УДК 519.17

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ С РЕГУЛЯРНОЙ N-ВЕРШИННОЙ ЗАТРАВКОЙ СТЕПЕНИ НЕ МЕНЕЕ $N/2$

***Резников А. В.*[1], *Кочкаров А. А.*[2]**

THE ALGORITHM OF THE RECOGNITION OF PREFRACTAL GRAPHS WITH N-VERTEX-SEED BEING A REGULAR GRAPH OF DEGREE LESS THEN $N/2$

Reznikov A. V., Kochkarov A. A.

The algorithm of the recognition of prefractal graphs with n-vertex-seed being a regular graph of degree less then $n/2$ is suggested. For substantiation of the algorithm theorems and lemmas, which have independent value, are proved.

Keywords: prefractal graph, algorithm recognition, regular graph

1. Базовые определения

Математической моделью многих задач распознавания [1–4] является модель фракталов [5–7]. Одной из связанных с ней задач является задача распознавания предфрактальных графов [8–10], исследование которой является самостоятельным научным направлением.

Затравкой называется всякий связный n-вершинный граф $H = (W, Q)$, который в дальнейшем будет использован для построения предфрактального графа.

Построение предфрактального графа предварим определением операции *замещения вершины затравкой* (ЗВЗ) [9].

Пусть $v_0 \in V$ — одна из вершин графа $G = (V, E)$. Объединим G с какой-либо затравкой $H = (W, Q)$. Полученный в результате объединения граф обозначим $\tilde{G}$. Обозначим через $U_0 \subset V$ окружение вершины v_0 [11] и через $R_0 \subset E$ — множество инцидентных ей ребер. Определим произвольное отображение вершин $u \in U_0$ во множество $W \varphi : U_0 \to W$. После чего у каждого ребра $v_0 u \in R_0$ конец v_0 заменяется на определяемую отображением φ вершину $v = \varphi(u)$ затравки H. Вершина v_0 исключается из графа $\tilde{G}$. Полученный в результате граф обозначим символом $G' = (V', E')$. Будем говорить, что граф $G' = (V', E')$ получается из графа $G = (V, E)$ с помощью операции ЗВЗ, примененной для вершины $v_0 \in V$ и затравки $H = (W, Q)$.

Определим поэтапный процесс применения операции ЗВЗ. На этапе $s = 1$ в данной затравке $H = (W, Q)$ нумеруем вершины. Полученный граф обозначим $G_1 = (V_1, E_1)$. Пусть выполнены этапы $s = 1, 2, \ldots, l$ и по завершении этапа l получен граф $G_l = (V_l, E_l)$, который называем *предфрактальным* [9]. На этапе $s = l + 1$ для каждой вершины $v \in V_l$ осуществляется операция ЗВЗ, т. е. замещение вершины затравкой H.

2. Постановка задачи

Пусть в явном виде задан граф $G = (V, E)$. Необходимо проверить, является ли он предфрактальным графом $G_L = (V_L, E_L)$ с затравкой, являющейся регулярным n-вершинным графом $H = (W, Q)$ степени s $(s \geqslant n/2)$.

Результатом выполнения алгоритма являются значения чисел L, n, s.

Простейшим алгоритмом распознавания такого графа мог бы стать алгоритм, основанный на переборе всех разбиений множества вершин V на n-элементные подмножества $V_1', \ldots, V_T'$, с дальнейшей проверкой условия, что каждый из порожденных на

[1]Резников Андрей Владимирович, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информационных технологий Адыгейского государственного университета; e-mail: trot99@mail.ru

[2]Кочкаров Азрет Ахматович, канд. физ.-мат. наук, декан факультета экономики и менеджмента Института гуманитарного образования и информационных технологий; e-mail: azret_kochkarov@mail.ru

множествах V_i', $i = \overline{1,T}$ подграф является регулярным графом степени s. Стоит заметить, что существует $C_{|V|}^n$ способов выделения даже одного n-элементного подмножества из множества V. Значит, вычислительная сложность такого алгоритма никак не меньше $O\left(|V_L|^n \cdot L\right)$.

