УДК 539.3

# КОЛЕБАНИЯ СОСТАВНОГО ГЕТЕРОГЕННОГО СЛОЯ[1]

*Суворова Т. В.*[2], *Усошина Е. А.*[3]

OSCILLATION OF COMPOSITE HETEROGENOUS LAYER

Suvorova T. V., Usoshina E. A.

Oscillations of the composite layer of porous and liquid layer are considered. Oscillations of heterogeneous media is described by Biot-Frenkel's equations. Expressions for Green's function are received to investigate the wave fields arising in the composite layer. The numerical analysis of stress-strain state is given.

Keywords: oscillations, porous and liquid layer, water saturation

## Введение

Математическое моделирование волновых процессов в слоистых пористо-упругих средах привлекает неизменный интерес исследователей, обусловленный многочисленными приложениями в сейсморазведке, геофизике, строительстве. Исследования волновых процессов в насыщенных пористых средах, начатые в работах [1, 2], были продолжены в ряде исследований, обзор которых дан в [3]. В последнее время интенсивно ведутся работы по изучению процессов распространения волн в слоистых средах, содержащих пористые флюидонасыщенные прослойки, частично насыщенные пористые среды, например [4–6]. Менее исследованными остаются вопросы влияния неоднородности слоистой составной среды, ее водонасыщенности и газонасыщенности на процесс распространения волн. С целью получения согласованных результатов теории и эксперимента рядом авторов были предложены новые модели пористых сред, в большинстве своем эти модели сводились к системе уравнений Био с зависящими от частоты коэффициентами. Изучаются и более сложные модели двухкомпонентных сред, учитывающие нелинейные эффекты [7]. В работе [8] приведены характеристики природных пористоупругих сред, определенные экспериментально с учетом обводненности и газонасыщенности, что позволяет с большей точностью моделировать процессы распространения волн в реальных, в частности, грунтовых средах.

При построении решения в данной работе использовался интегральный подход, развитый для упругих сред и корректно описывающие излучаемые на бесконечность волны [9]. Выведена матрица Грина для составного слоя в виде, позволяющем вести устойчивый счет во всех диапазонах изменения аргументов. Получены интегральные соотношения, описывающие волновые поля, которые анализируются численно в ближней зоне. При больших расстояниях от источника возбуждения колебаний используется асимптотический подход.

## 1. Постановка задачи

Рассматриваются колебания гетерогенного, насыщенного смесью жидкости и газа слоя, лежащего на слое жидкости. Заглубленный слой идеальной жидкости покоится на недеформируемом основании. В декартовой системе координат жидкий и гетерогенный слой соответственно занимают области $-\infty < x < \infty$, $-h_2 \leqslant y \leqslant 0$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant h_1$. К лицевой границе полосы в конечной области $-a \leqslant x \leqslant a$, $y = h_1$ при-

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (06-08-00867).

[2]Суворова Татьяна Виссарионовна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Ростовского государственного университета путей сообщения; e-mail: suvorova_tv111@mail.ru

[3]Усошина Елена Александровна, аспирант кафедры гидромеханики Южного федерального университета; e-mail: elka-way@rambler.ru

ложена нагрузка $\mathbf{P}e^{-i\omega t}$. Перемещения двухфазной гетерогенной среды, состоящей из упругого скелета и пор, заполненных смесью жидкости и газа, определяются уравнениями Био-Френкеля [1, 2].

$$\rho_{11}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}+b\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)=\sigma^s_{ij,j},$$

$$\rho_{12}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\rho_{22}\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}-b\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)= \\ =\sigma^f_{,i}, \quad (1.1)$$

где $u_i(x,y,t)$, $v_i(x,y,t)$, $i=1,2$ — компоненты векторов перемещений твердой и жидкой фаз. Связь между тензором полных напряжений $\Gamma_{ij}$ и деформациями твердой $e_{ij}$ и жидкой $\varepsilon_{ij}$ фаз выражается в виде

$$\sigma^s_{ij}=Ae\delta_{ij}+2Ne_{ij}+Q\varepsilon\delta_{ij},$$
$$\sigma^f=Q\vartheta+R\varepsilon, \quad \vartheta=\operatorname{div}\mathbf{u}, \quad (1.2)$$
$$\varepsilon=\operatorname{div}\mathbf{v}, \quad \Gamma_{ij}=\sigma^s_{ij}+\delta_{ij}\sigma^f.$$

