УДК 539.3; 548.735.6 : 552.112

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАСЧЕТУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМЕ «МЕТАЛЛ–ДИЭЛЕКТРИК–МЕТАЛЛ»

***Селина Н. В.*[1], *Векшин М. М.*[2], *Тумаев Е. Н.*[3], *Яковенко Н. А.*[4]**

ANALYTICAL APPROACH TO THE CALCULATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS IN THE "METAL–DIELECTRIC–METAL" SYSTEM

Selina N. V., Vekshin M. M., Tumayev E. N., Yakovenko N. A.

The article proposes an analytical method of calculus of the fields created by the electromagnetic wave in the flat plasmonic sub-micron waveguide. The proposed method allows calculation of field distribution in the three-layered medium without boundary "matching" of solutions.

Keywords: electromagnetic field, waveguide, plasmons, Maxwell equations, analytic solution

Введение

В настоящее время имеется необходимость в создании элементов быстрой обработки и передачи данных. Одним из таких устройств является элемент на поверхностных локализованных плазмонах [1,2], в частности металлодиэлектрический плазмонный волновод. Большое внимание уделяется непосредственно самим плазмонным волноводам, из которых наиболее перспективными представляются полосковые металлические линии, которые представляют собой две сверхтонкие полоски металла, разделенные наноразмерной воздушной щелью шириной d, расположенные на диэлектрической подложке (рис. 1).

В обычных полосковых волноводах, размеры которых сопоставимы с длиной волны передаваемого по ним электромагнитного излучения λ, локализация мод в поперечном направлении невелика. В наноразмерных плазмонных волноводах, представляющих собой систему «металл–диэлектрик–металл», для которых $d \ll \lambda$, возможна суперлокализация плазмонов в поперечном направлении при достаточно большой длине распространения, что невозможно сделать с помощью обычных диэлектрических волноводов.

Теоретическое исследование распространения электромагнитных волн в плазмонных волноводах связано с решением уравнений Максвелла в системе «металл–диэлектрик–металл». Существуют численные методы решения этой задачи [3] и теоретические её исследования с применением «сшивки» (использования граничных условий) решений уравнений Максвелла на границе раздела сред, а также путем аппроксимации закона дисперсии для электромагнитной волны [4]. В настоящей работе рассматривается общее решение уравнений Максвелла для указанной системы, при котором волновое уравнение записывается одновременно для всех трех областей, изображенных на рис. 1. Преимущество полученного в настоящей работе общего решения состоит в том, что оно дает более разнообразные информационные выводы, недоступные при численном анализе, который проводится для конкретной конструкции волновода. Вследствие этого, по-

[1]Селина Наталья Викторовна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник кафедры оптоэлектроники Кубанского государственного университета; e-mail: selina_natalia@mail.ru

[2]Векшин Михаил Михайлович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры оптоэлектроники Кубанского государственного университета; e-mail: vekshin@phys.kubsu.ru

[3]Тумаев Евгений Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физики и информационных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: tumayev@phys.kubs.ru

[4]Яковенко Николай Андреевич, д-р техн. наук, профессор кафедры оптоэлектроники Кубанского государственного университета; e-mail: dean@phys.kubsu.ru

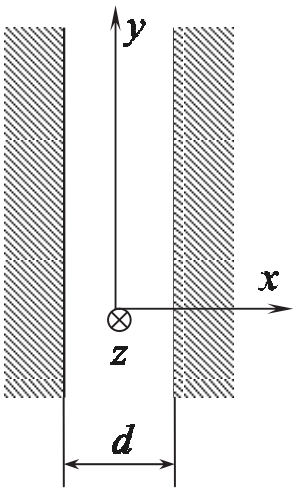


Рис. 1. Схема конструкции оптического плазмонного волновода – щелевая линия шириной d в металле

лученное в настоящей работе решение уравнений Максвелла обладает большой общностью, позволяя рассматривать самые разнообразные конструкции плазмонных волноводов.

1. Теоретическое рассмотрение задачи

Задача о плазмонных колебаниях в полой щели, ограниченной двумя полупространствами, заполненными металлом, предполагает решение уравнений Максвелла с целью определения электрических и магнитных полей в указанных областях.