3. Основные понятия и результаты

Здесь и далее будем рассматривать предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожденный произвольной n-вершинной затравкой $H = (W, Q)$.

Условимся ребра, появившиеся на l-ом этапе порождения $l \in \{1, 2, \ldots, L\}$, называть *ребрами ранга* l [9].

Если из графа G_L удалить все ребра рангов $1, \ldots, L-1$ («старые» ребра), исходный граф распадается на множество связных компонент $B_L^{(1)}$, каждая из которых изоморфна затравке H. Множество компонент $B_L^{(1)}$ будем называть *блоками первого ранга* [9]. Аналогично при удалении из G_L ребер рангов $1, \ldots, L-2$ получим множество $B_L^{(2)}$ *блоков второго ранга*. Очевидно, всякий блок второго ранга является предфрактальным графом ранга 2, порожденным затравкой H. Так же определяются блоки остальных рангов [9].

Лемма 1. Любые два блока $M_L^{(1)}$ и $M_L^{(2)}$ ранга k ($k = \overline{1, L-1}$) ($M_L^{(1)}, M_L^{(2)} \in B_L^{(k)}$) соединены не более чем одним ребром.

Доказательство.

Пусть блоки $M_L^{(1)}$ и $M_L^{(2)}$ соединены двумя ребрами $e_L^{(1)}$ и $e_L^{(2)}$ ($e_L^{(1)}, e_L^{(2)} \in E_L$). Выберем множество $U_L^{(1)}$ ($U_L^{(2)}$) блоков первого ранга, входящих в блок $M_L^{(1)}$ ($M_L^{(2)}$). Рассмотрим граф $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$. Рассмотрим в G_{L-1} множество вершин $Y_{L-1}^{(1)}$, $Y_{L-1}^{(1)} \subset V_{L-1}$ ($Y_{L-1}^{(2)}$, $Y_{L-1}^{(2)} \subset V_{L-1}$) таких, что из вершин множества $Y_{L-1}^{(1)}$ ($Y_{L-1}^{(2)}$) с помощью операции *замены вершин затравками* будут получены блоки множества $U_L^{(1)}$ ($U_L^{(2)}$). Множество вершин $Y_{L-1}^{(1)}$ ($Y_{L-1}^{(2)}$) порождает подграф графа G_{L-1}, который будет представлять собой блок ранга $k-1$. Этот блок обозначим через $M_{L-1}^{(1)}$, $M_{L-1}^{(1)} \in B_{L-1}^{(k-1)}$ ($M_{L-1}^{(2)}$, $M_{L-1}^{(2)} \in B_{L-1}^{(k-1)}$).

Замечание: если $k = 1$, то $M_{L-1}^{(1)}$ и $M_{L-1}^{(2)}$ представляют собой вершины графа G_{L-1}.

В графе G_{L-1} рассмотрим ребро $e_{L-1}^{(1)} \in E_{L-1}$ ($e_{L-1}^{(2)} \in E_{L-1}$), которое стало ребром $e_L^{(1)}$ ($e_L^{(2)}$) в процессе получения графа G_L из графа G_{L-1}.

Ребро $e_{L-1}^{(1)}$ ($e_{L-1}^{(2)}$) соединяет вершины блоков $M_{L-1}^{(1)}$ и $M_{L-1}^{(2)}$.

Если $k = 1$, т.е. если $M_{L-1}^{(1)}$ и $M_{L-1}^{(2)}$ представляют собой вершины графа G_{L-1}, то эти вершины соединяются двумя ребрами $e_{L-1}^{(1)}$ и $e_{L-1}^{(2)}$, что приводит к противоречию, так как G_{L-1} не является мультиграфом.