Здесь $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, $\sigma^s_{ij}$ — тензор напряжений, действующих в упругом скелете, $\sigma^f$ — давления, действующие на жидкость в порах, $A$, $N$, $Q$, $R$ — механические характеристики гетерогенной среды, которые выражаются через модули объемной сжимаемости упругой, жидкой и газообразной фазы [2, 7], $\rho_{12}<0$ — коэффициент динамической связи упругого скелета и жидкости, $\rho_{11}$, $\rho_{12}$, $\rho_{22}$ — коэффициенты динамической плотности, выражаемые через плотности сред упругого скелета $\rho_s$ и жидкости $\rho_f$, коэффициент $b$ зависит от пористости среды $m$, коэффициента вязкости жидкости в порах и коэффициента проницаемости.

Вектор перемещений $\mathbf{w}\{w_i(x,y,t)\}$, $i=1,2$ и давление $p_0(x,y,t)$ в идеальной жидкости нижнего слоя выражается через волновой потенциал $\varphi(x,y,t)$:

$$p_0(x,y,t)=-\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \mathbf{w}=\operatorname{grad}\varphi. \quad (1.3)$$

На нижней границе жидкого слоя и недеформируемого основания нормальные перемещения равны нулю.

$$w_2(x,y,t)=0, \quad y=-h_2. \quad (1.4)$$

На границе жидкости и пористоупругой среды при $y=0$ предполагается свободная фильтрация жидкости через границу, при этом требуется равенство нормальных напряжений в пористой среде давлению в жидкости, равенства нулю тангенциальной составляющей напряжений пористой среды, непрерывность движения жидкости внутри и вне пористой среды [10]

$$\sigma^s_{22}+\sigma^f=(m-1)p_0, \quad y=0,$$
$$\sigma^f=-mp_0, \quad (1.5)$$
$$\sigma^s_{12}=0,$$
$$(1-m)\frac{\partial u_2}{\partial t}+m\frac{\partial v_2}{\partial t}=\frac{\partial w_2}{\partial t}.$$

На верхней границе полосы при $y=h_1$ в конечной области задана равнораспределенная нагрузка по типу «непроницаемый поршень», при этом

$$\sigma^s_{22}+\sigma^f=-Pe^{-i\omega t},$$
$$u_2=v_2, \quad |x|\leqslant a, \quad (1.6)$$
$$\sigma_{22}=0, \quad \sigma^s_{12}=0, \quad |x|>a.$$

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечность [9].

## 2. Построение решения

Так как режим колебаний предполагается установившимся, во всех функциях, зависящих от времени, отделим временной множитель $e^{-i\omega t}$. Далее изложение будем вести для амплитудных значений соответствующих функций. Представим перемещения в виде суммы трех потенциалов

$$\mathbf{u}=\operatorname{grad}(\Lambda_1+\Lambda_2)+\operatorname{rot}\mathbf{\Lambda},$$
$$\mathbf{v}=\operatorname{grad}(m_1\Lambda_1+m_2\Lambda_2)+m_3\operatorname{rot}\mathbf{\Lambda}, \quad (2.1)$$
$$\mathbf{\Lambda}=(0,0,\Lambda_3).$$

Применим интегральное преобразование Фурье к уравнениям (1.1), (1.2):

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\alpha,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{u}(x,y)e^{i\alpha x}dx.$$

Система уравнений (1.1), (1.2) на основании свойств преобразования Фурье и дифференциальных операторов распадается на три волновые уравнения

$$\Delta\widetilde{\Lambda}_i+\gamma_i^2\widetilde{\Lambda}_i=0, \quad i=1,2,3,$$
$$\kappa_i=\frac{\omega}{V_i}, \quad (2.2)$$

$$\gamma_i = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_i^2},$$

$$\widetilde{\Lambda}_k(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_k(x, y) e^{i\alpha x} dx.$$

