

УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ ОЦЕНКИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕРРИТОРИЙ С РАЗЛОМАМИ¹

*Бабешко В. А.², Евдокимова О. В.³, Бабешко О. М.⁴, Горшкова Е. М.⁵,
Кашков Е. В.⁶, Плужник А. В.⁷, Федоренко А. Г.⁸, Шишкин А. А.⁹*

ON THE PROBLEM OF THE STRESSED-DEFORMED STATE ESTIMATION OF THE RUPTURE-CONTAINING REGIONS

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Gorshkova E. M., Kashkov E. V., Pluzhnik A. V., Fedorenko A. G., Shishkin F. S.

Medium strain of the region containing ruptures is examined with the help of block structure method. There were built necessary block structures for the horizontal-oriented block structure imitating rupture territory, considering the presence of mountain mass and mountain root. A simplified version approximating the original model is made.

Keywords: differential equations system in partial derivatives, boundary problem, block structure, differential factorization method, ruptures, strain

Актуальной на сегодняшний день является проблема прогноза нарастания сейсмичности в сейсмоопасных зонах, имеющих сложный ландшафт, в том числе горный, а также разломы. В работе предлагается исследование этой проблемы с применением метода механики разрушения. Для реализации этого подхода развиваются методы расчета напряженности литосферных плит как деформируемых твердых тел, подвергаемых внешним воздействиям различной природы. Литосферные плиты имеют разломы, трещины, включения, которые могут сильно влиять

на их прочностные свойства. В частности, разломы литосферных плит в соответствии с имеющимися данными вибросейсмического зондирования, могут быть сквозными, рассекающими литосферную плиту от поверхности до основания, частичными, выходящими либо на поверхность, либо на нижнее основание, внутренними, являющимися полостями, не касающимися границы. Все эти разломы могут существенно влиять на концентрацию напряжений в литосферных плитах и, таким образом, на нарастание сейсмичности. Считается, и это подтверждено практикой, что

¹Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (09-08-00170, 08-08-00468, 09-08-00171, 08-08-00669), программы Юг России (09-01-96500, 09-01-96503, 09-08-96522, 09-08-96527, 09-08-00294), проекта НШ-3765.2010.1, проекта ФЦП 2009-1.5-503-004-006, Гранта Президента МД-1554.2009.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

²Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru

³Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru

⁴Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru

⁵Горшкова Елена Михайловна, старший научный сотрудник НИИ предупреждения геоэкологических катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: gem@kubsu.ru

⁶Кашков Евгений Вениаминович, инженер-исследователь ЮНЦ РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru

⁷Плужник Андрей Валерьевич, младший научный сотрудник ЮНЦ РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru

⁸Федоренко Алексей Григорьевич, инженер-исследователь ЮНЦ РАН; e-mail: afedorenko@mail.ru

⁹Шишкин Алексей Александрович, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru

очагами землетрясений являются именно зоны разломов. Существуют различные подходы к описанию разломов. Однако практически все они рассматривают разломы как трещины Гриффица, что не всегда правомерно. Поэтому для решения проблемы напряженности литосферных плит, во-первых, необходимо более детально исследовать тип разлома в литосферной плите, т. к. его искажение может привести к ошибочным данным о концентрации напряжений. Во-вторых, необходимо научиться исследовать напряженно-деформированные поля в литосферных плитах и концентрацию напряжений при наличии разломов. Для решения перечисленных проблем применяется математический аппарат, основанный на идеях факторизации.

1. Развиваемый подход основан на применении метода блочного элемента для моделирования литосферных плит территорий с разломами.

Такая территория с разломами рассматривается как горизонтально ориентированная блочная структура, блоки которой разведены разломами. В том случае, если реальные разломы не разделяют среду на блоки, в блочной структуре вводятся виртуальные блоки, условно выделяющие блок, отделенный частично реальным и частично виртуальным разломом. Достоинство факторизационных методов состоит в том, что псевдодифференциальные уравнения позволяют строго удовлетворять реальным граничным условиям. На границах реальных разломов удовлетворяются заданные граничные условия, на границах виртуальных разломов — условия непрерывности среды.

