УДК 518.8:53

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ВНУТРИ КАПИЛЛЯРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Лесев В. Н.[1]

LAMINAR MOTION MODELING OF THE LIQUID INSIDE THE CAPILLARY IN A MAGNETIC FIELD

Lesev V. N.

The most general regimes of kinetics of the capillary soaking in under the magnetic field have been studied within the model of the laminar motion of the conductive liquid. The non-linear equation of liquid motion in the capillary has been studied by the modified Fourier method. There has been performed comparative analysis of the kinetics regimes of capillary soaking in and their correspondence to the experimental data.

Keywords: capillary, magnetic field, model, kinetics, numerical experiment

Многие природные и технологические процессы связаны с движением жидких систем по капиллярам. Среди подобных процессов наибольший интерес вызывают исследования, направленные на изучение гидромеханики крови, лимфы, а также дисперсных систем, к которым относятся нефть и нефтепродукты [1–5]. При этом методы, использующиеся для исследования подобных систем, в значительной степени отличаются от методов исследования движения жидких фаз со свободными границами [6–8] и представляются весьма трудоемкими при их реализации на практике. Многие процессы, связанные с ламинарным движением жидкостей в различных полях (гравитационных, электрических, магнитных, температурных и др.) остаются мало исследованными и в настоящее время. В основном это связано с тем, что межфазные эффекты весьма чувствительны к примесям и физическому состоянию поверхности, различным неровностям и шероховатостям, что не всегда можно учесть в методике эксперимента.

Особую значимость в таких условиях приобретают математические модели кинетики жидкости в капилляре и микроциркулярной ячейке, позволяющие одновременно учитывать большое число факторов, включая и внешние. При этом исследование влияния различных внешних воздействий на процессы смачивания, растекания и движения жидкости открывает новые возможности управления этими процессами, а развитие современных технологий делает исследования в данной области ещё более актуальными.

1. Вывод уравнения капиллярного впитывания

Хорошо известно [9], что решение многих практически важных прикладных задач связано с решением нелинейного уравнения движения жидкости в капилляре

$$h\frac{d^2h}{dt^2}+\left(\frac{dh}{dt}\right)^2+\frac{8\eta}{r^2\rho}h\frac{dh}{dt}= =\frac{2\sigma\cos\theta}{r\rho}-gh\sin\varphi, \quad (1.1)$$

где h — перемещение жидкости в капилляре, ρ, m — плотность и масса жидкости, φ — угол наклона цилиндрического капилляра радиуса r к горизонту, θ — краевой угол смачивания, g – ускорение свободного падения, η, σ — вязкость и поверхностное натяжение.

Решение нелинейного уравнения (1.1) находится лишь приближенными аналитическими или численными методами. Для вертикального капилляра ($\varphi = 90°$) методом возмущения по малому параметру в первом приближении решение уравнения (1.1) приведено в [10]. Однако, практическое его ис-

[1]Лесев Вадим Николаевич, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова; e-mail: lvn_kbsu@mail.ru

пользование создает большие неудобства из-за представления решения в неявном виде.

Рассмотрим прямолинейное изотермическое течение в магнитном поле вязкой проводящей жидкости внутри цилиндрического капилляра, расположенного под углом φ к горизонту. Ось Ox направим вдоль прямолинейного течения смачивающейся жидкости.

В предположении прямолинейного течения в неизменном поперечном магнитном поле равнодействующая сил $F_x^{(i)}$, действующих на движущуюся жидкость в капилляре, на основании закона сохранения импульса определяется равенством

$$\sum_i F_x^{(i)} = \frac{dm}{dt}\frac{dh}{dt} + m\frac{d^2h}{dt^2} = \\ = \pi\rho r^2\left[\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + U\frac{d^2h}{dt^2}\right]. \quad (1.2)$$