Подробнее эти преобразования описаны в [10, 13]. В соответствии с (2.2) в гетерогенной среде распространяется независимо друг от друга три типа волн, $V_1$, $V_2$ — скорости распространения быстрой и медленной продольных волн, $V_3$ — скорость распространения поперечной волны. Быстрая продольная волна соответствует синфазному движению скелета грунта и жидкости и распространяется с малым затуханием. В медленной продольной волне движение скелета грунта и жидкости противофазно, затухает она значительно быстрее. Если связь между упругой и жидкой фазами слабая, то скорости продольных волн приближаются к скоростям волн в сплошной упругой и сплошной жидкой средах в отдельности. Через решения волновых уравнений (2.2) перемещения в пористоупругой среде выражаются в виде

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\alpha, y) = \mathbf{B}^s \mathbf{C}^s + \mathbf{B}^k \mathbf{C}^k, \qquad (2.3)$$

$$\mathbf{B}^s = \begin{pmatrix} -i\alpha \widetilde{c}_1(y) & -i\alpha \widetilde{c}_2(y) & \gamma_3 \widetilde{c}_3(y) \\ \gamma_1^2 \widetilde{s}_1(y) & \gamma_2^2 \widetilde{s}_2(y) & i\alpha\gamma_3 \widetilde{s}_3(y) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{s}_i(y) = (e^{\gamma_i(y-h_1)} - e^{-\gamma_i(y+h_1)})/\gamma_i,$$

$$\widetilde{c}_i(y) = e^{\gamma_i(y-h_1)} + e^{-\gamma_i(y+h_1)}.$$

Матрица $\mathbf{B}^k$ получается из матрицы $\mathbf{B}^s$ заменой $\widetilde{c}_i(y)$ на $\widetilde{s}_i(y)$ и $\widetilde{s}_i(y)$ на $\widetilde{c}_i(y)$. Здесь $\mathbf{C}^{s,k}$ — трехмерные векторы произвольных постоянных.

Для удовлетворения граничных условий в плоском случае имеем 8 произвольных постоянных. В результате удовлетворения граничных условий (1.4)–(1.6) получаем систему алгебраических уравнений относительно $\mathbf{C}^{s,k}$. Коэффициенты системы являются функциями параметра преобразования Фурье. Решение системы средствами аналитических преобразований компьютерной системы математики Maple является малоэффективным для проведения численного анализа. Этим способом невозможно обеспечить отсутствие неопределенностей, устойчивый счет для достаточно больших значений аргумента. Поэтому удовлетворение граничных условий проводилось в 3 этапа, для каждой границы выполнялись преобразования в соответствии с поставленными целями, см. [12]. В результате приходим к представлению матрицы Грина, которая в данном случае является асимметричной и имеет следующую структуру

$$\mathbf{G}(\alpha, y) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -ig_{11}/\alpha & -ig_{12}/\alpha \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \qquad (2.4)$$

$$\Delta = s_1 s_{21} - s_2 s_{22} + s_3 s_{23},$$

$$s_{21} = s_5 s_7 - s_6 s_8 + s_9,$$

$$s_{22} = s_4 s_7 + \alpha^2 (s_6 s_{10} + s_{11}),$$

$$s_{23} = -s_4 s_8 + \alpha^2 (s_5 s_{10} - s_{12}),$$

$$\gamma_{3+i} = q_6 \gamma_i^2 - \kappa_i^2 (q_4 + q_5 m_i), \quad i = 1, 2$$

$$q_{6+i} = -\kappa_i^2 (q_{12} + m_i q_{22}),$$

$$\gamma_6 = \alpha^2 - 0{,}5\kappa_3^2,$$

$$\gamma_7 = \frac{i\omega\rho_0 m \kappa_3^2 \operatorname{cth} \gamma_0 h_2 (1 - m + m m_2)}{2\gamma_0 q_8 H},$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_0^2}, \quad \kappa_0 = \frac{\omega}{V_0},$$

$$\gamma_8 = (q_7 \gamma_5 - q_8 \gamma_4)/q_8 q_6,$$

$$\gamma_9 = (q_8 - m\gamma_5)\gamma_7/(q_6 m),$$

$$\widetilde{s}_i = \widetilde{s}_i(h_1)/\gamma_i, \quad \widetilde{c}_i = \widetilde{c}_i(h_1), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$q_{11} = (A + 2N)/H, \quad q_{12} = Q/H,$$

$$q_{22} = R/H, \quad H = A + 2N + Q + R,$$

$$q_6 = 2N/H,$$

$$q_4 = q_{11} + q_{12} - q_6,$$

$$q_5 = q_{12} + q_{22}.$$

Обозначения для $m_i$ приведены в [12]. $V_0$ — скорость распространения волн в идеальной жидкости.