Для моделирования горизонтально ориентированной блочной структуры применяются двумерные и трехмерные блочные элементы. Они наиболее удобны для этих целей в связи с плоскими боковыми гранями и возможностью построения разломов не только типа трещин Гриффица, но и каньонного типа [1]. Такие блочные элементы построены в работах [2–8]. Ниже приводятся отдельные формулы, описывающие ряд указанных блочных элементов и связанных с ними псевдодифференциальных уравнений.

Для случая двумерного блочного элемента в форме прямоугольника представление решения и псевдодифференциальные уравнения для двух смежных систем координат касательного расслоения даются формулами,

в которых приняты обозначения работы [2]

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1^1, x_2^1) = & \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1) K_1^{-1} \times \\ & \times \left\{ \int_{-a}^a \left[-A_{22} (\varphi'_{12} - i\alpha_2^1 \varphi_1) \exp i\alpha_1^1 \eta_1^1 d\eta_1^1 - \right. \right. \\ & \quad \left. - A_{22} (\varphi'_{32} + i\alpha_2^1 \varphi_3) \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp [-i(2\alpha_2^1 b + \alpha_1^1 x_1^3)] dx_1^3 \right] - \\ & \quad \left. - \int_{-b}^b \left[A_{11} (\varphi'_{22} + i\alpha_1^1 \varphi_2) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \times \exp [-i(\alpha_2^1 b - \alpha_2^1 x_1^2 + \alpha_1^1 a)] dx_1^2 - \right. \\ & \quad \left. - A_{11} (\varphi'_{42} - i\alpha_1^1 \varphi_4) \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp [-i(\alpha_2^1 b + \alpha_2^1 x_1^4 - \alpha_1^1 a)] dx_1^4 \right] \Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_1^2, x_2^2) = & \mathbf{F}^{-1}(x_1^2, x_2^2) K_2^{-1} \times \\ & \times \left\{ \int_{-b}^b \left[-A_{11} (\varphi'_{22} - i\alpha_2^2 \varphi_2) \exp i\alpha_1^2 \eta_1^2 d\eta_1^2 - \right. \right. \\ & \quad \left. - A_{11} (\varphi'_{42} + i\alpha_2^2 \varphi_4) \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp i(-2\alpha_2^2 a - \alpha_1^2 x_1^4) dx_1^4 \right] + \\ & \quad \left. + \int_{-a}^a \left[A_{22} (-\varphi'_{12} + i\alpha_1^2 \varphi_1) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \times \exp i[-(\alpha_2^2 a - \alpha_1^2 b + \alpha_2^2 x_1^1)] dx_1^1 - \right. \\ & \quad \left. - A_{22} (\varphi'_{32} + i\alpha_1^2 \varphi_3) \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp i[-(\alpha_2^2 a + \alpha_1^2 b - \alpha_2^2 x_1^3)] dx_1^3 \right] \Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}(x_1^1) \Big\{ & \int_{-a}^a \left[-A_{22} (\varphi'_{12} - i\alpha_2^1 \varphi_1) \times \right. \\ & \times \exp i\alpha_1^1 \eta_1^1 d\eta_1^1 - A_{22} (\varphi'_{32} + i\alpha_2^1 \varphi_3) \times \\ & \times \exp [-i(2\alpha_2^1 b + \alpha_1^1 x_1^3)] dx_1^3 - \\ & \quad \left. - \int_{-b}^b \left[A_{11} (\varphi'_{22} + i\alpha_1^1 \varphi_2) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \times \exp [-i(\alpha_2^1 b - \alpha_2^1 x_1^2 + \alpha_1^1 a)] dx_1^2 - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & -A_{11} (\varphi'_{42} - i\alpha_1^1 \varphi_4) \times \\ & \times \exp \left[-i (\alpha_{2-}^1 b + \alpha_{2-}^1 x_1^4 - \alpha_1^1 a) \right] dx_1^4 \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$x_1^1 \in [-a, a];$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}^{-1}(x_1^2) \left\{ \int_{-b}^b \left[-A_{11} (\varphi'_{22} - i\alpha_{2-}^2 \varphi_2) \times \right. \right. \\ & \times \exp i \alpha_1^2 \eta_1^2 d\eta_1^2 - A_{11} (+\varphi'_{42} + i\alpha_{2-}^2 \varphi_4) \times \\ & \left. \left. \times \exp i (-2\alpha_{2-}^2 a - \alpha_1^2 x_1^4) dx_1^4 \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \int_{-a}^a \left[A_{22} (-\varphi'_{12} + i\alpha_1^2 \varphi_1) \times \right. \right. \\ & \times \exp i \left[-(\alpha_{2-}^2 a - \alpha_1^2 b + \alpha_{2-}^2 x_1^1) \right] dx_1^1 + \\ & \left. + A_{22} (-\varphi'_{32} - i\alpha_1^2 \varphi_3) \times \right. \\ & \left. \times \exp i \left[-(\alpha_{2-}^2 a + \alpha_1^2 b - \alpha_{2-}^2 x_1^3) \right] dx_1^3 \right] \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$x_1^2 \in [-b, b].$$