В противном случае перейдем к графу $G_{L-2} = (V_{L-2}, E_{L-2})$. Аналогичным образом определим блоки $M_{L-2}^{(1)}$, $M_{L-2}^{(2)}$ ($M_{L-2}^{(1)}, M_{L-2}^{(2)} \in B_{L-2}^{(k-2)}$) и ребра $e_{L-2}^{(1)}$, $e_{L-2}^{(2)}$ ($e_{L-2}^{(1)}, e_{L-2}^{(2)} \in E_{L-2}$).

И вновь, в случае $k = 2$, если $M_{L-2}^{(1)}$ и $M_{L-2}^{(2)}$ представляют собой вершины графа G_{L-2}, эти вершины соединяются двумя ребрами $e_{L-2}^{(1)}$ и $e_{L-2}^{(2)}$, что приводит к противоречию, ведь G_{L-2} не является мультиграфом.

Продолжая таким образом, придем к графу $G_{L-k} = (V_{L-k}, E_{L-k})$ в котором аналогичным образом определены $M_{L-k}^{(1)}$, $M_{L-k}^{(2)}$ и ребра $e_{L-k}^{(1)}, e_{L-k}^{(2)} \in E_{L-k}$, причем $M_{L-k}^{(1)}$ и $M_{L-k}^{(2)}$ представляют собой вершины графа G_{L-k} ($M_{L-k}^{(1)}, M_{L-k}^{(2)} \in V_{L-k}$). И поэтому такие вершины соединяются двумя ребрами $e_{L-k}^{(1)}$ и $e_{L-k}^{(2)}$, что приводит к противоречию, ведь G_{L-k} не является мультиграфом.

Определим операцию *слияния блоков.* Рассмотрим некоторое множество $M = \left\{M_L^{(1)}, \ldots, M_L^{(T)}\right\} \subset B_L^{(1)}$ блоков первого ранга. Пусть $V_M = \{v_1, \ldots, v_U\}$ — множество вершин, входящих в блоки, принадлежащие множеству M ($\forall\ i \leqslant U\ \exists\ j \leqslant T / v_i \in M_j$). Пусть $E_M = \{e_1, e_2, \ldots, e_R\}$ — множество ребер, каждое из которых инцидентно одной из вершин множества V_M. Удалим из графа G_L блоки $M_L^{(1)}, \ldots, M_L^{(T)}$. К графу G_L присоединим еще один блок первого ранга $Z = (W', Q')$. Рассмотрим по очереди все такие ребра e, принадлежащие множеству E_M, что $e = ab \in E_M$, $a \in V_M$, $b \notin V_M$. Ребро e в графе G_L заменим на новое ребро e', соединяющее вершину b и одну из вершин d

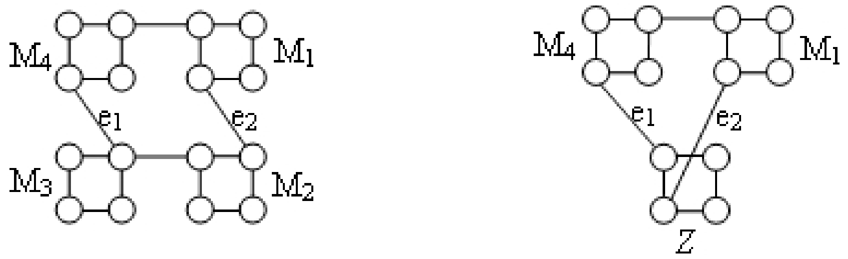


Рис. 1. Применение операции слияния блоков

множества Q' ($d \in Q'$, $e' = bd$). Эту вершину d выбираем произвольно.

Стоит заметить, что в результате операции слияния блоков граф может превратиться в мультиграф.

Определение. Назовем *показателем блока первого ранга* Z ($Z \in B_L^{(1)}$) графа $G_L = (V_L, E_L)$ степень такой вершины v графа $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ ($v \in V_{L-1}$), из которой был получен блок Z с помощью операции замены вершины затравкой.

Будем писать что $\operatorname{index}(Z) = \deg v$.