Сила вязкого сопротивления, действующая на жидкость в капилляре при ламинарном режиме, по формуле Пуазейля равна

$$F_x^{(1)} = -8\pi\eta h\frac{dh}{dt}. \quad (1.3)$$

На столб жидкости в капилляре длиной h действует также составляющая силы тяжести, равная

$$F_x^{(2)} = -\pi\rho g r^2 h\sin\varphi. \quad (1.4)$$

Поверхностная движущая сила растекания, связанная с изменением свободной энергии системы ΔW_S, равна

$$F_x^{(3)} = -\frac{\Delta W_S}{h} = -\frac{\Delta S_{12}}{h}\left(\sigma_{12} - \sigma_{13}\right) = \\ = 2\pi r\sigma_{12}\left(\cos\theta_S - \cos\theta\right), \quad (1.5)$$

где S_{ij} — площадь поверхности раздела между i-й и j-й фазами, σ_{ij} — межфазные поверхностные натяжения; индексам $i, j = 1$ соответствует твердое тело, $i, j = 2$ — жидкость, а $i, j = 3$ — окружающая среда, θ_S — равновесный краевой угол, $\theta \leqslant \pi/2$.

Рассматривая смачивание как процесс полимолекулярной адсорбции жидкости на поверхности твердого тела, запишем выражение для поверхностной движущей силы (1.5) в виде

$$F_x^{(3)} = 2\pi r\sigma_{12}\cos\theta_S\left(1 - \beta e^{-\frac{t}{t_\theta}}\right), \quad (1.6)$$

где параметр

$$\beta = 1 - \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta_S},$$

а t_θ — время релаксации краевого угла θ.

С учетом принятых обозначений имеем

$$\beta = 1 \text{ при } \theta_0 = \pi/2 \text{ и } \beta = 0 \text{ при } \theta_0 = \theta_S.$$

На движущийся в магнитном поле столб проводящей жидкости в капилляре действует электромагнитная сила [11], определяемая равенством

$$F_x^{(4)} = \frac{1}{\rho}mf_x = \pi h r^2\frac{1}{c}\left[\mathbf{j}\times\mathbf{H}\right]_x = \\ = -\pi r^2\gamma\left(\frac{H_z}{c}\right)^2\frac{dh}{dt}. \quad (1.7)$$

Здесь f_x — объемная плотность пондеромоторных сил, γ — удельная проводимость, c — скорость света.

Из (1.2), с учетом (1.3), (1.4), (1.6) и (1.7), получим уравнение капиллярного впитывания проводящей жидкости в магнитном поле

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{1}{h}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \left[\frac{8\eta}{\rho r^2} + \frac{\gamma}{\rho}\left(\frac{H_z}{c}\right)^2\right]\frac{dh}{dt} + \\ + g\sin\varphi = \frac{2\sigma_{12}}{h\rho r}\cos\theta_s\left(1 - \beta e^{-\frac{t}{t_\theta}}\right). \quad (1.8)$$

Отметим, что уравнение, аналогичное (1.8), было получено в [9] на основе уравнений Навье-Стокса без учета действия электромагнитных сил и релаксации краевого угла смачивания.

2. Постановка задачи в безразмерных переменных

Применяя модифицированный метод Фурье [12], можно получить приближенное аналитическое решение нелинейного уравнения (1.8) с соответствующими начальными условиями.

Для этого, переходя к безразмерным переменным, запишем уравнение (1.8) в виде

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(x^2\right) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\tau}\left(x^2\right) + \frac{2}{\varepsilon}x = \\ = \frac{2}{\varepsilon}\left[1 - \beta\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\theta}\right)\right], \quad (2.1)$$

где

$$x = \frac{h}{h_M}, \quad \tau = \chi t, \quad \chi = \frac{r^3\left(\rho g\sin\varphi\right)^2}{16\eta_{ef}\sigma_{12}\cos\theta_S},$$

$$\omega = \frac{1}{\chi t_\theta}, \quad \varepsilon = \frac{r^5\rho^3 g^2}{128\eta_{ef}^2\sigma_{23}\cos\theta},$$

$$\eta_{ef} = 1 + Ha^2/8,$$

$h_M = \dfrac{2\sigma_{12}\cos\theta_S}{r\rho g\sin\varphi}$ — максимальное перемещение жидкости в капилляре, $Ha = \dfrac{rH_Z}{c}\sqrt{\dfrac{\gamma}{\eta}}$ — число Гартмана.