В случае прямоугольного параллелепипеда эти формулы имеют вид [3]

$$\begin{aligned} & \varphi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1) = \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1, x_3^1) \times \\ & \times K_1^{-1} \left\{ \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} - i\alpha_3^1 \varphi_1) \times \right. \\ & \times \exp i [\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\ & + \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\varphi'_{22} + i\alpha_1^1 \varphi_2) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1 (x_1^2 - b)] dx_1^2 dx_2^2 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} + i\alpha_3^1 \varphi_3) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b] dx_1^3 dx_2^3 - \\ & - \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_1^1 \varphi_4) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1 (x_1^4 + b)] dx_1^4 dx_2^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^1 \varphi_5) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^5 - b)] dx_1^5 dx_2^5 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^1 \varphi_6) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^6 - b)] dx_1^6 dx_2^6 \Big\}. \end{aligned}$$

с псевдодифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}^{-1}(x_1^1, x_2^1) \left\{ \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{13} - i\alpha_3^1 \varphi_1) \times \right. \\ & \times \exp i [\alpha_1^1 \eta_1^1 + \alpha_2^1 \eta_2^1] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\ & + \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\varphi'_{22} + i\alpha_1^1 \varphi_2) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1 (x_1^2 - b)] dx_1^2 dx_2^2 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} + i\alpha_3^1 \varphi_3) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b] dx_1^3 dx_2^3 - \\ & - \int_{-c}^c \int_{-b}^b A_{11} (\varphi'_{43} - i\alpha_1^1 \varphi_4) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1 (x_1^4 + b)] dx_1^4 dx_2^4 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{53} + i\alpha_2^1 \varphi_5) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^5 - b)] dx_1^5 dx_2^5 + \\ & + \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^1 \varphi_6) \times \\ & \times \exp i [-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1 (x_2^6 - b)] \times \\ & \times dx_1^6 dx_2^6 \Big\} = 0, \end{aligned}$$

$$|x_1^1| \leq a, \quad |x_2^1| \leq c.$$

Частными случаями этого блочного элемента являются полубесконечные блочные элементы, неограниченно простирающийся слой конечной толщины и полупространство.

На территориях с разломами могут находиться горные массивы, которые вносят коррективы в распределение полей напряженно-деформированного состояния среды территории с разломами. Для их учета построены блочные элементы в форме треугольных и многогранных пирамид. Будучи поставленными плоским основанием на верхнюю границу слоя простейшего блока, рассмотренного выше, они моделируют горную возвышенность, а перевернутые и поставленные на нижнее основание слоя — корень горной возвышенности, если его геометрическая форма установлена.

Ниже приводятся псевдодифференциальные уравнения, записанные в одной из локальных координатных систем касательного расслоения пирамиды представления решений.