Лемма 2. Во всяком предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$ количество вершин более, чем в два раза превышает количества «старых» ребер.

Доказательство. Пусть граф G_L порожден n-вершинной затравкой $H = (W, Q)$. Причем q — количество ребер в графе H ($q \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ [9]). Количество ребер в графе G_L равно $|E_L| = q\left(1 + n + n^2 + \ldots + n^{L-1}\right)$ [9]. Количество «новых» ребер в графе G_L равно $q \cdot n^{L-1}$. Значит, количество «старых» ребер в графе G_L равно $q\left(1 + n + n^2 + \ldots + n^{L-2}\right)$. Количество вершин в графе G_L равно $|V_L| = n^L$ [9].

Индукцией по L покажем, что

$$n^L > 2q\left(1 + n + n^2 + \ldots + n^{L-2}\right).$$

База индукции. Если $L = 1$ то количество вершин — n, а количество «старых» ребер — 0.

Если $L = 2$, то в графе G_L ровно n^2 вершин. Количество «старых» ребер равно q. Но тогда $n^2 > n^2 - n = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \geqslant 2 \cdot q$.

Индукционный шаг. Пусть утверждение верно для $L - 1$, т. е.

$$n^{L-1} > 2q\left(1 + n^2 + \ldots + n^{L-3}\right). \qquad (3.1)$$

Докажем, что

$$n^L > 2q\left(1 + n^2 + \ldots + n^{L-3} + n^{L-2}\right). \qquad (3.2)$$

Для этого докажем, что

$$(n-1)\, n^{L-1} \geqslant 2q \cdot n^{L-2}. \qquad (3.3)$$

Действительно, преобразовывая (3.3), получаем $\frac{n(n-1)}{2} \geqslant q$, что, безусловно, верно.

Суммируя (3.1) и (3.3), получаем (3.2).

Теорема 1. В графе $G_L = (V_L, E_L)$ найдется блок первого ранга $Z = (W', Q')$ ($Z \in B_L^{(1)}$) с показателем не более $n - 1$ ($\operatorname{index}(Z) \leqslant n - 1$).

Доказательство. Согласно определению показателя блока первого ранга достаточно доказать, что в графе $G_{L-1} = (V_{L-1}, E_{L-1})$ найдется вершина степени не более $n - 1$.

Согласно лемме 2 в графе G_{L-1} найдется вершина $v \in V_{L-1}$, не инцидентная ни одному «старому» (для графа G_{L-1}) ребру. Тогда, степень вершины v равна количеству «новых» ребер ей инцидентных. Т.е. $\deg v \leqslant n - 1$.

Теорема 2. Если в графе $G_L = (V_L, E_L)$ удалить произвольное множество блоков первого ранга $M = \left\{M_L^{(1)}, \ldots, M_L^{(T)}\right\} \subset B_L^{(1)}$ со всеми инцидентными их вершинам ребрами, то во вновь образовавшемся графе $G' = (V', E')$ найдется блок первого ранга $Z = (W', Q')$ такой, что $\operatorname{index}(Z) \leqslant n - 1$.

Доказательство. Предположим, что из G_L можно удалить несколько блоков $M = \left\{M_L^{(1)}, \ldots, M_L^{(T)}\right\} \subset B_L^{(1)}$ так, чтобы во вновь образовавшемся графе G' каждый блок первого ранга имел показатель не менее n.

Граф G' будет состоять из множества блоков первого ранга

$$M' = \left\{M_L^{(T+1)}, \ldots, M_L^{(n^{L-1})}\right\}.$$

Выберем в G_L блок P $\left(P \in B_L^{(s)}\right)$ с максимальным индексом s, такой, в котором содержится более одного блока из множества M'.