Уравнение (2.1), дополненное начальными условиями

$$x|_{\tau=0} = 0, \qquad \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{2.2}$$

представляет собой задачу, моделирующую исследуемый физический процесс.

3. Исследование математической модели

Представим функции $x(\tau)$ и $x^2(\tau)$, удовлетворяющие условию Дирихле на отрезке $[0,1]$, в виде рядов

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin(\pi n x), \\ x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(\pi n x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\alpha_n = 2\int_0^1 x\sin(\pi n x)\,dx = -\frac{2}{\pi n}\cos(\pi n),$$

$$\beta_n = 2\int_0^1 x^2\sin(\pi n x)\,dx = \\ = \frac{2}{\pi n}\left\{\cos(\pi n)\left[\frac{2}{(\pi n)^2} - 1\right] - \frac{2}{(\pi n)^2}\right\}.$$

С учетом (3.1) уравнение (2.1) запишем в виде

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\gamma_n\sin(\pi n x)\right] + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\tau}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\gamma_n\sin(\pi n x)\right] + \\ + \frac{2}{\varepsilon}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin(\pi n x)\right] = \\ = \frac{2}{\varepsilon}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left[1 - \beta\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_\theta}\right)\right]\right\}, \tag{3.2}$$

где

$$\gamma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 - \frac{2}{(\pi n)^2}\left[1 - \frac{1}{\cos(\pi n)}\right], \quad \forall\, n \in N.$$

Принимая обозначения

$$x(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau), \quad u_n(\tau) = \alpha_n\sin(\pi n x),$$

с учетом (2.2), редуцируем (3.2) к задаче Коши

$$L[u_n] \equiv \frac{d^2u_n}{d\tau^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{du_n}{d\tau} + \frac{2}{\varepsilon\gamma_n}u_n = \\ = \frac{2(1-\beta)}{\gamma_n(1+n)n}, \quad \forall n \in \mathrm{N}, \tag{3.3}$$

$$u_n|_{\tau=0} = 0, \quad \left.\frac{du_n}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{n(n+1)\sqrt{\varepsilon}}. \tag{3.4}$$

Уравнения (3.3) относительно неизвестных функций $u_n(\tau)$ являются линейными, а их характеристические уравнения

$$k^2 + \frac{1}{\varepsilon}k + \frac{2}{\varepsilon\gamma_n} = 0, \quad \forall n \in \mathrm{N},$$

имеют корни

$$k_n^{(1)} = -\frac{1}{2\varepsilon}\left(1 - \sqrt{D_n}\right),$$

$$k_n^{(2)} = -\frac{1}{2\varepsilon}\left(1 + \sqrt{D_n}\right),$$

где $D_n = 1 - \frac{8\varepsilon}{\gamma_n}$.

С другой стороны, из (3.3) видно, что сопротивление среды характеризуется величиной $-\frac{1}{\varepsilon}\frac{du_n}{d\tau}$, а возмущающая сила убывает со временем по экспоненциальному закону.

Найдем решение (3.3), (3.4) для случаев $D_n > 0$ и $D_n < 0$ при $\tau_\theta \neq 2\varepsilon\big/\left(1+\sqrt{D_n}\right)$, $\forall n \in \mathrm{N}$, так как эти требования соответствуют двум наиболее характерным режимам протекания исследуемого процесса.

Режим 1. Требования $D_n > 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$ соответствуют случаю, когда сопротивление среды велико и выполняются при значениях параметра системы $\varepsilon < \gamma_1/8 \approx 0.0743391$.