В традиционном подходе для того чтобы получить согласованное распределение полей в металлических и диэлектрической областях щели, необходимо «сшить» три решения уравнений Максвелла в этих областях, записывая условия непрерывности для тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей, как это сделано в [1, 2]. Мы поставили иную задачу — найти общее для трех областей решение уравнений Максвелла и с помощью дисперсионного соотношения определить магнитное поле в области щели. Полученное решение будет автоматически удовлетворять условию непрерывности для тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей.

С целью решения поставленной задачи рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны с частотой ω в неоднородной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r)$, зависящей от координат $r = (x, y, z)$. Из уравнений Максвелла для напряженностей электрического поля E и магнитного поля H

$$\operatorname{rot} E = \frac{i\omega}{c} H, \quad \operatorname{rot} H = -i\varepsilon \frac{\omega}{c} E$$

получаем, после исключения напряженности магнитного поля, следующее уравнение

$$\Delta E - \operatorname{grad}(\operatorname{div} E) + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} E = 0,$$

где символом Δ обозначен оператор Лапласа. Исключение напряженности электрического поля из уравнений Максвелла приводит к аналогичному уравнению

$$\Delta H + \frac{1}{\varepsilon} [\operatorname{grad} \varepsilon \times \operatorname{rot} H] + \varepsilon \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} H = 0,$$

где через $[\operatorname{grad} \varepsilon \times \operatorname{rot} H]$ обозначено векторное произведение соответствующих векторов.

Для рассматриваемой здесь задачи распространения плоской электромагнитной волны в щелевой линии напряженности E и H осциллируют лишь в направлении щели, вдоль которого выберем ось Oy. Амплитуда волны при таком выборе системы координат изменяется только в плоскости Oxz. Далее, ввиду однородности пространства вдоль оси Oz, можно считать, что зависимость от z определяется множителем $\exp(i\beta z)$ с постоянным β. Определенная таким образом волна будет волной TM-поляризации [1], в которой напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ направлена вдоль оси Oy, а вектор напряженности электрического поля E лежит в плоскости распространения Oxz.

Волновое уравнение, описывающее распространение такой волны, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\left(\frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}-\frac{\beta^2}{\varepsilon}\right)H=0.$$

Найдем общее решение этого уравнения. Разделим обе части уравнения на H, добавим и вычтем в правой части уравнения член $\frac{\varepsilon}{H^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2$, введем обозначение

$$\frac{1}{\varepsilon H}\frac{\partial H}{\partial x}=R\left(x\right).$$

Уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}R\left(x\right)+\varepsilon\left(x\right)R^2\left(x\right)=-\left(\frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2}-\frac{\beta^2}{\varepsilon\left(x\right)}\right).$$

Представим диэлектрическую проницаемость диэлектрика $\varepsilon\left(x\right)$ в виде суммы $\varepsilon_0+\Delta\varepsilon\left(x\right)$, где ε_0 — диэлектрическая проницаемость металла. Аналогично величину $1/\varepsilon$ представим в виде разности

$$\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon_0}-\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Проводя несложные преобразования, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon_0 R\left(x\right)/\left(\left(\varepsilon_0 R\right)^2(x)+r^2\right)=$$
$$=-1-\left(\frac{\beta^2}{\varepsilon}+\varepsilon_0 R^2(x)\right)\frac{\Delta\varepsilon(x)}{(\varepsilon_0 R)^2(x)+r^2},$$

где $r=\sqrt{\varepsilon_0\omega^2/c^2-\beta^2}$.

После интегрирования обеих частей этого уравнения получаем

$$\operatorname{arctg}\left(\varepsilon_0 R\left(x\right)/r\right)=-\Phi\left(x\right),$$

где

$$\Phi\left(x\right)=r\left(x+\psi\left(x\right)\right),$$

$$\psi\left(x\right)=\int\frac{\beta^2/\varepsilon+\left(\varepsilon_0 R\left(x\right)\right)^2/\varepsilon_0}{\left(\varepsilon_0 R\left(x\right)\right)^2+r^2}\Delta\varepsilon dx.$$

Тогда

$$R(x)=-\frac{1}{\varepsilon_0}r\operatorname{tg}\Phi,$$

и искомая напряженность магнитного поля $H\left(x\right)$ равна

$$H\left(x\right)=H_0\exp\left(-r\int\frac{\varepsilon\left(x\right)}{\varepsilon_0}\operatorname{tg}\Phi dx\right). \quad (1.1)$$

Если ε не зависит от x, то выражение (1.1) переходит в решение волнового уравнения в однородной среде $H\left(x\right)=H_0\cos rx$.