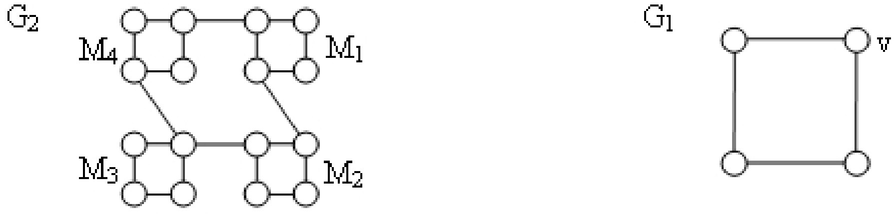


Рис. 2. Вычисление показателя блока первого ранга

Замечание: в случае, если такого блока P не найдется, т.е. если в каждом блоке графа G_L содержится не более одного блока из множества M', граф G' будет изоморфен либо графу G_2, либо какому-нибудь подграфу графа G_2, а в нем показатель каждого блока первого ранга меньше n. Противоречие.

Блок P состоит из n блоков $A = \left\{A_L^{(1)}, \ldots, A_L^{(n)}\right\} \subset B_L^{(s-1)}$. Из максимальности числа s вытекает, что в каждом из рассматриваемых блоков $A_L^{(1)}, \ldots, A_L^{(n)}$ содержится не более одного блока первого ранга из множества M'.

Пусть в блоке P содержится ровно k ($k \leqslant n$) блоков первого ранга из множества M'. Они составляют множество $N = \{N_1, \ldots, N_k\}$.

Пусть

$$M_L^{(R)} \left(T + 1 \leqslant R \leqslant n^{L-1},\, M_L^{(R)} \in N\right) \text{ —}$$

один из этих блоков. Назовем ребра, вида $e = (v_1, v_2)$, $v_1 \in M_L^{(R)}$, $v_2 \in P$, $v_2 \notin M_L^{(R)}$ *внутренними* для $M_L^{(R)}$, а ребра вида $e = (v_1, v_2)$, $v_1 \in M_L^{(R)}$, $v_2 \notin P$ — *внешними* для $M_L^{(R)}$.

Для $M_L^{(R)}$ внутренних ребер не более $k-1$, следовательно, для $M_L^{(R)}$ не менее $n - k + 1$ внешнего ребра (из предположения о том, что каждый блок первого ранга графа G' имеет показатель не менее n).

Тогда вершинам блоков $N_1, \ldots, N_k$ инцидентно не менее $k\,(n - k + 1)$ внешних ребер.

Применим операцию слияния блоков первого ранга для блоков $N_1, \ldots, N_k$. Получим граф $F = (V_F, E_F)$. Из леммы 1 следует, что граф F не содержит кратных ребер. Но $k\,(n - k + 1) \geqslant n$ ($(n-k)\,(k-1) \geqslant 0$). Поэтому операция слияния блоков первого ранга приведет к графу F, в котором показатель каждого блока первого ранга по-прежнему будет не менее n.

Однако продолжая такие операции, придем к графу, изоморфному графу $G_2 = (V_2, E_2)$ (или к графу изоморфному какому-либо подграфу графа G_2). А в нем показатель каждой затравки меньше n, что приводит к противоречию.

Лемма 3 [3]. Пусть в предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$ две вершины v_1 и v_2, принадлежат одному блоку первого ранга $Z = (W', Q')$ ($Z \in B_L^{(1)}$, $v_1 \in Q'$, $v_2 \in Q'$) и имеют смежность с некоторой вершиной v ($v \in V_L$), тогда $v \in Q'$.

Лемма 4. Пусть v_1 и v_2 — две *несмежные* вершины n-вершинной затравки $H = (W, Q)$, являющейся регулярным графом [11] степени s, где $s \geqslant {}^{n}\!/_{2}$ ($v_1 \in Q$, $v_2 \in Q$). Тогда среди вершин множества Q найдутся хотя бы две такие вершины u_1 и u_2 ($u_1 \in Q$, $u_2 \in Q$), что $e_1 = v_1u_1 \in W$, $e_2 = v_1u_2 \in W$, $e_3 = v_2u_1 \in W$, $e_4 = v_2u_2 \in W$.