Для прямоугольной треугольной пирамиды они имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \varphi_3(x_1^3, x_2^3, x_3^3) = & \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3, x_3^3) \times \\ & \times K_3^{-1} \left\{ \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} - i\alpha_3^3 \varphi_3) \times \right. \\ & \times \exp i [\alpha_1^3 \eta_1^3 + \alpha_2^3 \eta_2^3] d\eta_1^3 d\eta_2^3 - \\ & - \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{23} - i\alpha_1^3 \varphi_2) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^3 \alpha + \alpha_2^3 x_2^2 - \alpha_3^3 (x_1^2 + b)] dx_1^2 dx_2^2 - \\ & - \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^3 \varphi_6) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3 c - \alpha_3^3 (x_2^6 + b)] dx_1^6 dx_2^6 + \\ & + \iint_{\partial\Omega_v} [A_{33}^v (\varphi'_{v3} - i c_{k3}^3 \alpha_k^3 \varphi_v) - \\ & - i c_{k1}^3 \alpha_k^3 A_{13}^v \varphi_v - i c_{k3}^3 \alpha_k^3 A_{23}^v \varphi_v] \times \\ & \times E_{3v} (\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3, x_1^v, x_2^v, 0) dx_1^v dx_2^v \end{aligned}$$

с псевдодифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}(x_1^3, x_2^3) \left\{ \int_{-a}^a \int_{-c}^c A_{33} (\varphi'_{33} - i\alpha_3^3 \varphi_3) \times \right. \\ \times \exp i [\alpha_1^3 \eta_1^3 + \alpha_2^3 \eta_2^3] d\eta_1^3 d\eta_2^3 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-b}^b \int_{-c}^c A_{11} (\varphi'_{23} - i\alpha_1^3 \varphi_2) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^3 \alpha + \alpha_2^3 x_2^2 - \alpha_3^3 (x_1^2 + b)] dx_1^2 dx_2^2 - \\ & - \int_{-a}^a \int_{-b}^b A_{22} (\varphi'_{63} - i\alpha_2^3 \varphi_6) \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3 c - \alpha_3^3 (x_2^6 + b)] dx_1^6 dx_2^6 + \\ & + \iint_{\partial\Omega_v} [A_{33}^v (\varphi'_{v3} - i(c_{k3}^3 \alpha_k^3) - \varphi_v) - \\ & - i(c_{k1}^3 \alpha_k^3) - A_{13}^v \varphi_v - i(c_{k3}^3 \alpha_k^3) - A_{23}^v \varphi_v] \times \\ & \times E_{3v} (\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3, x_1^v, x_2^v, 0) dx_1^v dx_2^v \Big\} = 0, \end{aligned}$$

$$x_1^3, x_2^3 \in \partial\Omega_3.$$

Для произвольной треугольной пирамиды [5]

$$\begin{aligned} \varphi_v(x_1^v, x_2^v, x_3^v) = & \mathbf{F}^{-1}(x_1^v, x_2^v, x_3^v) \times \\ & \times K_v^{-1} \left\{ \iint_{\partial\Omega_v} [A_{33}^v (\varphi_{v3} - i\alpha_3^v \varphi_v) - \right. \\ & - i\alpha_1^v A_{13}^v \varphi_v - i\alpha_2^v A_{23}^v \varphi_v] \times \\ & \times \exp i [\alpha_1^v \eta_1^v + \alpha_2^v \eta_2^v] d\eta_1^v d\eta_2^v + \\ & + \sum_{\tau=1}^4 \iint_{\partial\Omega_\tau} [A_{33}^\tau (\varphi_{\tau 3} - i b_{3m}^{\tau v} \alpha_m^v \varphi_\tau) - \\ & - i b_{1m}^{\tau v} \alpha_m^v A_{13}^\tau \varphi_\tau - i b_{2m}^{\tau v} \alpha_m^v A_{23}^\tau \varphi_\tau] \times \\ & \times D_{v\tau} (\alpha_1^v, \alpha_2^v, \alpha_3^v, x_1^\tau, x_2^\tau, 0) dx_1^\tau dx_2^\tau \Big\} \end{aligned}$$

с псевдодифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}(x_1^v, x_2^v) \left\{ \iint_{\partial\Omega_v} [A_{33}^v (\varphi_{v3} - i\alpha_3^v \varphi_v) - \right. \\ - i\alpha_1^v A_{13}^v \varphi_v - i\alpha_2^v A_{23}^v \varphi_v] \times \\ \times \exp i [\alpha_1^v \eta_1^v + \alpha_2^v \eta_2^v] d\eta_1^v d\eta_2^v + \\ + \sum_{\tau=1}^4 \iint_{\partial\Omega_\tau} [A_{33}^\tau (\varphi_{\tau 3} - i(b_{3m}^{\tau v} \alpha_m^v) - \varphi_\tau) - \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & -i(b_{1m}^{\tau\nu}\alpha_m^v) - A_{13}^{\tau}\varphi_{\tau} - i(b_{2m}^{\tau\nu}\alpha_m^v) - A_{23}^{\tau}\varphi_{\tau} \Big] \times \\ & \times D_{\nu\tau}(\alpha_1^v, \alpha_2^v, \alpha_{3-}^v, x_1^{\tau}, x_2^{\tau}, 0) dx_1^{\tau} dx_2^{\tau} \Big\} = 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\nu = 1, 2, 3, 4.$$

Для многогранной пирамиды [6]

$$\begin{aligned} \varphi_{vs}(x_1^{vs}, x_2^{vs}, x_3^{vs}) &= \mathbf{F}^{-1}(x_1^{vs}, x_2^{vs}, x_3^{vs}) \times \\ & \times K_{vs}^{-1} \left\{ \iint_{\partial\Omega_{vs}} [A_{33}^{vs}(\varphi_{vs3} - i\alpha_3^{vs}\varphi_v) - \right. \\ & \quad \left. - i\alpha_1^{vs}A_{13}^{vs}\varphi_{vs} - i\alpha_2^{vs}A_{23}^{vs}\varphi_{vs}] \right. \\ & \quad \left. \exp i[\alpha_1^{vs}\eta_1^{vs} + \alpha_2^{vs}\eta_2^{vs}] d\eta_1^{vs} d\eta_2^{vs} + \right. \\ & + \sum_{\tau,k=1}^{M_0, N_{\tau}'} \iint_{\partial\Omega_{\tau k}} [A_{33}^{\tau k}(\varphi_{\tau k3} - i b_{3m}^{\tau k}\alpha_m^{vs}\varphi_{\tau k}) - \\ & \quad \left. - i b_{1m}^{\tau k}\alpha_m^{vs}A_{13}^{\tau k}\varphi_{\tau k} - i b_{2m}^{\tau k}\alpha_m^{vs}A_{23}^{\tau k}\varphi_{\tau k}] \times \right. \\ & \left. \times D_{\nu s \tau k}(\alpha_1^{vs}, \alpha_2^{vs}, \alpha_3^{vs}, x_1^{\tau k}, x_2^{\tau k}, 0) dx_1^{\tau k} dx_2^{\tau k} \right\} \end{aligned}$$

с псевдодифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}(x_1^{vs}, x_2^{vs}) & \left\{ \iint_{\partial\Omega_{vs}} [A_{33}^{vs}(\varphi_{vs3} - i\alpha_3^{vs}\varphi_{vs}) - \right. \\ & \quad \left. - i\alpha_1^{vs}A_{13}^{vs}\varphi_{vs} - i\alpha_2^{vs}A_{23}^{vs}\varphi_{vs}] \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp i[\alpha_1^{vs}\eta_1^{vs} + \alpha_2^{vs}\eta_2^{vs}] d\eta_1^{vs} d\eta_2^{vs} + \right. \\ & + \sum_{\tau,k=1}^{M_0, N_{\tau}'} \iint_{\partial\Omega_{\tau k}} [A_{33}^{\tau k}(\varphi_{\tau k3} - i(b_{3m}^{\tau k}\alpha_m^{vs}) - \varphi_{\tau k}) - \\ & \quad \left. - i(b_{2m}^{\tau k}\alpha_m^{vs}) - A_{13}^{\tau k}\varphi_{\tau k} - i(b_{1m}^{\tau k}\alpha_m^{vs}) - A_{23}^{\tau k}\varphi_{\tau k}] \times \right. \\ & \quad \left. \times D_{\nu s \tau k}(\alpha_1^{vs}, \alpha_2^{vs}, \alpha_{3-}^{vs}, x_1^{\tau k}, x_2^{\tau k}, 0) \times \right. \\ & \quad \left. \times dx_1^{\tau k} dx_2^{\tau k} \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\nu = 1, 2, \dots, M_0, \quad s = 1, 2, \dots, N_{\nu}.$$

Во всех приведенных выражениях приняты обозначения работ, на которые произведены ссылки.