Преобразуем второе слагаемое, входящее в величину $\Phi\left(x\right)$, записав выражение для напряженности магнитного поля (1.1) в следующей форме

$$H(x)=$$
$$=H_0\exp\left(-\int\frac{\varepsilon\left(x\right)}{\varepsilon_0}r\operatorname{tg}\Psi\left(x\right)dx\right), \quad (1.2)$$

где

$$\Psi\left(x\right)=r\int\frac{\varepsilon\left(x'\right)}{\varepsilon_0}dx'+$$
$$+r\int\left(\frac{\beta^2\varepsilon_0}{r^2\varepsilon\left(x'\right)}-1\right)\frac{\Delta\varepsilon\left(x'\right)}{\varepsilon_0\left(1+tg^2\Phi\left(x'\right)\right)}dx'.$$

Замечая, что выражение

$$r\frac{\varepsilon\left(x'\right)}{\varepsilon_0}dx'+$$
$$+r\left(\frac{\beta^2\varepsilon_0}{r^2\varepsilon\left(x'\right)}-1\right)\frac{\Delta\varepsilon\left(x'\right)}{\varepsilon_0\left(1+tg^2\Phi\left(x'\right)\right)}dx'$$

представляет собой дифференциал выражения под знаком тангенса в (1.2), вычтем и прибавим к первому множителю в интеграле в экспоненте выражение

$$r\left(\frac{\beta^2\varepsilon_0}{r^2\varepsilon\left(x'\right)}-1\right)\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0\left(1+tg^2\Phi\left(x'\right)\right)}dx',$$

и, производя интегрирование в (1.2), получаем

$$H\left(x\right)=H_0\cos\Phi\times$$
$$\times\exp\left(r\int\frac{\Delta\varepsilon\left(\frac{\varepsilon_0\beta^2}{\varepsilon r^2}-1\right)tg\Phi}{\varepsilon_0\left(1+tg^2\Phi\right)}dx\right). \quad (1.3)$$

Для удобства расчетов введенная выше величина Φ, которую обозначим далее через $f\left(x\right)$, может быть преобразована к виду

$$f(x)=rx+\frac{\beta^2}{r}\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\Delta x-$$
$$-r\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\varepsilon_0\beta^2}{\varepsilon r^2}-1\right)\sin^2\left(f(x)\right)\frac{\Delta\varepsilon dx}{\varepsilon_0}.$$

Вводя параметр

$$r_1=\sqrt{\varepsilon\omega^2/c^2-\beta^2},$$

запишем второе слагаемое в выражении для $f(x)$ в виде

$$\frac{\beta^2}{r}\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{r_1^2}{\varepsilon r} - \frac{r}{\varepsilon_0}.$$

В области металла приведенное выше выражение для $f(x)$ может быть записано в виде

$$f(x) = \frac{rd}{2} + \frac{r_1^2}{\varepsilon r}\left(x - \frac{d}{2}\right) - \\ - r\int\limits_{d/2}^{x}\left(\frac{\varepsilon_0\beta^2}{\varepsilon r^2} - 1\right)\sin^2\left(f(x')\right)\frac{\Delta\varepsilon dx'}{\varepsilon_0}.$$

Обозначим

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\left(\frac{\beta^2\varepsilon_0}{r^2\varepsilon} - 1\right)r = a,$$

тогда

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{r_1^2}{\varepsilon r} - a\sin^2\left(f(x)\right).$$

Интеграл в экспоненте в (1.3) преобразуется к виду

$$\int\limits_{d/2}^{x}\frac{a\,\mathrm{tg}\,\Phi}{(1+\mathrm{tg}^2\,\Phi)}dx' = a\int\limits_{rd/2}^{f(x)}\frac{\sin(y')\cos(y')dy'}{r_1^2/r\varepsilon - a\sin^2(y')},$$

он равен

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{r_1^2/r\varepsilon - a\sin^2(rd/2)}{r_1^2/r\varepsilon - a\sin^2(f(x))}\right|,$$

где d — ширина щели.

