

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ¹*Д. В. Борисов², О. Д. Прякина³, А. В. Смирнова⁴*

SOLUTION TO THE DYNAMIC PROBLEM FOR A THREE-LAYER MEDIUM WITH INCLUSIONS

Borisov D. V., Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The method for solving dynamic and mixed problems for multilayer media containing the aggregate of rigid inclusions is applied to study the problem about three-layer medium vibrations with inclusions on interfaces. This method was described in [1, 2].

The work gives a description of the properties of elements and determinant matrix-symbols of kernels of integral equation systems, caused by the above problems. Certain typical results of numerical analysis are adduced.

Метод построения решения динамических смешанных задач для многослойных сред, содержащих совокупность жестких включений, предложенный ранее в работах [1, 2], применяется к исследованию задачи о колебаниях трехслойной среды с включениями на стыках слоев.

Описываются свойства элементов и определителей матриц-символов ядер систем интегральных уравнений, порождаемых указанными задачами. Приводятся некоторые характерные результаты численного анализа.

Другие подходы к решению такого рода задач представлены в работах [3–9]. Условия локализации вибрационного процесса системой трещин и (или) включений установлены в [5, 6].

Рассматривается задача о колебаниях пакета трех плоскопараллельных слоев толщиной $H = 2h_1 + 2h_2 + 2h_3$ с жестко заземленной нижней гранью ($-H \leq z \leq 0$, $-\infty \leq x, y \leq +\infty$, h_k — полутолщина k -го слоя). На стыках слоев имеются включения, занимающие плоские области Ω_1, Ω_2 . Ха-

рактеристиками k -го слоя являются ρ_k, μ_k, ν_k — плотность, модуль сдвига и коэффициент Пуассона ($k = 1, 2, 3$).

Имеют место смешанные граничные условия

$$z = 0 : \begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_1(x, y)e^{-i\omega t}, \\ (x, y) \in \Omega_0, \\ \mathbf{t}_0 = 0, \quad (x, y) \notin \Omega_0, \end{cases} \quad (1)$$

$$z = -2 \sum_{i=1}^p h_i : \begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{w}_{p+1}(x, y)e^{-i\omega t}, \\ (x, y) \in \Omega_p, \\ \Delta \mathbf{t}_p = 0, \quad (x, y) \notin \Omega_p, \end{cases} \quad (2)$$

$$p = 1, 2,$$

$$z = -H : \mathbf{w} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{t}_0$ — вектор напряжений, $\mathbf{w}_1$ — вектор перемещений, заданный в области Ω_0 ; $\Delta \mathbf{t}_p = \mathbf{t}_p^+ - \mathbf{t}_p^-$ — скачок вектора напряжений на линии раздела слоев $|z_p| \leq h_p$, $\mathbf{w}_{p+1} = \mathbf{w}_{p+1}^+ = \mathbf{w}_p^-$ — вектор перемещений, заданный в области Ω_p , $p = 1, 2$; t — время,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00694, 03-01-96537, 03-01-96645), Министерства образования и науки России (Е-02-4.0-191), Федеральной целевой программы «Интеграция» (Б0121), гранта Президента РФ (НШ-2107.2003.1).

²Борисов Дмитрий Владиславович, аспирант кафедры математического моделирования КубГУ.

³Прякина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, заведующая кафедрой высоких технологий, прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций факультета прикладной математики КубГУ. E-mail: donna@kubsu.ru

⁴Смирнова Алла Васильевна, канд. физ.-мат. наук, докторант кафедры математического моделирования КубГУ, доцент.

ω — частота колебаний. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен, рассматриваются амплитудные значения перемещений и напряжений.