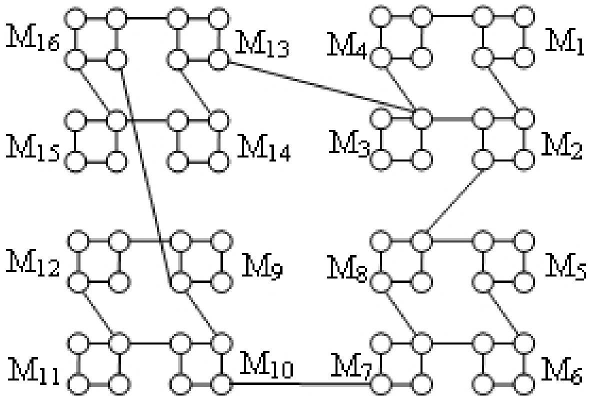
Доказательство. Пусть k — количество вершин, смежных с вершинами v_1 и v_2 одновременно. Посчитаем число M — количество вершин смежных хотя бы с одной вершиной среди v_1 и v_2. $M = s + s - k$. Добавив к ним две вершины v_1 и v_2, получаем $2 + M \leq n$, или $2 + 2s - k \leqslant n$, т.е. $s \leqslant \frac{n+k-2}{2}$. Но с учетом $s \geqslant n/2$, $\frac{n}{2} \leqslant \frac{n+k-2}{2}$, т.е. $2 \leqslant k$.

Значит, среди вершин графа H можно выбрать две такие, которые смежны с вершинами v_1 и v_2 одновременно.

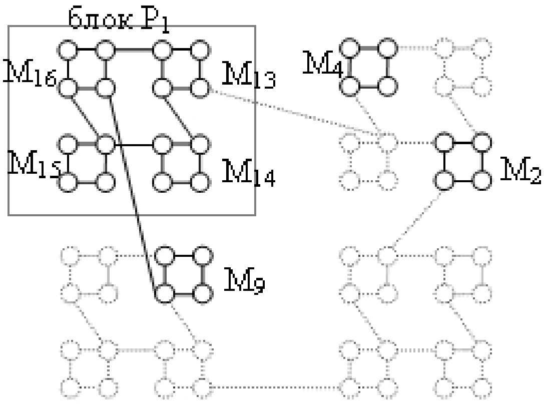
4. Описание алгоритма α_1

Алгоритм α_1 предназначен для распознавания свойства предфрактальности данного граф $G = (V, E)$ в случае когда G предположительно является предфрактальным графом, порожденным n-вершинными затравками $H = (W, Q)$, каждая из которых является регулярным графом степени s ($s \geqslant n/2$), если значения L, n, s считаются априори заданными.

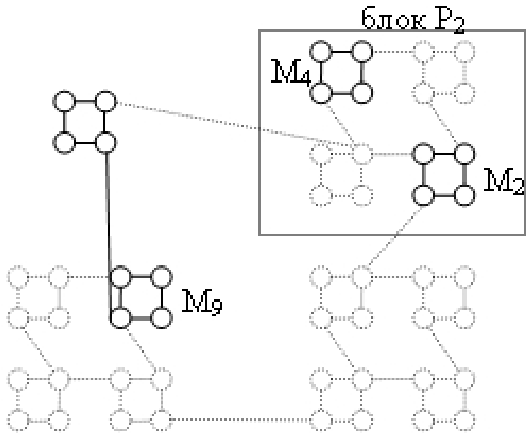
Предварим алгоритм α_1 процедурой проверки необходимых условий предфрактального графа, применив такую процедуру к



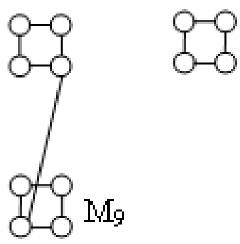
Граф $\mathbf{G_3}$
Удалим следующие затравки
M_1, M_3
M_5, M_6, M_7, M_8
M_{10}, M_{11}, M_{12}



Граф $\mathbf{G'}$
Применяем операцию слияния затравок к блоку P_1



Граф $\mathbf{F_1}$
Применяем операцию слияния затравок к блоку P_2



Граф $\mathbf{F_2}$

Рис. 3. Процесс применения теоремы 2 к предфрактальному графу

графу G. Результатом проверки будут являться значения чисел L, n, s.

Алгоритм α_1 состоит из этапов $\rho = 1, 2, \dots, L-1$, которые взаимно-однозначно поставлены в соответствие текущим графам G_l, $l = \overline{2, L}$. На вход этапа ρ подается текущий граф G_l, где $l = L - \rho + 1$ (причем в качестве графа G_L берется исходный граф G). Этап ρ выделяет в G_l затравки, состоящие из ребер ранга l. После чего каждая из этих затравок стягивается в вершину. Полученный в результате текущий граф G_{l-1} представляется на вход этапа $\rho + 1$.

В процессе результативной реализации $(L-1)$ этапов алгоритма α_1 получаем последовательность $G_L^*, G_{L-1}^*, \dots, G_1^*$. При этом считаем, что данный граф G, обозначаемый в этой последовательности через G_L^*, является предфрактальным графом тогда, когда каждый представитель последовательности $G_L^*, G_{L-1}^*, \dots, G_1^*$ удовлетворяет необходимым условиям предфрактальности.

Опишем вычислительную схему первого этапа в случае, когда на его вход представлен исходный граф $G = (V, E)$.

Этап $\rho = 1$ начинается с проверки равенства $|V| = n^L$. Если это равенство не выполняется, то алгоритм α_1 заканчивает свою работу безрезультатно. В противном случае выполняются m_1 шагов этапа $\rho = 1$, где m_1 — число таких затравок в G, каждая из которых состоит из новых ребер.

Результатом такого очередного шага является выделенная в графе G очередная затравка. Процедуру выделения этой затравки обозначим через β.

Описание процедуры $\boldsymbol{\beta}$. Во множестве V выделяем очередную неотмеченную вершину v_1 степени s, т.е. вершину, которая не принадлежит какой-либо уже выделенной затравке из множества V. Если такую вершину выделить не удалось, то согласно теореме 2 процедура β, а с ней и алгоритм α_1 заканчивают свою работу безрезультатно. Выделенная вершина v_1 смежна ровно с s вершинами некоторой своей затравки $H = (W, Q)$. Эти s вершин составляют множество $U_1 = \{u_1, \dots, u_s\}$. Если какие-то из вершин множества U_1 уже ранее отмечены на предыдущих шагах, то процедура β, а с ней и алгоритм α_1 заканчивает свою работу безрезультатно. Считаем вершины множества U_1 выделенными. Для выделения оставшихся $(n - s - 1)$ – й вершин затравки $H = (W, Q)$ воспользуемся леммой 4. Среди неокрашенных вершин множества V выделяем такие вершины, которые смежны хотя бы с двумя вершинами множества U_1. Пусть эти вершины составляют множество U_2. Если $|U_2| \neq n - s - 1$, процедура β, а с ней и алгоритм α_1 заканчивают свою работу безрезультатно. Иначе, если $|U_2| = n - s - 1$, результатом работы процедуры β считаем множество вершин $W' = v_1 \cup U_1 \cup U_2$. Выделяем и отмечаем все ребра, у каждого из которых концы представляют собой вершины множества W'. Работа процедуры β завершается проверкой, образует ли множество выделенных вершин и ребер связный однородный n-вершинный граф степени s. Если да, то шаг, включающий в себя описанную процедуру β, завершается результативно и следует переход к следующему шагу первого этапа. В противном случае шаг завершается без получения результата и алгоритм α_1 заканчивает свою работу.

Этап $\rho = 1$ завершается, как только все вершины множества V окажутся выделенными. Далее осуществляем процедуру стягивания каждой выделенной затравки в одну вершину. После чего полученный граф G_{L-1}^* предъявляем на вход следующего этапа алгоритма α_1.