Выразим $f(x)$ через x:

$$f(x) - \frac{rd}{2} = \frac{r_1^2}{r\varepsilon}\left(x - \frac{d}{2}\right) - \int\limits_{y_0}^{y}\frac{\sin(y')\,dy'}{g - \sin^2(y')},$$

где $g = r_1^2/ar\varepsilon$ и $y_0 = rd/2$, $y = f(x)$. Вычисляя интеграл, получаем

$$\frac{r_1^2}{r\varepsilon}(|x| - d/2) = \chi\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\left(f(x)\right)/\chi\right) - \\ - \chi\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\left(rd/2\right)/\chi\right), \quad (1.4)$$

где $\chi = \sqrt{g/(g-1)}$. Тогда

$$f(x) = \mathrm{arctg}\left[\chi\,\mathrm{tg}\left(\chi\frac{r_1^2}{r\varepsilon}\left(|x| - \frac{d}{2}\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + \chi\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\chi}\,\mathrm{tg}\left(\frac{rd}{2}\right)\right)\right)\right].$$

Зависимость напряжённости магнитного поля от координаты x будет даваться выражением:

$$H(x) = \begin{cases} H_0\cos rx, & 0 \leqslant |x| \leqslant d/2, \\ H_0\cos f(x)\left|\dfrac{r_1^2/r\varepsilon - a\sin^2(rd/2)}{r_1^2/r\varepsilon - a\sin^2(f(x))}\right|^{1/2}, \\ \qquad |x| > d/2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Для того чтобы построить график зависимости квадрата напряженности магнитного поля от поперечной координаты x, необходимо знать константу продольного распространения $\beta = k_{sp}$. Эта константа определяется из дисперсионного уравнения, которое непосредственно следует из (1.1). Согласно (1.1), в диэлектрике поле определяется суммой экспонент вида $\exp(\pm irx)$. Принимая во внимание законы отражения и преломления волн на границе раздела сред с различной диэлектрической проницаемостью, определяем поле в металле вблизи границы раздела, т. е. в скин-слое, как $\exp(\pm ir_1x)$. Далее, приравнивая тангенциальные компоненты напряженностей электрического и магнитного полей на границе раздела согласно (1.1), получаем дисперсионное соотношение

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = i\frac{r}{r_1}\,\mathrm{tg}(rd/2).$$

При $rd/2 \gg 1$ дисперсионное уравнение переходит в соотношение для поверхностных плазмонов $\beta = 2r\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}}$, а уравнение (1.5) переходит в уравнение

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} H_0\cos(rx), & 0 \leqslant |x| \leqslant d/2, \\ H_0\dfrac{\exp\left(rd/2 + \frac{r_1^2}{r}(|x| - d/2)\right)}{2}, \\ \qquad |x| > d/2. \end{cases} \quad (1.6)$$

2. Численный расчет и обсуждение результатов

Проанализируем формулы (1.5), (1.6) аналитически и графически. На рис. 2–4 показаны графики зависимости напряженности магнитного поля от поперечной координаты x, построенные по формуле (1.5) со следующими параметрами: $\lambda = 1,55$ мкм, $n = 0,5591 + 2,8091i$, $0,5591 + 9,8091i$, $n = 0,5591 + 30,8091i$,

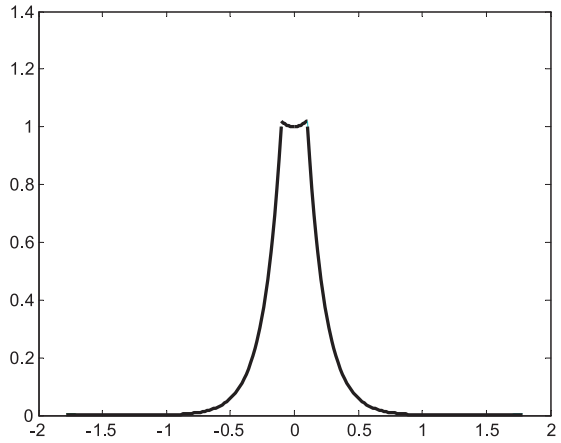


Рис. 2. График зависимости напряженности магнитного поля $H(x)$ от величины $\omega x/c$, рассчитанный по формуле (1.5) при $(\beta c/\omega)^2 = 5,1334 + 1,4165i$, $n = 0,5591 + 2,8091i$