Перемещения среды описываются уравнениями Ляме [10]. В случае разрывных граничных условий для напряжений их решение в трансформантах Фурье будет определяться выражениями

$$\mathbf{W}_1(z_1) = \frac{1}{\mu_1} [\mathbf{B}_+(z_1)\mathbf{T}_0 + \mathbf{B}_-(z_1)(\mathbf{T}_1 + \boldsymbol{\eta}_1)],$$

$$z_1 = z + h_1, \quad (4)$$

$$\mathbf{W}_2(z_2) = \frac{1}{\mu_2} [\mathbf{B}_+(z_2)\mathbf{T}_1 + \mathbf{B}_-(z_2)(\mathbf{T}_2 + \boldsymbol{\eta}_2)],$$

$$z_2 = z + 2h_2 + h_1,$$

$$\mathbf{W}_3(z_3) = \frac{1}{\mu_3} [\mathbf{B}_+(z_3)\mathbf{T}_2 + \mathbf{B}_-(z_3)\mathbf{T}_3],$$

$$z_3 = z + 2h_1 + 2h_2 + h_3,$$

где $\mathbf{W}_k = F\mathbf{w}_k$, $\mathbf{T}_0 = F\mathbf{t}_0$, $\mathbf{T}_k = F\mathbf{t}_k$, $\boldsymbol{\eta}_k = F\Delta\mathbf{t}_k$, при этом F — оператор двумерного преобразования Фурье по переменным x, y ; $\mathbf{t}_k = \{t_{1k}, t_{2k}, t_{3k}\}$ — векторы напряжений, характеризующие взаимодействие между слоями, $\mathbf{w}_k = \{w_{1k}, w_{2k}, w_{3k}\}$ — вектор, компонентами которого являются горизонтальные w_{1k} , w_{2k} и вертикальные w_{3k} смещения точек k -го слоя.

Матрицы-функции $\mathbf{B}_\pm(z_k)$ построены в [1, 11] и здесь не приводятся. Элементы этих матриц зависят от параметров преобразования Фурье α, β , частоты гармонических колебаний ω , механических и геометрических параметров k -го слоя $\mu_k, \rho_k, \nu_k, h_k$. Здесь и далее с целью сокращения записи в функциональных зависимостях будем указывать только аргумент, обеспечивающий однозначное толкование функций.

Из условия жесткой заделки пакета слоев на нижней грани $\mathbf{W}_3(-h_3) = 0$ и из условия равенства перемещений на стыках слоев $\mathbf{W}_1(-h_1) = \mathbf{W}_2(h_2)$, $\mathbf{W}_2(-h_2) = \mathbf{W}_3(h_3)$ найдем

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 - \mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{X}_1(-h_1)\boldsymbol{\eta}_1 -$$

$$- g_1\mathbf{X}_1(h_2)\mathbf{L}_2\boldsymbol{\eta}_2,$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{G}_2\mathbf{T}_1 - \mathbf{X}_2(-h_2)\boldsymbol{\eta}_2, \quad (5)$$

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{F}_3^{-1}\mathbf{G}_3\mathbf{T}_2.$$

Принятые обозначения

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{B}_-(-h_3),$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{B}_-(-h_k) - g_k(\mathbf{B}_+(h_{k+1}) +$$

$$+ \mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{F}_{k+1}^{-1})\mathbf{G}_{k+1},$$

$$\mathbf{X}_k(y) = \mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{B}_-(y), \quad \mathbf{G}_k = -\mathbf{B}_+(-h_k),$$

$$g_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}.$$

Подставив найденные выражения для векторов усилий (5) в (4) и проведя несложные преобразования, определим смещение в произвольной точке среды

$$\mathbf{W}_1(z_1) = \frac{1}{\mu_1} \{ \mathbf{R}_3(z_1)\mathbf{T}_0 - \mathbf{B}_-(z_1)\boldsymbol{\Delta}_1 \},$$

$$\mathbf{W}_2(z_2) = \frac{1}{\mu_2} \left\{ \mathbf{R}_2(z_2) \left(\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 - \boldsymbol{\Delta}_1 - \boldsymbol{\eta}_1 \right) - \right.$$

$$\left. - \mathbf{B}_-(z_2)\mathbf{L}_2\boldsymbol{\eta}_2 \right\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{W}_3(z_3) = \frac{1}{\mu_3} \mathbf{R}_1(z_3)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{G}_2 \left\{ \mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 - \right.$$

$$\left. - \boldsymbol{\Delta}_1 - \boldsymbol{\eta}_1 - \mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{B}_-(-h_2)\boldsymbol{\eta}_2 \right\}.$$