Решение задачи (3.3), (3.4) при этом имеет вид

$$u_n(\tau) = \frac{1}{n(n+1)} - e^{-\frac{\tau}{2\varepsilon}}\left(c_n^{(1)} e^{\frac{\sqrt{D_n}}{2\varepsilon}\tau} + c_n^{(2)} e^{-\frac{\sqrt{D_n}}{2\varepsilon}\tau}\right) - \frac{\beta B_n}{n(n+1)} e^{-\frac{\tau}{\tau_\theta}}, \quad \forall\, n \in \mathrm{N}, \quad (3.5)$$

где

$$c_n^{(i)} = -\Delta_n^{(i)}\Big/\Delta_n, \quad i = 1,2,$$

$$\Delta_n = -\sqrt{D_n}\Big/(2\varepsilon),$$

$$\Delta_n^{(1)} = -\left(b_n^{(1)} k_n^{(2)} - b_n^{(2)}\right),$$

$$\Delta_n^{(2)} = -\left(b_n^{(2)} - b_n^{(1)} k_n^{(1)}\right),$$

$$b_n^{(1)} = \frac{\beta B_n - 1}{n(n+1)},$$

$$b_n^{(2)} = \frac{1}{n(n+1)}\left[\frac{\beta}{\tau_\theta} B_n - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right],$$

$$B_n = \frac{2\tau_\theta^2}{2\tau_\theta^2 - \gamma_n \tau_\theta + \varepsilon\gamma_n}.$$

Принимая во внимание принятые выше обозначения, на основании (3.5) окончательно получим выражение для кинетики капиллярного впитывания проводящей жидкости в магнитном поле в виде

$$x(\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{2\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n^{(1)} e^{\frac{\sqrt{D_n}}{2\varepsilon}\tau} + c_n^{(2)} e^{-\frac{\sqrt{D_n}}{2\varepsilon}\tau}\right) - \beta e^{-\frac{\tau}{\tau_\theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n(n+1)}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что движение жидкости апериодичное и не имеет колебательного характера.

Режим 2. Требования $D_n < 0$, $\forall n \in \mathrm{N}$ соответствуют случаю, когда сопротивление среды невелико и выполняются при значениях параметра системы $\varepsilon > \gamma_2/8 = 0,125$.

Решение задачи (3.3), (3.4) в указанном случае имеет вид

$$u_n(\tau) = \frac{1}{n(n+1)} + e^{-\frac{\tau}{2\varepsilon}} A_n \sin(w_n\tau + \varphi_n) - \frac{\beta B_n}{n(n+1)} e^{-\frac{\tau}{\tau_\theta}}, \quad \forall\, n \in \mathrm{N}, \quad (3.7)$$

где

$$A_n = \sqrt{\left(c_n^{(3)}\right)^2 + \left(c_n^{(4)}\right)^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{c_n^{(3)}}{c_n^{(4)}},$$

$$w_n = \sqrt{-D_n}\Big/(2\varepsilon),$$

$$c_n^{(3)} = b_n^{(1)}, \quad c_n^{(4)} = \frac{1}{w_n}\left[\frac{1}{2\varepsilon} b_n^{(1)} - b_n^{(2)}\right].$$

Согласно (3.7) решения соответствующих (3.3) однородных уравнений представляют собой уравнения колебания, амплитуда которых $A_n e^{-\frac{\tau}{2\varepsilon}}$ зависит от времени, причем $A_n e^{-\frac{\tau}{2\varepsilon}} \to 0$ при $\tau \to \infty$. При этом период затухания $T = 2\pi/w_n$, где w_n — частота колебания, φ_n — начальная фаза колебания.

С учетом принятых выше обозначений, на основании (3.7) окончательно получим выражение для кинетики капиллярного впитывания проводящей жидкости в магнитном поле в виде

$$x(\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{2\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(w_n\tau + \varphi_n) - \beta e^{-\frac{\tau}{\tau_\theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n(n+1)}. \quad (3.8)$$

На основе предустановленных результатов проведен вычислительный эксперимент по расчету кинетики капиллярного впитывания дистиллированной воды в магнитном поле, результаты которого приведены на рис. 1.

Кинетика капиллярного впитывания, соответствующая первому и второму режимам, рассчитывалась при следующих значениях безразмерных параметров $\varepsilon = 0,03671$, На = 3,27 и $\varepsilon = 0,17407$, На = 7,27 соответственно, $\beta = 0,5$, $\tau_\theta = 3$, а безразмерный шаг по времени был равен 0,01. Суммирование рядов проводилось до значения $n = 50$, что позволило производить расчеты с точностью до 10^{-5}.