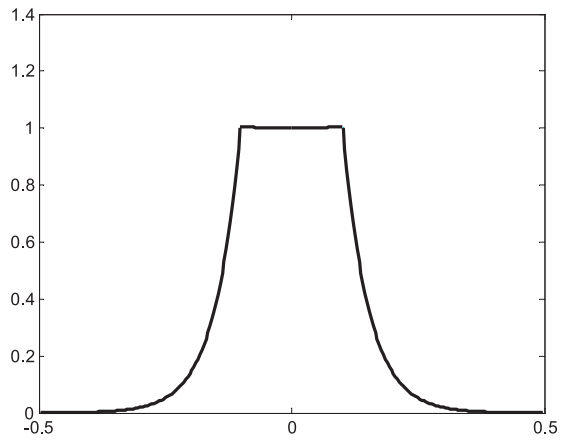


Рис. 3. График зависимости напряженности магнитного поля $H(x)$ от величины $\omega x/c$, рассчитанный по формуле (1.5) при $(\beta c/\omega)^2 = 2,017 + 0,0597i$, $n = 0,5591 + 9,8091i$

$(\beta c/\omega)^2 = 5,1334 + 1,4165i$, $2,017 + 0,0597i$ и $1,3209 + 0,0058i$ соответственно. Толщина d взята равной 100 нм.

Графики на рисунках отражают высокую степень локализации поля в диэлектрике и в металле. Для подобного приведенному на графике распределению поля в диэлектрике необходимо, чтобы в (1.5) выполнялось неравенство $\mathrm{Im}(r) \gg \mathrm{Re}(r)$. Определим соотношение диэлектрических проницаемостей диэлектрика и металла, удовлетворяющее этому критерию, для чего рассмотрим дисперсионное соотношение с учетом малости ширины щели

$$-\frac{1}{\varepsilon\alpha}\left(1-\frac{\beta^2}{k_0^2\varepsilon}\right) = \left(\frac{\beta^2}{k_0^2\varepsilon_0}-1\right)^2,$$

$$\alpha = \left(\frac{k_0 d}{2}\right)^2.$$

Из этого уравнения следует, что неравенство $\beta^2/k_0^2 \geqslant 1$ выполняется, если выполняются следующие соотношения диэлектрических проницаемостей: $|\varepsilon/\varepsilon_0| \gg 1$, и $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 > 0$.

Далее рассмотрим критерий локализации поля в металле. Для этого выразим $\cos^2 y_0$ из дисперсионного соотношения. Выражение (1.5) запишется в виде

$$H(x) = \begin{cases} H_0 \cos(rx), & 0 \leqslant |x| \leqslant d/2, \\ H_0 \cos(f(x)) \sqrt{\dfrac{2}{|1-\gamma+\gamma\cos^2 f(x)|}}, & \\ \qquad |x| > d/2, & \end{cases}$$

$$\gamma = 1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{\beta^2 - k_0^2}{k_0^2}.$$

Из этого выражения следует, что поле быстро спадает с ростом $\cos^2 f(x)$ при выполнении условия $\gamma \gg 1$. Это неравенство полностью соответствуют вышеприведенному критерию $|\varepsilon/\varepsilon_0| \gg 1$ и $\mathrm{Re}\,\varepsilon < 0$, $\mathrm{Re}\,\varepsilon_0 > 0$. Для установления скорости спада поля с ростом координаты заметим, что из условия $\mathrm{Im}(r) \gg \mathrm{Re}(r)$ для x можно найти аналогичное условие $\mathrm{Im}(f(x)) \gg \mathrm{Re}(f(x))$, поэтому $\cos f(x)$ растет с ростом координаты x.