Здесь

$$\boldsymbol{\Delta}_1 = g_1\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{B}_-(h_2)\mathbf{L}_2\boldsymbol{\eta}_2 + \mathbf{L}_1\boldsymbol{\eta}_1,$$

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{B}_-(-h_k) - \mathbf{I},$$

$$\mathbf{F}_1(h_1, h_2, h_3) = \mathbf{B}_-(-h_1) - g_1\mathbf{R}_2(h_2),$$

$$\mathbf{F}_2(h_2, h_3) = \mathbf{B}_-(-h_2) - g_2\mathbf{R}_1(h_3),$$

$\mathbf{R}_1(h_3) \equiv \mathbf{K}(h_3)$, $\mathbf{R}_2(h_2) \equiv \mathbf{K}(h_2, h_3)$, $\mathbf{R}_3(h_1) \equiv \mathbf{K}(h_1, h_2, h_3)$ — матрицы-символы Грина соответственно одно-, двух-, трехслойной среды без дефектов. Их элементы несложно получить по формуле

$$\mathbf{R}_{4-k}(z_k) = \mathbf{B}_+(z_k) + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{G}_k,$$

$$k = 1, 2, 3.$$

На поверхности среды и на стыках слоев выполняются матрично-функциональные соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{12}\boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{K}_{13}\boldsymbol{\eta}_2 &= \mu_1 \mathbf{W}_1(h_1), \\ \mathbf{K}_{21}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{22}\boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{K}_{23}\boldsymbol{\eta}_2 &= \mu_1 \mathbf{W}_2(h_2), \\ \mathbf{K}_{31}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{32}\boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{K}_{33}\boldsymbol{\eta}_2 &= \mu_1 \mathbf{W}_3(h_3). \end{aligned} \quad (7)$$

Согласно (6) матрицы-функции $\mathbf{K}_{ij}$ имеют вид

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{R}_3(h_1), \quad \mathbf{K}_{12} = -\mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{L}_1,$$

$$\mathbf{K}_{13} = -g_1\mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{X}_1(h_2)\mathbf{L}_2,$$

$$\mathbf{K}_{21} = g_1\mathbf{R}_2(h_2)\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1,$$

$$\mathbf{K}_{22} = -g_1\mathbf{R}_2(h_2)\mathbf{X}_1(-h_1),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{23} = -g_1 \left[g_1\mathbf{R}_2(h_2)\mathbf{X}_1(h_2) + \right. \\ \left. + \mathbf{B}_-(h_2) \right] \mathbf{L}_2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_{31} = g_1g_2\mathbf{R}_1(h_3)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{G}_2\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1,$$

$$\mathbf{K}_{32} = -g_1g_2\mathbf{R}_1(h_3)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{G}_2\mathbf{X}_1(-h_1),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{33} = -g_1g_2\mathbf{R}_1(h_3) \left\{ g_1\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{G}_2\mathbf{X}_1(h_2)\mathbf{L}_2 + \right. \\ \left. + \mathbf{X}_2(-h_2) \right\}. \end{aligned}$$

Между элементами матриц $\mathbf{K}_{ij}$ и $\mathbf{K}_{ji}$ ($i \neq j$) выявлена простая взаимосвязь. Например, для задачи в плоской постановке, если $\mathbf{K}_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha^2 k_{11} & -i\alpha k_{12} \\ i\alpha k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$, то $\mathbf{K}_{ji} = \begin{pmatrix} \alpha^2 k_{11} & -i\alpha k_{21} \\ i\alpha k_{12} & k_{22} \end{pmatrix}$.