$$m_{i1} = 1 - m_i,$$

$$s_1 = \alpha^2 (\gamma_1^2 \widetilde{s}_1 + \gamma_2^2 \widetilde{s}_2 q_9) + \gamma_6 \gamma_8 \widetilde{s}_3,$$

$$s_2 = \gamma_4 \widetilde{c}_1 + q_9 \gamma_5 \widetilde{c}_2 + q_6 q_8 \widetilde{c}_3,$$

$$s_3 = m_{11} \gamma_1^2 \widetilde{s}_1 + q_9 m_{21} \gamma_2^2 \widetilde{s}_2 + m_{31} \gamma_8 \widetilde{s}_3,$$

$$s_4 = \alpha^2 ((\gamma_2^2 \gamma_7 \widetilde{s}_2)/\gamma_6 - \widetilde{c}_3) + \gamma_9 \widetilde{s}_3,$$

$$s_5 = (\gamma_5 \gamma_7 \widetilde{c}_2 + q_6 \gamma_9 \widetilde{c}_3 - \alpha^2 \gamma_3^2 q_6 \widetilde{s}_3)/\gamma_6,$$

$$s_6 = (m_{21} \gamma_2 \gamma_7 \widetilde{s}_2 + m_{31} \gamma_9 \widetilde{s}_3 - m_{31} \alpha^2 \widetilde{c}_3)/\gamma_6,$$

$$s_7 = m_{21} \widetilde{c}_2 - m_{11} \widetilde{c}_1,$$

$$s_8 = \gamma_4 \widetilde{s}_1 - \gamma_5 \widetilde{s}_2,$$

$$s_9 = m_{21} \widetilde{c}_2 \gamma_4 \widetilde{s}_1 - m_{11} \gamma_5 \widetilde{c}_1 \widetilde{s}_2,$$

$$s_{10} = \widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_2,$$

$$s_{11} = (m_1 - m_2) \widetilde{c}_1 \widetilde{c}_2,$$

$$s_{12} = \gamma_4 \widetilde{c}_2 \widetilde{s}_1 - \gamma_2 \widetilde{c}_1 \widetilde{s}_2,$$

$$s_{18} = s_1 s_6 - s_3 s_4,$$

$$g_{22} = -\gamma_1^2 s_{22}\widetilde{s}_1(y) + \gamma_2^2 s_{42}\widetilde{s}_2(y) + \\ + s_{44}\widetilde{s}_3(y) + (s_{18} + s_{25})\widetilde{c}_1(y) + (s_{24} - \\ - s_{18})\widetilde{c}_2(y) - \alpha^2/\gamma_6 s_{32}(\widetilde{c}_3(y)),$$

$$s_{23+i} = (s_i\gamma_i m_{i1} - \alpha^2\gamma_3 s_3)c_i, \quad i = 1, 2,$$

$$s_{40+i} = (-1)^{i+1} q_9 s_{2i} + \gamma_7/\gamma_6 s_{3i},$$

$$s_{42+i} = (-1)^{i+1} \gamma_8 s_{2i} + \gamma_9/\gamma_6 s_{3i}.$$

Элементы матрицы (2.3) не содержат экспоненциальных составляющих,растущих на бесконечности, их выражение приведено в [12]. Элементы матрицы Грина являются осциллирующими функциями, убывающими на бесконечности степенным образом, мероморфными в комплексной плоскости. При $\alpha \to \infty$, $\Delta = O(\alpha^4)$.

Поле перемещений в пористоупругой полосе, лежащей на жидком слое, на непроницаемой лицевой поверхности можно представить в виде

$$\mathbf{u}(x, h1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{R_1} \mathbf{G}(\alpha, h_1)\widetilde{\mathbf{P}}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (2.5)$$

Контур интегрирования $R_1$ выбирается в соответствии с принципом излучения [9], обходя регулярные особенности $\alpha_k$ подынтегральной функции с положительной действительной частью и малой комплексной в нижней комплексной полуплоскости. На удалении от области приложения нагрузки эти формулы могут быть преобразованы применением теории вычетов. В случае нормально приложенной нагрузки вертикальные перемещения на лицевой поверхности составной пористоупругой полосы имеют представление

$$u_2(x, h1) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \frac{4ig_{22}(\alpha_k, h1)\widetilde{P}_2(\alpha_k)e^{-i\alpha_k x}}{\Delta'(\alpha_k)}. \quad (2.6)$$

## 3. Результаты численного анализа и выводы

Численный анализ проводился по формулам (2.5), (2.6), для чего был составлен пакет программ в системе Maple.

