

УДК 534.134

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОРОУПРУГИХ СРЕД¹*Ватульян А. О.², Ляпин А. А.³***THE DYNAMIC THEORY OF RECIPROCITY AND FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR POROELASTIC ENVIRONMENTS**

Vatulyan A. O., Lyapin A. A.

The paper deals with the stages of the solving method for boundary problems of steady harmonic vibrations of poroelastic finite body or poroelastic layered medium with arbitrary shaped cavities or inclusions based on the method of boundary integral equations. The paper also presents a derivation of the dynamic reciprocity theory and constructed fundamental solutions for poroelastic medium.

Keywords: poroelastic, theorem of reciprocity, fundamental decisions

В настоящее время большое внимание уделяется исследованию волновых процессов в средах со сложной структурой (анизотропия, неоднородность, многокомпонентность). Одним из примеров таких сред являются пороупругие насыщенные среды.

Задачами о распространении волн в пористых насыщенных средах занимались многие отечественные и зарубежные ученые, в том числе М. А. Био, В. Н. Николаевский, В. П. Степанов, Р. И. Нигматулин, С. Коун, Ж. Нунциато, Б. П. Сибириков, О. К. Кондратьев, Н. С. Городецкая, Л. А. Игумнов и многие другие. Фундаментальные решения для пороупругой среды на основе нестационарной модели Био, в которой неизвестными являются компоненты смещений твердой фазы и давление в порах, были получены и подробно исследованы в работе [2].

Явные интегральные представления волновых полей в пористых средах для задач с простой геометрией типа слоя, полупространства были получены ранее в работах [3–7] и др. Однако интегральные представления волновых полей в пороупругих средах для задач с произвольной геометрией еще мало изучены.

В настоящей работе представлен вывод динамической теоремы взаимности и построены фундаментальные решения для модели Био в плоском случае, где неизвестными являются компоненты векторов смещений твердой и жидкой фаз в рамках установившихся гармонических колебаний

1. Постановка задачи для ограниченного тела

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω плоской области S , заполненной пороупругой средой и ограниченной гладким контуром $\gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. На Γ_1 заданы нагрузки, часть границы Γ_2 жестко закреплена (рис. 1).

Движение пороупругой среды описывается с помощью системы уравнений Био-Френкеля для режима установившихся колебаний [2]

$$\begin{cases} \sigma_{kj,j}^s - i\omega\zeta(u_k^s - u_k^f) + \\ + \omega^2(u_k^s \rho_{11} - u_k^f \rho_{12}) = 0, \\ \sigma_{,k}^f + i\omega\zeta(u_k^s - u_k^f) + \\ + \omega^2(u_k^s \rho_{12} - u_k^f \rho_{22}) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (П1596) и Южного математического института, г. Владикавказ.

²Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

³Ляпин Александр Александрович, аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: alexlpn@hotmail.com

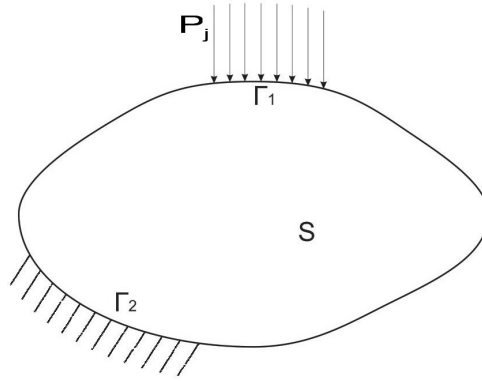


Рис. 1

Определяющие соотношения для порозовых сил для двух состояний упругой среды имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \sigma^f &= Q\varepsilon^s + R\varepsilon^f, \\ \sigma_{ij}^s &= \lambda\varepsilon^s\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}^s + Q\varepsilon^f\delta_{ij}, \\ \rho_{11} &= (1 - \varepsilon)\rho_s - \rho_{12}, \\ \rho_{22} &= \varepsilon\rho_f - \rho_{12}, \\ \rho_{12} &= \varepsilon(1 - a)\rho_f. \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{kj,j}^{s(m)} - i\omega\zeta(u_k^{s(m)} - u_k^{f(m)}) + \\ + \omega^2(u_k^{s(m)}\rho_{11} - u_k^{f(m)}\rho_{12}) = \\ = -F_k^{s(m)}, \\ \sigma_{,k}^{f(m)} + i\omega\zeta(u_k^{s(m)} - u_k^{f(m)}) + \\ + \omega^2(u_k^{s(m)}\rho_{12} - u_k^{f(m)}\rho_{22}) = \\ = -F_k^{f(m)}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$m = 1, 2.$$

Здесь ρ_s — плотность скелета, ρ_f — плотность жидкости, σ_{kj}^s — компоненты тензора напряжений в скелете, ε — объемная пористость, σ^f — след тензора напряжений в жидкости, u_k^s — компоненты вектора смещений скелета, u_k^f — компоненты тензора смещений жидкости, ζ — параметр внутреннего трения или диссипации.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{cases} \sigma_{mj}^s n_m = P_j, & (x, y) \in \Gamma_1, \\ \sigma^f = p, & (x, y) \in \Gamma_1, \\ u_i^s = 0, & (x, y) \in \Gamma_2, \\ u_i^f n_i = 0, & (x, y) \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

2. Динамическая теорема взаимности

Для решения поставленной задачи необходимо сформулировать граничные интегральные уравнения для порозупругой среды на основе динамической теоремы взаимности.

Рассмотрим движение порозупругой среды Био-Френкеля (1.1) под действием мас-

Здесь F_k^s — компоненты вектора массовых сил в скелете, F_k^f — компоненты вектора массовых сил в жидкости.

Комбинируя данные системы уравнений и интегрируя полученное выражение по плоской области S , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \int_S & \left(\sigma_{kj,j}^{s(1)} u_k^{s(2)} + \sigma_{,k}^{f(1)} u_k^{f(2)} + \right. \\ & \left. + F_m^{s(1)} u_k^{s(2)} + F_m^{f(1)} u_k^{f(2)} \right) ds = \\ & = \int_S \left(\sigma_{kj,j}^{s(2)} u_k^{s(1)} + \sigma_{,k}^{f(2)} u_k^{f(1)} + \right. \\ & \left. + F_m^{s(2)} u_k^{s(1)} + F_m^{f(2)} u_k^{f(1)} \right) ds. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Общий вид динамической теоремы взаимности для порозупругой среды запишем, используя формулу Грина

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} & \left(P_k^{s(1)} u_k^{s(2)} + \sigma^{f(1)} n_k u_k^{f(2)} \right) d\gamma + \\ & + \int_S \left(F_m^{s(1)} u_k^{s(2)} + F_m^{f(1)} u_k^{f(2)} \right) ds = \end{aligned}$$

$$= \int_{\gamma} \left(P_k^{s(2)} u_k^{s(1)} + \sigma^{f(2)} n_k u_k^{f(1)} \right) d\gamma + \int_S \left(F_m^{s(2)} u_k^{s(1)} + F_m^{f(2)} u_k^{f(1)} \right) ds, \quad (2.3)$$

где $P_k^{s(m)}$ ($m = 1, 2$) — вектор напряжений в скелете на границе среды.

3. Фундаментальные решения

Важным этапом метода граничных интегральных уравнений является формулировка фундаментальных решений для пороупругой среды.

Под фундаментальными решениями системы (1.1)–(1.2) будем понимать решения, соответствующие сосредоточенной нагрузке, приложенной в точке (ξ_1, ξ_2) .

Используя определяющие уравнения (1.2), сформируем систему уравнений Био–Френкеля (2.1) в перемещениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad} \left(\lambda + \mu \text{div} \mathbf{u}^{s(m)} + \right. \\ \quad \left. + Q \text{div} \mathbf{u}^{f(m)} \right) + \mu \Delta \mathbf{u}^{s(m)} + \\ \quad + P_1^s \mathbf{u}^{s(m)} + P_2^s \mathbf{u}^{f(m)} + \\ \quad + \mathbf{F}^{(m)} \delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, \\ \text{grad} \left(Q \text{div} \mathbf{u}^{s(m)} + R \text{div} \mathbf{u}^{f(m)} \right) + \\ \quad + P_1^s \mathbf{u}^{s(m)} + P_2^s \mathbf{u}^{f(m)} + \\ \quad + \mathbf{G}^{(m)} \delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$m = 1, \dots, 4,$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2),$$

$$P_1^s = \rho_{11}\omega^2 + i\omega\zeta, \quad P_2^s = \rho_{12}\omega^2 - i\omega\zeta,$$

$$P_1^f = \rho_{12}\omega^2 - i\omega\zeta, \quad P_2^f = \rho_{22}\omega^2 + i\omega\zeta.$$

Векторы $\mathbf{F}^{(m)}$, $\mathbf{G}^{(m)}$ в зависимости от параметра m принимают следующий вид:

$$\mathbf{F}^{(1)} = (1, 0), \quad \mathbf{G}^{(1)} = (0, 0),$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = (0, 1), \quad \mathbf{G}^{(2)} = (0, 0),$$

$$\mathbf{F}^{(3)} = (0, 0), \quad \mathbf{G}^{(3)} = (1, 0),$$

$$\mathbf{F}^{(4)} = (0, 0), \quad \mathbf{G}^{(4)} = (0, 1).$$

Решение системы (3.1) будем искать на основе представления Ламе в виде разложе-

ния на потенциальную и вихревую составляющие

$$\mathbf{u}^{s(m)} = \text{grad} \left(\varphi^{s(m)} \right) + \text{rot} \left(\psi^{s(m)} \cdot \mathbf{e}_3 \right), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}^{f(m)} = \text{grad} \left(\varphi^{f(m)} \right) + \text{rot} \left(\psi^{f(m)} \cdot \mathbf{e}_3 \right).$$

Массовые силы также можно представить в аналогичном виде [8]

$$\mathbf{X}^{s(m)} = \text{grad} \left(\theta^{s(m)} \right) + \text{rot} \left(\chi^{s(m)} \cdot \mathbf{e}_3 \right),$$

$$\mathbf{X}^{f(m)} = \text{grad} \left(\theta^{f(m)} \right) + \text{rot} \left(\chi^{f(m)} \cdot \mathbf{e}_3 \right),$$

$$\mathbf{X}^{s(m)} = \mathbf{F}^{(m)} \delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{X}^{f(m)} = \mathbf{G}^{(m)} \delta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим уравнения относительно потенциалов $\varphi^{s(m)}$, $\varphi^{f(m)}$ (3.3) и $\psi^{s(m)}$, $\psi^{f(m)}$

$$\boldsymbol{\Phi}^{(m)} = \begin{pmatrix} \varphi^{s(m)} & \varphi^{f(m)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\Phi}^{(m)} + \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}^{(m)} = \mathbf{g}^{(m)}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{g}^{(m)} = \begin{pmatrix} \theta^{s(m)} \\ \theta^{f(m)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} P_1^s & P_2^s \\ P_1^f & P_2^f \end{pmatrix}.$$

Решение системы (3.3) определяется в виде суммы

$$\boldsymbol{\Phi}^{(m)} = \mathbf{m}_1 \varphi_1^{(m)} + \mathbf{m}_2 \varphi_2^{(m)}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{m}_1 = (1, m_1), \quad \mathbf{m}_2 = (m_2, 1),$$

$$m_1 = -\frac{P\kappa_1^2 - P_1^s}{Q\kappa_1^2 - P_2^s}, \quad m_2 = -\frac{P\kappa_2^2 - P_1^f}{Q\kappa_2^2 - P_2^f},$$

где φ_1 и φ_2 — решения волновых уравнений

$$\Delta \varphi_i + \kappa_i^2 \varphi_i = f_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.5)$$

$$f_i = \frac{g_1 \eta_{i1} + g_2 \eta_{i2}}{1 - m_1 m_2}, \quad j = 1, 2,$$

$$\eta_{11} = C_{11}^{-1} - m_2 C_{21}^{-1}, \quad \eta_{12} = C_{12}^{-1} - m_2 C_{22}^{-1},$$

$$\eta_{21} = C_{21}^{-1} - m_1 C_{11}^{-1}, \quad \eta_{22} = C_{22}^{-1} - m_1 C_{12}^{-1},$$

$$\kappa_3^2 = \frac{\det \mathbf{B}}{\mu P_2^f}, \quad (3.6)$$

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{1}{2 \det \mathbf{C}} \left[\pm \sqrt{a^2 - 4 \det \mathbf{C} \det \mathbf{B} + a} \right],$$

$$a = (R\rho_{11} - 2Q\rho_{12} + P\rho_{22})\omega^2 + i\zeta\omega(P + 2Q + R). \quad (3.7)$$

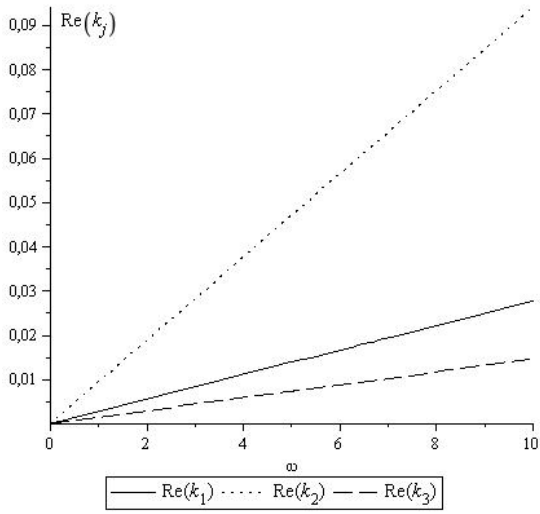


Рис. 2

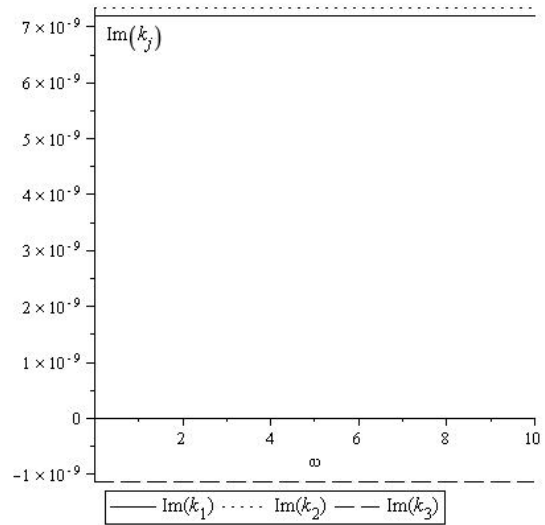


Рис. 3

Графики действительной и мнимой частей волновых чисел κ_1 , κ_2 , κ_3 для среды с параметрами $\lambda = 0,4026 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 0,2493 \cdot 10^9$ Па, $Q = 0,0672$ Па, $R = 0,0295$ Па, $\rho_f = 820$ кг/м³, $\rho_s = 2600$ кг/м³, $\rho_{11} = 1925,9$ кг/м³, $\rho_{22} = 2151$ кг/м³, $\rho_{12} = -1,9$ кг/м³, $\varepsilon = 0,26$, $\varsigma = 0,01$ представлены на рис. 2, 3.

Решая (3.5) при помощи интегрального преобразования Фурье, получим

$$\varphi_q^{(m)} = \frac{i}{4} \frac{1}{\kappa_q^2} \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)}(R\kappa_q) \times \left[\eta_{q1} F_p^{(m)} + \eta_{q2} G_p^{(m)} \right], \quad (3.8)$$

$$q = 1, 2,$$

$$p = 1 \text{ при } m = 1, 3;$$

$$p = 2 \text{ при } m = 2, 4,$$

где $H_0^{(1)}(R\kappa_q)$ — функция Ханкеля первого рода.

Подставив (3.8) в (3.4) и преобразовав, представим потенциалы φ^s , φ^f в форме

$$\begin{aligned} \varphi^{s(m)} = & \frac{i}{4\kappa_1^2} \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)}(R\kappa_1) \times \\ & \times \left[\eta_{11} F_p^{(m)} + \eta_{12} G_p^{(m)} \right] + \\ & + m_2 \frac{i}{4\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)}(R\kappa_2) \times \\ & \times \left[\eta_{21} F_p^{(m)} + \eta_{22} G_p^{(m)} \right], \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^f = & m_1 \frac{i}{4\kappa_1^2} \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)}(R\kappa_1) \times \\ & \times \left[\eta_{11} F_p^{(m)} + \eta_{12} G_p^{(m)} \right] + \\ & + \frac{i}{4\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)}(R\kappa_2) \times \\ & \times \left[\eta_{21} F_p^{(m)} + \eta_{22} G_p^{(m)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \psi^{s(m)} + \frac{\det \mathbf{B}}{\mu P_2^f} \psi^{s(m)} + \\ + \frac{P_2^f \chi^{s(m)} - P_2^s \chi^{f(m)}}{\mu P_2^f} = 0, \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\psi^{f(m)} = -\frac{1}{P_2^f} \left(\chi^{f(m)} + P_1^f \psi^{s(m)} \right).$$

Аналогично из (3.10) получим представления для потенциалов $\psi^{s(m)}$, $\psi^{f(m)}$

$$\begin{aligned} \psi^s = & \frac{i}{4\mu P_2^f \kappa_3^2} \frac{\partial}{\partial x_r} H_0^{(1)}(R\kappa_3) \times \\ & \times \left[F_p^{(m)} P_2^f - G_p^{(m)} P_2^s \right] (-1)^p, \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\psi^f = \frac{2\pi}{P_2^f} \frac{\partial}{\partial x_r} (\ln R) G_p^{(m)} (-1)^p - \frac{P_1^f}{P_2^f} \psi^s,$$

$$p = 1, r = 2 \text{ при } m = 1, 3;$$

$$p = 2, r = 1 \text{ при } m = 2, 4.$$

Окончательно фундаментальные решения для пороупругой среды принимают вид

$$\begin{aligned}
 u_1^{s(m)} = & \frac{i}{4\kappa_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_1} H_0^{(1)}(R\kappa_1) \times \\
 & \times \left[\eta_{11} F_p^{(m)} + \eta_{12} G_p^{(m)} \right] + \\
 & + m_2 \frac{i}{4\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_1} H_0^{(1)}(R\kappa_2) \times \\
 & \times \left[\eta_{21} F_p^{(m)} + \eta_{22} G_p^{(m)} \right] + \\
 & + \frac{i}{4\kappa_3^2 \mu P_2^f} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_2} H_0^{(1)}(R\kappa_3) \times \\
 & \times \left[F_p^{(m)} P_2^f - G_p^{(m)} P_2^s \right] (-1)^p, \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{s(m)} = & \frac{i}{4\kappa_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_2} H_0^{(1)}(R\kappa_1) \times \\
 & \times \left[\eta_{11} F_p^{(m)} + \eta_{12} G_p^{(m)} \right] + \\
 & + m_2 \frac{i}{4\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_1} H_0^{(1)}(R\kappa_2) \times \\
 & \times \left[\eta_{21} F_p^{(m)} + \eta_{22} G_p^{(m)} \right] - \\
 & - \frac{i}{4\mu P_2^f \kappa_3^2} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_1} H_0^{(1)}(R\kappa_3) \times \\
 & \times \left[F_p^{(m)} P_2^f - G_p^{(m)} P_2^s \right] (-1)^p, \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1^{f(m)} = & m_1 \frac{i}{4\kappa_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_1} H_0^{(1)}(R\kappa_1) \times \\
 & \times \left[\eta_{11} F_p^{(m)} + \eta_{12} G_p^{(m)} \right] + \\
 & + \frac{i}{4\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_1} H_0^{(1)}(R\kappa_2) \times \\
 & \times \left[\eta_{21} F_p^{(m)} + \eta_{22} G_p^{(m)} \right] + \\
 & + \frac{2\pi}{P_2^f} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_2} (\ln R) G_p^{(m)} (-1)^p - \\
 & - \frac{P_1^f}{P_2^f} \frac{i}{4\mu P_2^f \kappa_3^2} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_2} H_0^{(1)}(R\kappa_3) \times \\
 & \times \left[F_p^{(m)} P_2^f - G_p^{(m)} P_2^s \right] (-1)^p, \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{f(m)} = & m_1 \frac{i}{4\kappa_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_2} H_0^{(1)}(R\kappa_1) \times \\
 & \times \left[\eta_{11} F_p^{(m)} + \eta_{12} G_p^{(m)} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{i}{4\kappa_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_p \partial x_2} H_0^{(1)}(R\kappa_2) \times \\
 & \times \left[\eta_{21} F_p^{(m)} + \eta_{22} G_p^{(m)} \right] - \\
 & - \frac{2\pi}{P_2^f} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_1} (\ln R) G_p^{(m)} (-1)^p + \\
 & + \frac{P_1^f}{P_2^f} \frac{i}{4\mu P_2^f \kappa_3^2} \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_1} H_0^{(1)}(R\kappa_3) \times \\
 & \times \left[F_p^{(m)} P_2^f - G_p^{(m)} P_2^s \right] (-1)^p, \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

$$p = 1, r = 2 \text{ при } m = 1, 3;$$

$$p = 2, r = 1 \text{ при } m = 2, 4.$$

Для проверки полученных фундаментальных решений для пороупругой среды был осуществлен предельный переход при $Q \rightarrow 0$, $\rho_{12} \rightarrow 0$, $\varsigma \rightarrow 0$, соответствующий переходу от гетерогенной к однородной упругой среде с параметрами скелета и идеальной жидкой среде. При этом как соответствующие уравнения движения пороупругой среды, так и фундаментальные решения разделяются на несвязанные компоненты для скелета и жидкости.

4. Представление перемещений

Для нахождения общих представлений решений в ограниченном пороупругом теле используем теорему взаимности, представленную выше. Возьмем в качестве первого состояния для (2.1) систему, отвечающую задаче об ограниченном теле в постановке (1.1)–(1.3), а в качестве второго состояния — систему, отвечающую задаче о фундаментальных решениях. Учитывая, что массовые силы в этой задаче представлены в виде δ -функций, на основании теоремы взаимности (2.3) запишем

$$\oint_{\gamma} \left(\sigma_{kj}^s u_k^{s(m)} n_j - \sigma_{kj,j}^{s(m)} u_k^s n_j + \sigma_{,k}^f u_k^{f(m)} n_k - \sigma_{,k}^{f(m)} u_k^f n_k \right) d\gamma = u_m^s(\xi), \quad m = 1, 2; \quad (4.1)$$

$$\oint_{\gamma} \left(\sigma_{kj}^s u_k^{s(m)} n_j - \sigma_{kj,j}^{s(m)} u_k^s n_j + \sigma_{,k}^f u_k^{f(m)} n_k - \sigma_{,k}^{f(m)} u_k^f n_k \right) d\gamma = u_{m-2}^f(\xi), \quad (4.2)$$

$$m = 3, 4.$$

С учетом граничных условий (1.3), представления (4.1) и (4.2) принимают вид

$$\oint_{\Gamma_1} \sigma_{kj}^s u_k^{s(m)} n_j d\gamma + \oint_{\Gamma_2} P_k u_k^{s(m)} d\gamma + \\ - \oint_{\gamma \setminus \Gamma_1} \sigma_{,k}^{f(m)} u_k^f n_k = u_m^s(\xi), \quad (4.3) \\ m = 1, 2;$$

$$\oint_{\Gamma_1} \sigma_{kj}^s u_k^{s(m)} n_j d\gamma + \oint_{\Gamma_2} P_k u_k^{s(m)} d\gamma + \\ - \oint_{\gamma \setminus \Gamma_1} \sigma_{,k}^{f(m)} u_k^f n_k = u_{m-2}^f(\xi), \quad (4.4) \\ m = 3, 4.$$

Полученные общие представления служат основой для расчета волновых полей в среде при наличии сосредоточенных источников, а также для формулировки граничных интегральных уравнений в пороупругости, которые позволяют снизить размерность исследуемой задачи.

Литература

1. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid // J. Acoustic. Soc. Am. 1956. Vol. 28. No. 2. P. 168–178.
2. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наука думка, 1990. 224 с.
3. Krauklis P. V. New guided wave in a poroacoustic layer proceedings. International Seminar, Day on Diffraction. 1999. P. 113–117.
4. Gubaidullin A. A., Kuchugurina O. Yu. One-Dimensional Linear Waves with axial and central symmetries in saturated porous media // Transport in Porous Media. 1996. Vol. 22. P. 73–90.
5. Губайдуллин А. А., Болдырева О. Ю. Распространение волн вдоль границы насыщенной пористой среды и жидкости // Акустический журнал. 2006. Т. 52. № 2. С. 201–211.
6. Jian-Fei Lu, Dong-Sheng Jeng. A half-space saturated poro-elastic medium subjected to a moving point load // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44. P. 573–586.
7. Yuanqiang Cai, Honglei Sun, Changjie Xu. Steady state responses of poroelastic half-space soil medium to a moving rectangular load // International Journal of Solids and Structures. 2007. Vol. 44. P. 7183–7196.
8. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. С. 646–657.

Ключевые слова: пороупругость, теорема взаимности, фундаментальные решения