2. При анализе применения блочных элементов для оценки напряженно-деформированного состояния сред территорий с разломами становится ясно, что точную модель, воспроизводящую территорию

региона, построить невозможно по следующим причинам:

1) нет достаточно достоверных сведений о глубинной структуре территории, толщинах литосферных плит, расположении границ Конрада и Мохоровичича, характере «корней» горных массивов;

2) нет данных о типах разломов — являются ли они сквозными, частичными, или скрытыми, внутренними;

3) нет сведений о горизонтальных движениях литосферных плит;

4) нет сведений о глубинной активности Земли в зоне территории Краснодарского края.

В связи с этим до получения необходимых данных, а технические средства для этого уже существуют, но являются весьма затратными, нет необходимости использовать трудоемкий точный аппарат исследования проблемы, а потому целесообразно построение упрощенной модели или моделей. Они будут служить средством для отработки на них алгоритмов и подходов изучения территорий с разломами.

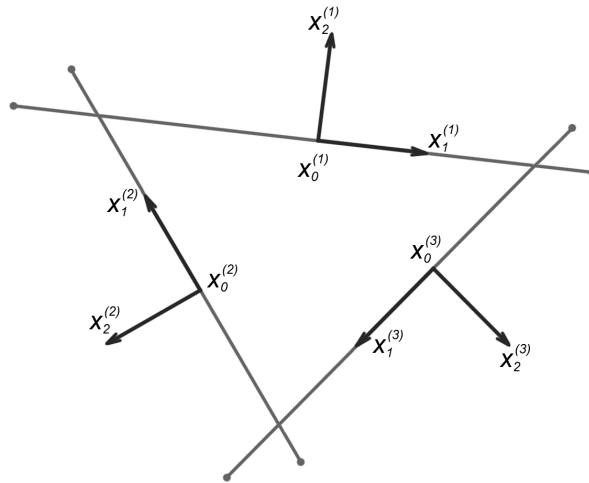
В процессе построения этих моделей должен быть выработан также и алгоритм их уточнения по мере поступления дополнительной информации о свойствах перечисленных выше объектов, данных о которых в настоящий момент нет.

Сказанное выше дало основание принять такого рода модели, которые, с одной стороны, являются достаточно простыми, а с другой — позволяют извлекать полезную информацию о параметрах (пусть далеко не всех), но все-таки дающих представление о напряженно-деформированном состоянии такой сложной системы, как территории с разломами.

Приняты следующие варианты.

1. Относительная средняя толщина коры Земли в пересчете на масштаб шара с диаметром 30 см составляет несколько десятков микрон. Это позволяет в качестве моделей литосферных плит приближенно принять модели мембран, находящихся под действием нормальных сил, действующих сверху и снизу. В процессе этих воздействий возникают силы натяжения, характеризующие напряжения в срединной плоскости литосферной плиты.

Таким образом, уравнение, моделирующее литосферную плиту в этом приближе-



нии, принимает вид

$$\partial_{tt}w = A^2\Delta w + g(x, y, t), \quad \Delta = (\partial_{xx} + \partial_{yy}),$$

$$A = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad g(x, y, t) = \frac{p(x, y, t)}{\rho}.$$

Здесь w — вертикальное движение мембраны, T — сила натяжения мембраны в сечении, ρ — плотность материала мембраны, $p(x, y, t)$ поперечные внешние силы, действующие на мембрану.

Граничные условия предполагают возможность изменения ее углов наклона на границе. Таким образом, граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial n} = f(\gamma),$$

где γ — граница мембраны.