В соответствии с [8] приняты следующие значения механических характеристик, отвечающих насыщенному смесью воды и воздуха песчанику:

$$K_s = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad K_b = 0,43 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$K_f = 2,25 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad K_g = 0,145 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\rho_s = 2,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_f = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_g = 1,1 \text{ кг/м}^3,$$

$$m = 0,3, \quad m_g = 0,1, \quad h_1/h2 = 5.$$

Подынтегральная функция выражения (2.5) имеет комплексные полюса, расположенные вблизи действительной оси. При их нахождении использовался метод аргумента. Наличие жидкого заглубленного слоя вызывает быстрое изменение поведения и количества особенностей подынтегральной функции при увеличении частоты колебаний. Мнимая составляющая полюсов, определяющая затухание волнового поля на поверхности при удалении от области приложения нагрузки, увеличивается с ростом частоты достаточно быстро. Возрастание пористости гетерогенного слоя вызывает уменьшение полюсов подынтегральной функции.

Графики перемещений поверхности полосы при значениях $\omega = 3$ и $\omega = 5$ представлены на рис. 1, 2. Сплошная линия соответствует действительной части перемещений, прерывистая — мнимой.

На рис. 3 приведены абсолютные величины перемещений.

Наличие заглубленного жидкого слоя в значительной степени изменяет волновую картину на лицевой поверхности составной слоистой среды. Дисперсия колебаний составного слоя намного превосходит дисперсию колебаний гетерогенного, лежащего без трения на жестком основании. На низких частотах характер поведения поверхностных волн быстро изменяется с ростом частоты, что является энергетическим фактором, способствующим более быстрому разрушению поверхностных слоев. Результаты настоящей работы могут быть использованы при постановке трудоемких натурных экспериментов, например [14], и особенно важны для задач прикладных исследований, при изучении колебании грунтовых гетерогенных сред, которые являются «низкочастотным фильтром».

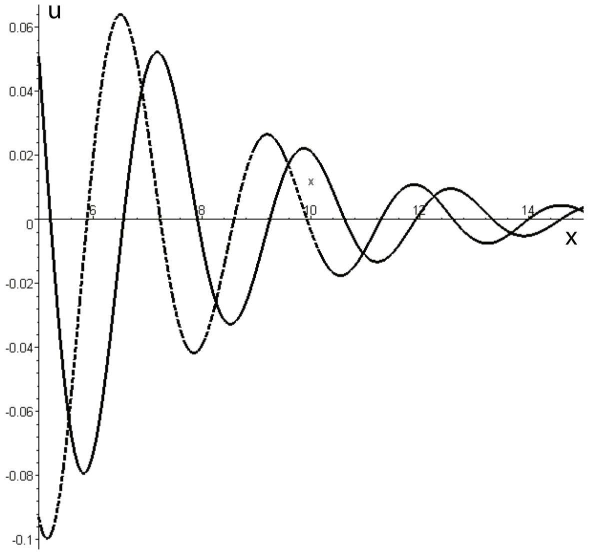


Рис. 1. Перемещения поверхности полосы при удалении от области приложения нагрузки при $\omega$=3

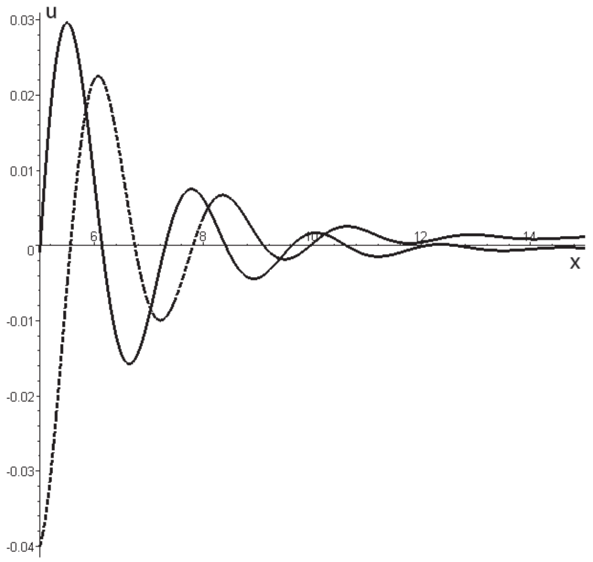


Рис. 2. Перемещения поверхности полосы при удалении от области приложения нагрузки при $\omega$=5

