . Сжимающая нагрузка (с интенсивностью  $q$ ) равномерно распределена по стороне области, лежащей на оси  $Ox$ . Как и выше, задачу формулируем для половины полосы, принимая  $a = b = 10R$ . Рассматриваемый случай области с отверстием сводим к случаю области с включением, полагая  $E_B/E = 0,0001$ . При дискретизации используем сетку прямоугольных элементов с  $n = 200$ . В отличие от предыдущей расчетной схемы в граничных точках области, лежащих на оси  $Ox$ , ставим условия  $q_y = -q$ ,  $q_x = 0$ , а на стороне, параллельной оси  $Oy$ , — условия  $q_x = 0$ ,  $q_y = 0$ . Результаты численного моделирования в виде

зависимостей напряжений  $\sigma_\theta$  на контуре отверстия от угла  $\theta$  (кривые 1, 2, 3, 4) представлены на рис. 5. Цифры 1, 2, 3 соответствуют вариантам расчетов с выбором  $d/R = 1, 34; 1,54; 2,58$ . Цифрой 4 помечен случай  $d/R \gg 1$  (при моделировании принималось  $d/R = 10$ ). Для сравнения здесь же представлены экспериментальные данные (кривые 1', 2', 3'), взятые из [2], а также (см. [1]) известное аналитическое решение (кривая 4') для бесконечной области с отверстием, имеющее вид  $\sigma_\theta/q = -(1 - 2 \cos 2\theta)$ . Как видно, результаты численного моделирования хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными и теоретическими данными.

Проведенное обсуждение дает основание заключить, что представленная вариационно-разностная процедура несмотря на то, что она построена с применением сетки прямоугольных элементов, позволяет в рамках плоской постановки задачи теории упругости получать надежные результаты по распределению напряжений вокруг круговых включений и отверстий.

### Литература

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 888 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

Ключевые слова: плоская задача теории упругости, вариационно-разностная процедура, напряжения вокруг отверстий и включений

Статья поступила 10 июня 2010 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Московский государственный технический университет «МАМИ», г. Москва

© Мазин В. А., Михайлова В. Л., Сухомлинов Л. Г., 2010