Функционально-матричные соотношения для модели однородной полубограниченной среды, в частности, для слоя, жёстко сцеплённого с недеформируемым основанием и содержащим этажно расположенные параллельно-ориентированные включения, получаются из (7), (8) если положить физико-механические параметры трех слоев равными.

Переход к трехслойному полупространству в (5)–(7) осуществляется аналогично изложенному в [1].

Рассмотрим некоторые частные случаи системы (7).

1. Для трехслойной среды без дефектов имеем одно матричное уравнение

$$\mathbf{K}_{11} \frac{\mathbf{T}_0}{\mu_1} = \mathbf{W}_1(h_1). \quad (9)$$

2. Если в трехслойной среде на границе между первым и вторым слоем имеется дефект-включение, а внешнее воздействие отсутствует, то

$$\mathbf{K}_{22} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\mu_1} = \mathbf{W}_2(h_2). \quad (10)$$

3. Если включение находится на стыке второго и третьего слоев, получим

$$\mathbf{K}_{33} \frac{\boldsymbol{\eta}}{\mu_1} = \mathbf{W}_3(h_3). \quad (11)$$

Уравнения (7) являются искомыми функционально-матричными соотношениями рассматриваемой задачи (1)–(3) и служат основой для построения системы интегральных уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{11}^0 \mathbf{t}_0 + \mathfrak{K}_{12}^1 \Delta \mathbf{t}_1 + \mathfrak{K}_{13}^2 \Delta \mathbf{t}_2 &= \mu_1 \mathbf{w}_1, \\ (x, y) &\in \Omega_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{21}^0 \mathbf{t}_0 + \mathfrak{K}_{22}^1 \Delta \mathbf{t}_1 + \mathfrak{K}_{23}^2 \Delta \mathbf{t}_2 &= \mu_1 \mathbf{w}_2, \\ (x, y) &\in \Omega_1, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{31}^0 \mathbf{t}_0 + \mathfrak{K}_{32}^1 \Delta \mathbf{t}_1 + \mathfrak{K}_{33}^2 \Delta \mathbf{t}_2 &= \mu_1 \mathbf{w}_3, \\ (x, y) &\in \Omega_2, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{K}^s \mathbf{t} = \iint_{\Omega_s} \mathbf{k}(x - \xi, y - \zeta) \mathbf{t}_s(\xi, \zeta) d\xi d\zeta$ — матричный интегральный оператор.

Ядра системы (12) определяются формулой

$$\mathbf{k}_{ij}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\delta_1 \delta_2} \mathbf{K}_{ij}(\alpha, \beta) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta,$$

а подынтегральные матрицы-функции $\mathbf{K}_{ij}(\alpha, \beta)$ — в соответствии с (8).

Контуры интегрирования δ_1, δ_2 выбираются согласно принципу предельного поглощения [10].

Если учесть, что смещения $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ известны, то соотношения (12) представляют собой систему девяти интегральных уравнений относительно компонент векторов $\mathbf{t}_0, \Delta \mathbf{t}_1, \Delta \mathbf{t}_2$ в областях $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ соответственно.

Дальнейшее решение этой системы предполагает использование аналитических или численных методов [10, 11, 13].

Рассмотрим интегральные уравнения, соответствующие частному случаю 2. Пусть имеется M включений, расположенных в сечении $z_2 = h_2$, тогда с учетом (10) система (12) упрощается:

$$\sum_{m=1}^M \iint_{\Omega_{1m}} \mathbf{k}(x - \xi, y - \eta) \Delta \mathbf{t}_m(\xi, \eta) d\xi d\eta = \mu_1 \mathbf{w}_{2n}(x, y), \quad (13)$$

$$(x, y) \in \Omega_{1n}, \quad n = 1, 2, \dots, M,$$

поскольку

$$\eta(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^M \iint_{\Omega_{1m}} \Delta \mathbf{t}_m(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy, \quad (x, y) \in \Omega_{1m}.$$

Для плоской задачи система интегральных уравнений (13) преобразуется к виду

$$\sum_{m=1}^M \int_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} \mathbf{k}(x - \xi) \Delta \mathbf{t}_m(\xi) d\xi = \mu_1 \mathbf{w}_{2n}(x), \quad n = 1, 2, \dots, M;$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta} \mathbf{L}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$x \in [a_{2n-1}, a_{2n}] = \Omega_{1n},$$

$$\mathbf{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^2 l_{11} & -i\alpha l_{12} \\ i\alpha l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $\mathbf{L}$ описываются выражениями

$$l_{11} = -\frac{g_1^2 m_1^+ R + g_1 D r_{11}}{\Delta}, \quad (14)$$

$$l_{12} = -\frac{g_1^2 m_2^+ R + g_1 D r_{12}}{\Delta},$$

$$l_{22} = -\frac{g_1^2 k_2^+ R + g_1 D r_{22}}{\Delta},$$

$$\Delta = g_1^2 R + g_1 (m_1^+ r_{22} - 2m_2^+ r_{12} + k_2^+ r_{11}) + D,$$

$$R = r_{11} r_{22} - r_{12}^2, \quad D = m_1^+ k_2^+ - (m_2^+)^2.$$

В этих соотношениях функции r_{11}, r_{12}, r_{22} являются элементами матрицы Грина

$$\mathbf{K}(\alpha, \omega) = \mathbf{R}_2(h_2, h_3) = \begin{pmatrix} \alpha^2 r_{11} & -i\alpha r_{12} \\ i\alpha r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}$$

динамической задачи о колебаниях двухслойного пакета толщиной $2h_2 + 2h_3$ с параметрами ρ_2, μ_2, ν_2 и ρ_3, μ_3, ν_3 , жестко сцепленного с недеформируемым основанием, а функции m_1^+, m_2^+, k_2^+ содержат параметры ρ_1, μ_1, ν_1 только верхнего слоя толщиной $2h_1$ [11].

Выражая в (14) элементы в виде отношения целых функций

$$m_1^+(h_1) = \frac{m_{10}}{\alpha^2 \Delta_{10}}, \quad m_2^+(h_1) = \frac{m_{20}}{\Delta_{10}},$$

$$k_2^+(h_1) = \frac{k_{20}}{\Delta_{10}},$$

$$r_{11}(h_2, h_3) = \frac{m_{12}}{\alpha^2 \Delta_{12}}, \quad r_{12}(h_2, h_3) = \frac{m_{22}}{\Delta_{12}},$$

$$r_{22}(h_2, h_3) = \frac{k_{22}}{\Delta_{12}},$$

$$\Delta = \frac{\Delta_{13}(h_1, h_2, h_3)}{\alpha^2 \Delta_{10}(h_1) \Delta_{12}(h_2, h_3)},$$

$$R = \frac{D_2(h_2, h_3)}{\alpha^2 \Delta_{12}(h_2, h_3)}, \quad D = \frac{\Delta_{11}(h_1)}{\alpha^2 \Delta_{10}(h_1)},$$

получим

$$l_{11} = -\frac{l_{11}^0}{\alpha^2 \Delta_{13}}, \quad l_{22} = -\frac{l_{22}^0}{\Delta_{13}},$$

$$l_{12} = -\frac{l_{12}^0}{\Delta_{13}},$$

где

$$l_{11}^0 = g_1^2 m_{10}(h_1) D_2(h_2, h_3) + g_1 \Delta_{11}(h_1) m_{12}(h_2, h_3),$$

$$l_{22}^0 = g_1^2 k_{20}(h_1) D_2(h_2, h_3) + g_1 \Delta_{11}(h_1) k_{22}(h_2, h_3),$$