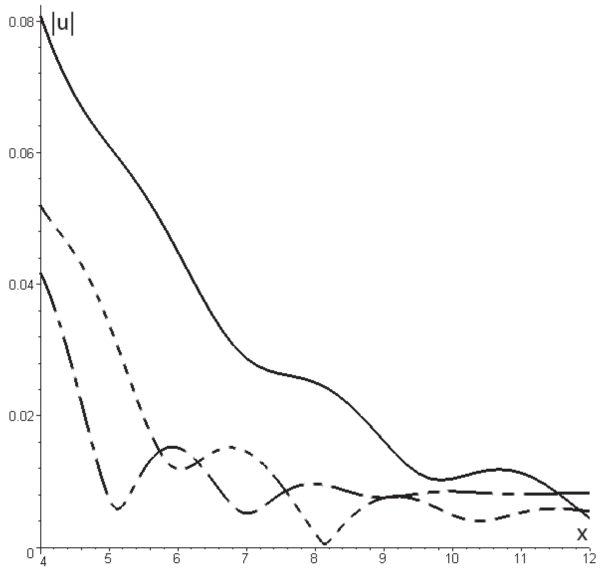


Рис. 3. Модули перемещения поверхности полосы при различных частотах колебаний. Штрих-пунктирная линия соответствует $\omega$=7, штриховая — $\omega$=5, сплошная линия — $\omega$=3

### *Литература*


1. *Френкель Я. И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Известия АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. Вып. 4. Т. 8. С. 133–149.
2. *Био М. А.* Механика деформирмирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. В. 6. № 82. С. 103–134.
3. *Николаевский В. Н., Басниев К. С, Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
4. *Молотков Л. А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. С.-Пб.: Наука, 2001. 248 с.
5. *Edelman I. Wilmanski K.* Asymptotic analysis of surface waves at a vacuum/porous medium and liquid/porous medium interfaces // Continuum Mech. Thermodyn. 2002. P. 25–44.
6. *Allard J. F., Jansens G., Lauriks W., Vermeir G.* Frame-borne surface waves in air-saturated porous media // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 111. № 2. P. 690–696.
7. *Багдоев А. Г., Ерофеев В. И., Шекоян А. В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 318 с.
8. *Chao-Lung Y., Wei-Cheng L., Chyan-Deng J.* An assessment of characteristics of acoustic wave propagation and attenuation trough eleven different saturated soils // J. Acoust. Soc. 2005. № 2. P. 127–136.
9. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1976. 319 с.
10. *Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А.* Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наукова думка, 1990. 224 с.
11. *Суворова Т. В., Беляк О. А.* О колебаниях многослойного гетерогенного полупространства под действием осциллирующей нагрузки // Труды РГУПС. 2006. Вып. 3. С. 127–134.
12. *Суворова Т. В., Усошина Е. А.* Построение матрицы Грина для пористоупругого слоя, колеблющегося на слое жидкости. Современные проблемы механики сплошной среды: Сб. трудов XII межд. конф. Ростов-на-Дону, 2008. Т. 2. С. 127–132.
13. *Колесников В. И., Суворова Т. В.* Моделирование динамического поведения системы «верхнее строение железнодорожного пути — слоистая грунтовая среда». М.: ВИНИТИ РАН, 2003. 232 с.
14. *Пат. № 2380260 РФ.* Способ контроля интегральных параметров проходящего по железнодорожному пути подвижного состава / Суворов А.Б., Суворова Т.В, Усошина Е.А. и др.


Ключевые слова: колебания, пористоупругий и жидкий слой, флюидонасыщенность

Статья поступила 5 июня 2010 г.

Ростовский государственный университет путей сообщения, г. Ростов-на-Дону
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону