УДК 537

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИНАМИКИ ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА ПО ЕГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМУ ПОЛЮ[1]

Эпп В. Я.[2], *Янц Ю. Г.*[3]

RECONSTRUCTION OF DIPOLE DYNAMICS FROM ITS ELECTROMAGNETIC FIELD

Epp V. Ya., Yants Yu. G.

The inverse problem for an electromagnetic field produced by a dipole is solved. It is assumed that the field of an arbitrary changing dipole is known. Obtained formulae allow calculation of the position and dynamics of the dipole which produces the given field. The derived results can be used for study of oscillations of the atoms in crystal lattice, for detection of cracks in solids, — in all cases when the source dynamics of dipole radiation should be defined.
Keywords: inverse problem, electromagnetic field, dipole, charged particles

Введение

Поле, создаваемое зависящим от времени дипольным электрическим моментом, изучено довольно хорошо. Известны выражения для напряженностей электрического и магнитного поля [1]. В [2] представлено Фурье-разложение для электрического и магнитного поля диполя. Практически в любом учебнике электродинамики можно найти выражения для мощности и спектра излучения диполя. Тем не менее, ряд вопросов в этой области остается неизученным, например, задача восстановления динамики диполя по создаваемому полю — обратная задача для поля диполя.

Обращение к данной теме связано с тем, что в последнее время возникают задачи, в которых требуется найти источник электромагнитных волн, если само поле известно. Например, в Институте мониторинга климатических и экологических систем Сибирского отделения РАН с помощью регистрации электромагнитного излучения исследуются напряженно-деформированные состояния грунтов [3] и образование трещин в строительных конструкциях [4].

Другим примером является генерация электромагнитного сигнала при землетрясениях. Регистрация электромагнитных предвестников, возникающих на стадии интенсивного растрескивания в процессе разрушения земной коры, позволяет предсказать землетрясение [5].

Обратная задача для поля диполя решена в работе [6]. Полученное решение обладает особенностью в случае, если вектор напряженности магнитного поля в точке наблюдения параллелен скорости изменения этого вектора. В настоящей работе мы кратко представим решение обратной задачи в другом виде и подробно рассмотрим случай, когда $[\mathbf{H}\dot{\mathbf{H}}]$. Здесь $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля в точке наблюдения, точкой обозначена производная по времени.

1. Решение обратной задачи

Напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей, создаваемых дипольным электрическим моментом $\mathbf{p}$, определяются формулами

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r^3}\left\{\left[\mathbf{n}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}]\right] + 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{P}') - \mathbf{P}'\right\},$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (LRSS No 3558.2010.2).

[2]Эпп Владимир Яковлевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической физики Томского государственного педагогического университета; e-mail: epp@tspu.edu.ru

[3]Янц Юлия Геннадьевна, аспирантка кафедры теоретической физики Томского государственного педагогического университета; e-mail: yanz@tspu.edu.ru

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r^3}[\mathbf{nP}'],$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \mathbf{p}', \quad \mathbf{p}' = \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \quad \tau = \frac{ct}{r}, \tag{1.1}$$

$\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий дипольный момент с точкой, для которой записаны формулы для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, r — модуль радиус-вектора, c — скорость света. Штрихом обозначены производные по приведенному времени τ. Условия обратной задачи предполагают, что электромагнитное поле создается дипольным электрическим моментом. Напряженности электрического и магнитного полей известны как функции времени. Требуется найти источник этого электромагнитного поля, т. е. вектор дипольного момента $\mathbf{p}$ как функцию времени и радиус-вектор $\mathbf{r}$.

Решение обратной задачи получено в [6] и имеет следующий вид

$$\mathbf{n} = \pm\frac{[\mathbf{H}\dot{\mathbf{H}}]}{|[\mathbf{H}\dot{\mathbf{H}}]|}, \tag{1.2}$$

$$r = c\frac{(\mathbf{n}[\mathbf{HA}])}{(\mathbf{n}[\mathbf{AB}])} = c\frac{(\mathbf{n}[\mathbf{BH}])}{(\mathbf{n}[\mathbf{HA}])},$$

$$\mathbf{p}(t') = e^{-\tau}\left\{\mathbf{p}_0 + r^3\int\Big[[\mathbf{nH}_1] + \frac{1}{2}\mathbf{n}(\mathbf{nE})\Big]e^{\tau}d\tau\right\}, \tag{1.3}$$

где $\tau = ct/r$ — безразмерное время, $\mathbf{p}_0$ — произвольный постоянный вектор, $\mathbf{A} = \ddot{\mathbf{H}} - [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{E}}]$, $\mathbf{B} = \dot{\mathbf{H}} - [\mathbf{n}\dot{\mathbf{E}}]$ — известные векторы,

$$\mathbf{H_1} = \int \mathbf{H}(t)\,dt, \quad t' = t - r/c.$$

Как видно из формулы (1.2), полученное решение обладает особенностью при $[\mathbf{H}\dot{\mathbf{H}}] = 0$.

Рассмотрим другой вариант решения обратной задачи. Два вектора $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ в формуле (1.1) определяются одним вектором $\mathbf{p}$ и его производными. Следовательно, между векторами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ и их производными существует функциональная зависимость. Нетрудно проверить, что эта зависимость имеет вид:

$$\mathbf{H_2} = [\mathbf{nE_2}], \tag{1.4}$$

где

$$\mathbf{H_2} = \mathbf{H} + \frac{r}{c}\dot{\mathbf{H}} + \frac{r^2}{c^2}\ddot{\mathbf{H}}, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{E_2} = \frac{r}{c}\dot{\mathbf{E}} + \frac{r^2}{c^2}\ddot{\mathbf{E}}. \tag{1.6}$$

Таким образом, мы имеем векторное уравнение (1.4), которое позволяет, в принципе, выразить вектор $\mathbf{r}$ через производные от известных векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$. Эту задачу можно разбить на вычисление единичного вектора $\mathbf{n}$ и модуля вектора $\mathbf{r}$ из уравнения $(\mathbf{E_2H_2}) = 0$, которое является уравнением третьего порядка на r

$$\left(\frac{r}{c}\right)^3(\ddot{\mathbf{E}}\ddot{\mathbf{H}}) + \left(\frac{r}{c}\right)^2(\dot{\mathbf{E}}\ddot{\mathbf{H}} + \ddot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}) + \frac{r}{c}(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}} + \ddot{\mathbf{E}}\mathbf{H}) + (\dot{\mathbf{E}}\mathbf{H}) = 0. \tag{1.7}$$

Последнее уравнение может иметь один или три действительных корня в зависимости от вида функций $\mathbf{H}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$. В случае трех корней критерием выбора правильного решения является условие $r = \text{const}$. Уравнение (1.7) выражает связь между производными от напряженностей электрического и магнитного полей в некоторой точке пространства и расстоянием до источника. Наличие такой связи обусловлено тем, что формулы (1.1) содержат слагаемые, убывающие с расстоянием с разными степенями r. Так, в дальней (волновой) зоне преобладает слагаемое, пропорциональное второй производной по времени от вектора дипольного момента. В ближней зоне электрическое поле пропорционально дипольному моменту, а магнитное поле — производной от дипольного момента. Соответственно, в уравнении (1.7) слагаемое, пропорциональное вторым производным от напряженностей полей, содержит r^3, и чем ниже степень производной, тем ниже степень r. Таким образом, соотношение между производными по времени от напряженностей полей в некоторой точке пространства позволяет, в принципе, определить расстояние до источника.

Если известно расстояние r, то единичный вектор $\mathbf{n}$ можно найти из уравнения (1.4):

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{E_2H_2}] \pm \mathbf{E}_2\sqrt{E_2^2 - H_2^2}}{E_2^2}. \tag{1.8}$$

Знак плюс или минус выбирается так, чтобы вектор Умова–Пойнтинга образовывал острый угол с направлением $\mathbf{n}$ [6].

Чтобы вычислить вектор $\mathbf{p}$, найдем проекцию вектора $\mathbf{E}$ на плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{n}$. Для этого умножим первое из уравнений (1.1) слева и справа векторно на $\mathbf{n}$. В результате получим

$$\big[\mathbf{n}[\mathbf{En}]\big] = \frac{1}{r^3}\big[\mathbf{n}[(\mathbf{p}+\mathbf{p}'+\mathbf{p}'')\mathbf{n}]\big].$$

Подставляя выражение для $\mathbf{H}$, найдем

$$\mathbf{p}_\perp = r^3\big[\mathbf{n}([\mathbf{nE}]-\mathbf{H})\big],$$

где $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}-\mathbf{n}(\mathbf{pn})$ — проекция вектора $\mathbf{p}$ на плоскость, ортогональную $\mathbf{n}$. Параллельную вектору $\mathbf{n}$ составляющую найдем, умножая $\mathbf{E}$ скалярно на $\mathbf{n}$. Интегрируя полученное уравнение

$$(\mathbf{En}) = 2r^{-3}\big[(\mathbf{np})+(\mathbf{np}')\big]$$

по τ, имеем:

$$(\mathbf{np}) = e^{-\tau}\left[p_0 + \frac{1}{2}r^3\int(\mathbf{En})e^\tau d\tau\right].$$

Здесь p_0 — произвольная постоянная.

Таким образом, решение уравнений (1.1) относительно дипольного момента имеет вид

$$\mathbf{p} = r^3\big[\mathbf{n}([\mathbf{nE}]-\mathbf{H})\big] + \\ + \mathbf{n}e^{-\tau}\left[p_0 + \frac{1}{2}r^3\int(\mathbf{En})e^\tau d\tau\right]. \quad (1.9)$$

Можно показать, что это решение эквивалентно решению (1.3).

Заключение

Из уравнения (1.9) видно, что решение для вектора дипольного момента определено с точностью до $p_0\mathbf{n}e^{-\frac{ct}{r}}$. Это связано с тем, что уравнения для поля диполя инвариантны относительно замены $\mathbf{p}\to\mathbf{p}+p_0\mathbf{n}e^{-\frac{ct}{r}}$. Другими словами, если дипольный момент изменяется как $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0e^{-\alpha t}$, $\alpha>0$, то в направлениях $\pm\mathbf{p}_0$ на расстоянии $r=c/\alpha$ от диполя его электрическое и магнитное поля равны нулю. Указанная неопределенность решения относится только к продольной относительно $\mathbf{n}$ составляющей дипольного момента. Поперечная компонента вектора $\mathbf{p}$ определяется вполне однозначно.

Несмотря на то, что полученное решение обратной задачи является точным, при практическом использовании этих формул точность численных расчетов зависит от расстояния между наблюдателем и источником поля. Например, на больших расстояниях ($r \gg c\Delta t$, где Δt — характерное время изменения дипольного момента) поле диполя приближается к полю излучения, а именно: векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{n}$ становятся взаимно ортогональными и $E\approx H$. При этом формула (1.8) для $\mathbf{n}$ вырождается в формулу

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{E_2H_2}]}{E_2^2} = \frac{[\ddot{\mathbf{E}}\ddot{\mathbf{H}}]}{\ddot{E}^2} = \frac{[\mathbf{EH}]}{E^2}, \quad (1.10)$$

поскольку для больших r из определений (1.5) и (1.6) следует, что

$$\mathbf{H_2} = \ddot{\mathbf{H}}, \quad \mathbf{E_2} = \ddot{\mathbf{E}}.$$

В уравнении (1.7) при больших r первое слагаемое много больше остальных, а при $r\to\infty$ это уравнение обращается в тождество. Поэтому при большом расстоянии до источника поля вычисление этого расстояния становится проблемой.

Что касается вычисления динамики диполя, то формула (1.9) становится малопригодной для больших расстояний, так как

$$([\mathbf{nE}]-\mathbf{H})\to 0, \quad (\mathbf{En})\to 0$$

и мы имеем произведения очень большого числа r на малые числа. Однако формула (1.3) сохраняет свое значение. Действительно, при $r\to\infty$ слагаемое с $(\mathbf{nE})$ стремится к нулю, в то время как слагаемое с $[\mathbf{nH}_1]$, которое описывает поперечную относительно $\mathbf{n}$ составляющую дипольного момента, остается конечным. Более того, формула (1.3) упрощается в силу того, что при больших r и интегрировании в конечных пределах τ мало, и мы можем положить $e^{\pm\tau}=1$. Тогда из (1.9) следует, что

$$\mathbf{p}_\perp\left(t-\frac{r}{c}\right) = \mathbf{p_0} + rc^2\int dt\int[\mathbf{nH}]\,dt.$$

Поскольку r неизвестно, последняя формула дает динамику диполя с точностью до постоянного множителя, аддитивной константы и фазы r/c.

Таким образом, при больших расстояниях от диполя уверенно вычисляются только направление единичного вектора $\mathbf{n}$ и динамика поперечной составляющей дипольного момента.

Литература

1. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика. М.: Высшая школа, 1990. 129 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 231 с.
3. *Гордеев В. Ф., Малышков Ю. П. Шталин С. Г. и др.* Оценка напряженно-деформированного состояния горного массива по параметрам ЕИЭМПЗ // ГЕО-Сибирь-2009. Сб. мат-ов V Междунар. научн. конгресса Т. 1. Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия. Ч. 2. Новосибирск: СГГА, 2009. С. 71–75.
4. *Ласуков В. В., Фурса Т. В* Зависимость амплитуды электрического сигнала от пространственного расположения наполнителя при механическом возбуждение бетона // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 6. С. 36.
5. *Малышков Ю.П., Малышков С.Ю., Джумабаев К.Б. и др.* Способ прогноза землетрясений. Патент на изобретение № 2238575.
6. *Epp V., Janz J.* The inverse problem for the dipole field. M.: Nucl. Instr. and Meth. B (2008)

Ключевые слова: обратная задача, электромагнитное поле, диполь, заряженные частицы

Статья поступила 24 августа 2010 г.
Томский государственный педагогический университет, г. Томск