$$l_{12}^0 = g_1^2 m_{20}(h_1) D_2(h_2, h_3) + g_1 \Delta_{11}(h_1) m_{22}(h_2, h_3),$$

$$\Delta_{13}(h_1, h_2, h_3) = g_1^2 \Delta_{10}(h_1) D_2(h_2, h_3) + \Delta_{11}(h_1) \Delta_{12}(h_2, h_3) + g_1 (m_{10}(h_1) k_{22}(h_2, h_3) - 2\alpha^2 m_{20}(h_1) m_{22}(h_2, h_3) + k_{20}(h_1) m_{12}(h_2, h_3)).$$

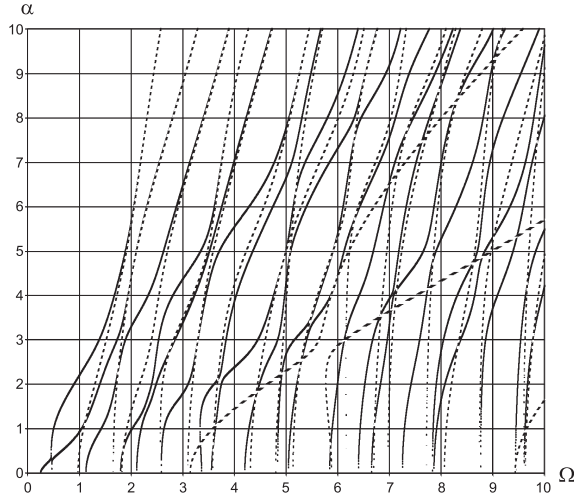


Рис. 1

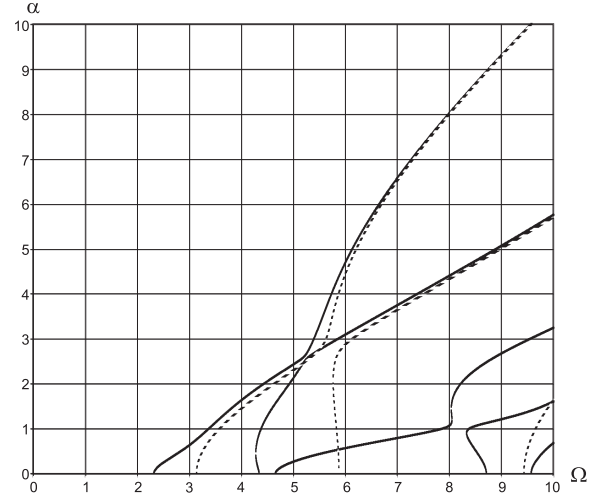


Рис. 2

Полагая параметры слоев равными и $h_2 = h_3$, можно получить решение динамической задачи о колебаниях системы включений в однородном слое толщиной $H = 2h_1 + 4h_2$, расположенных на расстоянии $z = -2h_1$ от верхней границы.

Для исследования условий локализации вибрационного процесса [5] необходимо знание вещественных нулей определителей функционально-матричных систем (7), (9)–(11).

Установлено, что определители указанных систем представимы в виде отношения целых функций, связанных с определителями матриц-символов Грина одно-, двух-, трехслойной среды без дефектов.

В частности, для трехслойной среды без дефектов

$$\det \mathbf{K}_{11} = \frac{D_3(h_1, h_2, h_3)}{\Delta_{13}(h_1, h_2, h_3)}.$$

Для трехслойной среды с включением на стыке первого и второго слоя в плоской постановке имеем

$$\det \mathbf{K}_{22} = \frac{D_2(h_2, h_3)\Delta_{11}(h_1)}{\Delta_{13}(h_1, h_2, h_3)}.$$

Если включение находится на стыке второго и третьего слоев, то определитель системы (11)

$$\det \mathbf{K}_{33} = \frac{D_1(h_3)\Delta_{12}(h_1, h_2)}{\Delta_{13}(h_1, h_2, h_3)}.$$

В этих формулах $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}$ — знаменатели, а D_1, D_2, D_3 — числители определителей матриц-символов Грина соответственно

для одно-, двух- и трехслойной среды без дефектов.

Таким образом, нулями определителя системы (10) являются нули определителя матрицы Грина для двухслойной среды толщиной $H = 2h_2 + 2h_3$ и полюса определителя матрицы Грина для одного слоя толщиной $H = 2h_1$:

$$D_2(h_2, h_3) = 0, \quad \Delta_{11}(h_1) = 0,$$

а нулями определителя системы (11) — нули определителя матрицы Грина для одного слоя толщины $H = 2h_3$ и полюса определителя матрицы Грина для двухслойной среды толщины $H = 2h_1 + 2h_2$:

$$D_1(h_3) = 0, \quad \Delta_{12}(h_1, h_2) = 0.$$

Нули $\det \mathbf{K}_{11}$ среды без дефектов (9), будут определяться из уравнения

$$D_3(h_1, h_2, h_3) = 0.$$

Отметим, что несмотря на наличие в (8) сложных матричных выражений, конечные формулы для элементов матриц $\mathbf{K}_{ij}$ имеют один и тот же знаменатель $\Delta_{13}(h_1, h_2, h_3)$, совпадающий со знаменателем элементов матрицы Грина трехслойной среды без дефектов. Указанное свойство обобщается и на случай дефектов в виде трещин в среде с произвольным количеством слоев [1]. Для определителей систем матрично-функциональных уравнений данное свойство также имеет место.

Проведен анализ вещественных особенностей элементов матриц $\mathbf{K}_{ij}$ и их определителей. Построены дисперсионные кривые. Для

диагональных элементов матриц $\mathbf{K}_{jj}$ и $\mathbf{K}_{jj}^{-1}$ наблюдается чередование нулей и полюсов, а для их определителей — нет.

На рис. 1, 2 представлены характерные графики нулей (пунктирные линии) и полюсов (сплошные линии) $\det \mathbf{K}_{22}$ в зависимости от приведенной частоты $\Omega = \sqrt{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \omega a$ (a — некоторая линейная величина) при следующих значениях безразмерных параметров: $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h_1 = h_2 = h_3 = 0,25$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$, при этом $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 0,2$; $\frac{\mu_3}{\mu_1} = 0,04$ (рис. 1) и $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 25$; $\frac{\mu_3}{\mu_1} = 5$ (рис. 2).

Изменение количества дисперсионных кривых в фиксированном диапазоне частот обратно пропорционально изменению по глубине относительной жесткости слоев.

Авторы благодарят академика В. А. Бабешко, инициировавшего данную работу, за полезное обсуждение и помощь при ее выполнении.

Литература

1. Прякина О. Д., Смирнова А. В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 500–507.
2. Прякина О. Д., Смирнова А. В. К постановке динамических смешанных задач для слоистых сред с дефектами // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2003. № 2. С. 29–31.
3. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
4. Александров В. М., Пожарский Д. А. К задаче о трещине на границе раздела упругих полосы и полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 86–93.
5. Бабешко В. А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
6. Бабешко В. А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 207. № 2. С. 324–327.
7. Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р. Т. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
8. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Ехлаков А. В. Математическая модель ультразвуковой дефектоскопии пространственных трещин // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 147–156.
9. Кит Г. С., Михаськив В. В., Хай О. М. Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трёхмерном упругом теле методом граничных элементов // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 855–863.
10. Бабешко В. А. Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
11. Ворович И. И., Бабешко В. А., Прякина О. Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
12. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наукова думка, 1990. 224 с.
13. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.

Статья поступила 1 июня 2004 г.

Кубанский государственный университет

© Борисов Д. В., Прякина О. Д., Смирнова А. В., 2004