В случае статической задачи или гармонических колебаний граничная задача сводится к уравнению Гельмгольца

$$\Delta w + k^2 w + g(x, y) = 0.$$

С помощью этих моделей, представляющих блоки в виде мембран, оказывается возможным измерение параметров напряжений, лежащих в касательной плоскости блоков.

При проведении исследований выяснилось, что даже для таких моделей проблема исследования напряженно-деформированного состояния среды территории с разломами оказывается достаточно сложной как теоретически, так и технически.

Для принятых моделей, породивших блочные структуры, построены все необходимые параметры для реализации модели

и построен алгоритм реализации. В частности, с помощью ГИС-технологий построен комплекс известных разломов территории Краснодарского края, описанных уравнениями ломанных.

Дальнейшее исследование блочной структуры использует уже отработанные шаги по введению топологии, двумерных многообразий с краем, их касательных расслоений, по введению локальных систем координат, внешних форм, отвечающих граничным задачам в каждом блоке, построению функциональных, а затем в результате факторизации — псевдодифференциальных уравнений и представлений решений в каждом блоке.

В качестве примера на рисунке приводится касательное расслоение границы треугольного в плане блока.

Функциональное уравнение и внешние формы для него даны соотношениями

$$K_1\Phi_1 = \int_{\partial\Omega_1} P_1 dx_1^{(1)} + \int_{\partial\Omega_2} P_2 dx_1^{(2)} + \int_{\partial\Omega_3} P_3 dx_1^{(3)},$$

где P_1, P_2, P_3 — внешние формы:

$$P_1(\alpha_1, \alpha_2, x_1, x_2) = e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \times \left[C_3 i \alpha_2^{(1)} \phi_1 + C_2 i \alpha_1^{(1)} \phi_1 - C_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \right],$$

$$P_2(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = e^{i[(\alpha_1^{(1)} \eta_1 + \alpha_2^{(1)} \eta_4) x_1^{(2)} + (\alpha_2^{(1)} \eta_2 + \alpha_1^{(1)} \eta_3) x_2^{(2)}]} \times \left[S_1 \alpha_1^{(1)} \varphi_2 + S_2 \alpha_2^{(1)} \varphi_2 + S_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2^{(2)}} \right],$$

$$P_3(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = \\ = e^{i[(\alpha_1^{(1)}\eta_1 + \alpha_2^{(1)}\eta_4)x_1^{(3)} + (\alpha_2^{(1)}\eta_2 + \alpha_1^{(1)}\eta_3)x_2^{(3)}]} \times \\ \times \left[S_1\alpha_1^{(1)}\varphi_2 + S_2\alpha_2^{(1)}\varphi_2 + S_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2^{(3)}} \right].$$

Полученные соотношения содержат параметры, связанные с формулами перехода между системами координат, — карты многообразия.

Во внимание приняты все 46 разломов с учетом ломаных составляющих. Окончательные расчеты требуют введение ряда параметров среды в каждом блоке. Наполнение модели данными позволит осуществить ее полную компьютерную реализацию.

Литература

1. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Федоренко А. Г., Рядчиков И. В., Лозовой В. В., Горшкова Е. М. О блочных элементах в моделировании сложных структур и объектов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. № 1, С. 13–25.
2. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427. № 2. С. 183–186.
3. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. О проблеме блочных структур академика М. А. Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. № 4. С. 480–485.
4. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. О пирамидальном блочном элементе // ДАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 30–34.
5. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. О блочном элементе в форме произвольной треугольной пирамиды // ДАН. 2009. Т. 429. № 6. С. 758–761.
6. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О многогранных и выпуклых блочных элементах // ДАН. 2010. Т. 432. № 5. С. 620–623.
7. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Блочные элементы со сферической границей // ДАН. 2010. Т. 434. № 5. С. 616–619.
8. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О методе блочного элемента // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 3. С. 173–181.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений в частных производных, краевая задача, блочная структура, дифференциальный метод факторизации, разломы, напряжения

Статья поступила 12 августа 2010 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Горшкова Е. М., Кашков Е. В., Плужник А. В., Федоренко А. Г., Шишкин А. А., 2010