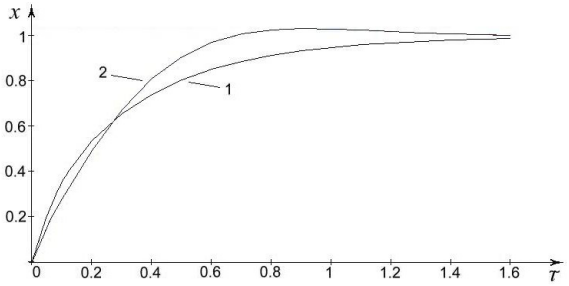


Рис. 1. Кинетика капиллярного впитывания дистиллированной воды в магнитном поле: *1* — первый режим, *2* — второй режим

Заключение

Анализ полученных решений позволяет утверждать, что при значениях параметра системы $0,0743391 \leqslant \varepsilon \leqslant 0,125$ имеет место неустановившийся переходный режим капиллярного впитывания, а с увеличением напряженности внешнего магнитного поля кинетика капиллярного впитывания в рассмотренных случаях замедляется. Такое движение можно интерпретировать как движение жидкости с эффективной вязкостью $\eta_e = \eta\left(1 + Ha^2/8\right)$.

Расчеты, проведенные на основе полученных решений (3.6) и (3.8) показывают, что они адекватно описывают наиболее характерные режимы протекания моделируемого процесса. В отсутствии внешнего магнитного поля, т. е. когда $Ha \to 0$, кинетические кривые переходят в хорошо известные кривые Уошборна.

Литература

1. *Ванчиков В.Ц.* Течение вязкой жидкости в цилиндрических капиллярах // Инженерная физика. 2005. № 2. С. 30–33.
2. *Волков В.И., Козлов Д.Ю., Кирколуп Е.Р.* Исследование динамики движения жидкости по капилляру // Известия Алтайского государственного университета. 2007. № 1. С. 100–104.
3. *Консейсао А.А., Самойлов Н.А.* Исследование капиллярного подъема нефти и нефтепродуктов в сорбенте “DULROMABSORB” // Башкирский химический журнал. 2007. Т. 14. № 4. С. 66–69.
4. *Шабрыкина Н.С., Висталин Н.Н., Глачаев А.Г.* Моделирование влияния формы кровеносного капилляра на фильтрационно-реабсорбционные процессы // Российский журнал биомеханики. 2004. Т. 8. № 1. С. 67–75.
5. *Gessaghia V.C., Raschi M.A., Larreteguy A.E., Perazzo C.A.* Influence of arterial geometry on a model for growth rate of atheromas // Journal of Physics: Conference Series. 2007. V. 90. 012046, P. 1–8.
6. *Канчукоев В.З., Карамурзов Б.С., Лесев В.Н.* Динамика проводящей капли на твердой поверхности в электромагнитном поле // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 3. С. 33–39.
7. *Лесев В.Н.* Динамика профиля поверхности малой капли свинца под действием температурного поля // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16. В. 3. С. 537–539.
8. *Лесев В.Н., Созаев В.А.* Исследование задачи о растекании жидкой капли по горизонтальной поверхности // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2010. № 3. С. 28–31.
9. *Порхаев А.П.* Кинетика впитывания жидкости элементарными капиллярами и пористыми материалами // Коллоидный журнал. 1949. Т. 11. № 15. С. 346–353.
10. *Мошинский А.И.* Об учете инерции при движении жидкости в капиллярах // Коллоидный журнал. 1984. Т. 46. № 2. С. 279–283.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1982. 621 с.
12. *Сурков Г.А.* К вопросу о нестационарном лучистом взаимодействии твердых тел // Инженерно-физический журнал. 1980. Т. 38. № 2. С. 286–289.

Ключевые слова: капилляр, магнитное поле, модель, кинетика, вычислительный эксперимент

Статья поступила 15 сентября 2010 г.
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик
© Лесев В. Н., 2010