Предъявленное выше описание работы первого этапа является общим, т.е. все его операции и процедуры остаются неизменными по отношению к каждому графу строящейся последовательности. В случае результативной работы каждого из $L-1$ этапов в качестве последнего члена последовательности получаем n-вершинный связный однородный граф степени s. Этот результат означает получение положительного ответа на вопрос, является ли данный граф G предфрактальным графом, порожденным затравкой, являющейся n-вершинным связным однородным графом степени s.

Заключение

Распознавание предфрактальных графов в условиях отсутствия информации о затравке, т.е. о числе вершин $n = |W|$, числе ребер $q = |Q|$ и структуре графа H, с помощью непереборных алгоритмов является нерешенной задачей [9]. Построенный в работе алгоритм распознавания свойства предфрактальности графа $G_L = (V_L, E_L)$ имеет вычислительную сложность $O\left(|V_L|^2\right)$.

Оценим вначале сложность процедуры, выделяющей отдельную затравку на этапе ρ процедуры β. С помощью перебора вершин из множества V_l, где $l = L - \rho + 1$, находится первая вершина v_1 степени s выделяемой затравки, на что требуется порядка $|V_l|$ действий. Затем перебором того же множества V_l находятся вершины, составляющие окружение v_1, на что также требуется порядка $|V_l|$ действий. Для выделения оставшихся вершин текущей затравки требуется перебирать вершины множества V_l и для каждой из них проверять их смежность с вершинами множества из окружения v_1, на что требуется действий порядка $|V_l| \cdot s$. Значит, процедура β требует действий порядка $|V_l|$.

Подсчитаем количество выполнений процедуры β в процессе реализации этапа ρ. На вход этого этапа подается граф G_l, где $l = L-\rho+1$, содержащий n^{l-1} затравок, каждая из которых состоит из «новых» ребер. Значит, процедура β выполняется $n^{L-\rho}$ раз. Поэтому количество действий этапа ρ имеет порядок

$$n^{L-\rho+1} \cdot |V_l| = n^{L-\rho+1+l} = n^{2(L-\rho)+1}.$$

Суммируя по всем ρ получаем

$$\sum_{\rho=1}^{L} n^{2(L-\rho)+1} = n\left(n^{L-1} + n^{L-2} + \ldots + 1\right)^2 = = n\left(\frac{n^L - 1}{n-1}\right)^2 = n\frac{(|V_L| - 1)^2}{(n-1)^2}.$$

Значит всего требуется действий порядка $|V_L|^2$.

Литература

1. *Горелик А. Л., Скрипкин В. А.* Методы распознавания. М.: Высшая школа, 1989. 264 с.
2. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов. М.: Мир, 1978. 414 с.
3. *Рассел С., Норвиг П.* Искусственный интеллект: современный подход (AIMA). 2-е издание / Пер. с англ. М.: Вильямс, 2006. 1408 с.
4. *Люгер Дж. Ф.* Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем. 4-е издание / Пер. с англ. М.: Вильямс, 2003. 864 с.
5. *Божокин С. В., Паршин Д. А.* Фракталы и мультифракталы. М., Ижевск: РХД, 2001. 128 с.
6. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
7. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. М., Ижевск: РХД 2001. 528 с.
8. *Мэлроуз Дж.* Иерархические фрактальные графы и блуждания в них // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 507–512.
9. *Кочкаров А. М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998. 170 с.
10. *Кочкаров А. А., Кочкаров Р. А.* Параллельные алгоритмы на предфрактальных графах. Препринт №84. М.: ИПМатем. им. М. В. Келдыша РАН, 2003. 20 с.
11. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 383 с.

Ключевые слова: предфрактальный граф, распознавание образов, регулярный граф

Статья поступила 14 апреля 2010 г.

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
Институт гуманитарного образования и информационных технологий, г. Москва