В результате можно сделать вывод о том, что высокая степень локализации плазмонов в системе «металл–диэлектрик–металл» возможна только при выполнении условий для диэлектрических проницаемостей диэлектрика и металла: $|\varepsilon/\varepsilon_0| \gg 1$ и $\mathrm{Re}\,\varepsilon < 0$, $\mathrm{Re}\,\varepsilon_0 > 0$.

Сравним выражение (1.5) для напряженности магнитного поля с аналогичным выражением, полученным в [1, 2] путем «сшивания» решений уравнений Максвелла на границах сред. Дисперсионное соотношение и решение во внутренней области совпадают, однако решения во внешних областях расходятся. Для сравнения этих решений представим выражение для внешних областей из (1.3) в виде

$$H(x) = H_0 \cos f(x) \times \\ \times \exp\left(\frac{r_1^2}{r\varepsilon}\int \frac{\mathrm{tg}\,\Phi}{(1+tg^2\Phi)}dx\right).$$

В приграничных областях

$$f(x) - rd/2 \ll rd/2$$

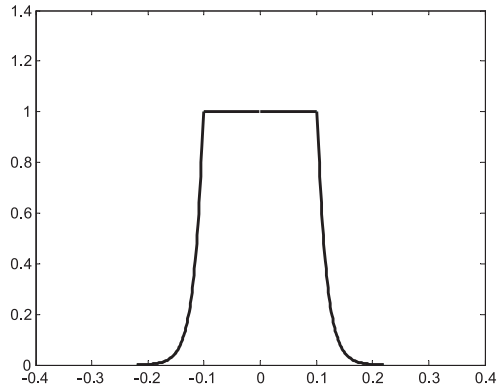


Рис. 4. График зависимости напряженности магнитного поля $H(x)$ от величины $\omega x/c$, рассчитанный по формуле (1.5) при $(\beta c/\omega)^2 = 1,3209 + 0,0058i$, $n = 0,5591 + 30,8091i$

при малой ширине щели справедливо приближение

$$H(x) = H_0 \cos f(x) \times \\ \times \exp\left(\frac{r_1^2}{r\varepsilon} \operatorname{tg}(rd/2)(x - d/2)\right).$$

Применяя дисперсионное соотношение, получаем

$$H(x) = H_0 \cos f(x) \exp(ir_1(x - d/2)),$$

что совпадает с решениями, полученными в [1, 2].

Выводы

Развитый в настоящей статье метод решения одномерного волнового уравнения позволяет описать распределение магнитного поля не только в системе «металл–диэлектрик–металл», но и в любой другой среде, состоящей из трех плоских слоев с различными диэлектрическими проницаемостями слоев единым образом, не прибегая к «сшивке» решений на границах слоев. Решение обладает достаточно большой общностью и в частном случае позволяет получить результаты, приведенные в [1,2]. Результаты расчета, использующие полученные выше формулы, с точностью до 5 % совпадают с результатами расчетов, выполненных численными методами, причем максимальное расхождение достигается в пределах скин-слоя в металле, т. е. в той области, где напряженность магнитного поля пренебрежимо мала. Преимущество предлагаемого аналитического решения перед численными методами связано с простотой вычислений, большей общностью и возможностью проанализировать влияние параметров трехслойной среды на распространение электромагнитных волн.

Литература

1. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984. 512 с.
2. *Burke J. J., Stegeman G. I., Tamir T.* Surface-polariton-like waves guided by thin, lossy metal films // Phys. Rev. B. 1986. Vol. 33. No. 8. P. 5186–5201.
3. *Векшин М. М., Яковенко Н. А.* Расчет базовых элементов плазмонной интегральной нанооптики // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 4. С. 63–69.
4. *Bozhevolnyi S. I., Nerkararyan K. V.* Analytic description of the channel plasmon polaritons // Optics Letters. 2009. Vol. 34. No. 13. P. 2039–2041.

Ключевые слова: электромагнитное поле, волновод, плазмоны, уравнения Максвелла, аналитическое решение

Статья поступила 13 сентября 2010 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Селина Н. В., Векшин М. М., Тумаев Е. Н., Яковенко Н. А., 2010