УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСКЛИНАЦИЯМИ[1]

***Зубов Л. М.*[2], *Фам Т. Х.*[3]**

AXISYMMETRIC BENDING OF NONLINEAR ELASTIC PLATE WITH DISTRIBUTED DISCLINATIONS

Zubov L. M., Pham T. H.

Influence of distributed and isolated disclinations on bend annular elastic plate is investigated with the modified nonlinear Karman's equations. A nonlinear effect on the deflection increase of the plate loaded by transverse pressure with scaling up of disclinations density is identified through numerical solutions of modified Karman's equations. The problem of stability and post-critical behavior of the annular plate which plane stress state is conditioned by disclinations is considered. Bending equilibrium forms of flexible plate with disclinations are found.

Keywords: nonlinear bending, disclinations density, buckling of plate, post-critical behavior

1. Исходные соотношения

Рассмотрим кольцевую пластинку с радиусами внешнего контура a и внутреннего контура b, содержащую в плоском состоянии непрерывно распределенные дислокации и дисклинации. Уравнения равновесия имеют вид [1]

$$\Delta\Delta F + \frac{1}{2}Eh\left[(\Delta W)^2 - \operatorname{tr}\left(\nabla\nabla W\cdot\nabla\nabla W\right)\right] = Eh\mu, \quad (1.1)$$

$$D\Delta\Delta W + \operatorname{tr}\left(\nabla\nabla W\cdot\nabla\nabla W\right) - \Delta F\Delta W = p, \quad (1.2)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)},$$

$$\mu = \nabla\cdot\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \beta, \quad \mathbf{e} = -\mathbf{i}_3\times\mathbf{E}.$$

Здесь W — нормальный прогиб, F — функция напряжений Эри, E — модуль Юнга, h — постоянная толщина пластинки, ν — коэффициент Пуассона, D — цилиндрическая жесткость, символом tr обозначен след (первый инвариант) тензора второго ранга, ∇ — двумерный набла-оператор, Δ — двумерный оператор Лапласа, p — распределенное нормальное давление, μ — скалярная мера несовместности, $\boldsymbol{\alpha}$ — плоский вектор плотности краевых дислокаций, β — скалярная плотность клиновых дисклинаций, $\mathbf{e}$ — дискриминантный тензор, $\mathbf{E}$ — трехмерный единичный тензор, $\mathbf{i}_3$ — единичный вектор, ортогональный плоскости пластинки.

Пусть r, φ — полярные координаты в плоскости пластинки. Считая, что $\mu = \mu(r)$, будем разыскивать осесимметричные решения системы (1.1), (1.2), т.е. предполагаем, что $W = W(r)$, $F = F(r)$.

2. Граничные условия

Будем рассматривать два случая закрепления внешнего и внутреннего контуров пластинки:

а) внешний контур шарнирно оперт, а внутренний свободен;

б) внешний контур защемлен, а внутренний свободен.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (09-01-00459).

[2]Зубов Леонид Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: zubovl@yandex.ru

[3]Фам Тан Хунг, аспирант кафедры теории упругости Южного Федерального университета; e-mail: tanhung1981@mail.ru

Граничные условия для прогиба пластинки на внешнем контуре имеют вид в случае а)

$$W(a)=0, \quad \left(W''+\frac{\nu}{r}W'\right)\Big|_{r=a}=0 \qquad (2.1)$$

и вид в случае б)

$$W(a)=0, \quad W'(a)=0. \qquad (2.2)$$

Граничные условия для прогиба на внутреннем контуре в обоих случаях имеют вид

$$\begin{gathered}\left(W''+\frac{\nu}{r}W'\right)\Big|_{r=b}=0,\\ \left(W'''+\frac{W''}{r}-\frac{W'}{r^2}\right)\Big|_{r=b}=0.\end{gathered} \qquad (2.3)$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной r.

Если внешний контур $r=a$ свободен от сил, действующих в плоскости пластинки, то граничные условия для функции напряжений Эри таковы

$$F(a)=0, \quad F'(a)=0. \qquad (2.4)$$

В дальнейшем предполагается, что в кольцевой пластинке содержатся не только распределенные дисклинации, но и изолированная дисклинация. В работе [1] дана постановка задачи для многосвязной гибкой пластинки, содержащей дислокации Вольтерры (изолированные дефекты). Рассмотрим двухсвязную пластинку с внешним контуром Γ_0 и внутренним контуром Γ_1. Предположим, что внутренний контур Γ_1 свободен от нагрузки, действующей в плоскости пластинки. Тогда выполняются следующие условия на контуре Γ_1 [1]:

$$F|_{\Gamma_1}=-\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{A}+\mathrm{C}, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=-\mathbf{t}\cdot\mathbf{A}, \qquad (2.5)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{t}=-\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}$ — единичный вектор касательной к контуру, $\mathbf{n}$ — нормаль к контуру, $\mathbf{A}$ — постоянный плоский вектор, C — скалярная постоянная.

Постоянные $\mathbf{A}$ и C заранее неизвестны, дополнительными уравнениями для их определения служат интегральные соотношения [1]

$$\begin{gathered}\mathbf{b}_1=\oint\limits_{\Gamma_1}(\varepsilon+\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}\otimes\gamma)\cdot d\mathbf{r},\\ \psi_1=\oint\limits_{\Gamma_1}\gamma\cdot d\mathbf{r}.\end{gathered} \qquad (2.6)$$

При этом

$$\gamma=\nabla\cdot\mathbf{e}\cdot\varepsilon, \quad \varepsilon=\mathbf{H}-\frac{1}{2}\nabla W\otimes\nabla W,$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H}=(Eh)^{-1}\left[(1+\nu)\,\mathbf{T}-\nu\mathbf{g}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{T}\right],\\ \mathbf{T}=-\mathbf{e}\cdot\nabla\nabla F\cdot\mathbf{e},\end{gathered} \qquad (2.7)$$

где $\mathbf{b}_1$ — вектор Бюргерса, ψ_1 — угол Франка дислокации Вольтерры, ε — линейный двумерный тензор деформаций, $\mathbf{H}$ — тензор деформаций, $\mathbf{T}$ — тензор мембранных усилий, $\mathbf{g}$ — двумерный единичный тензор.

Рассмотрим случай, когда изолированный дефект является клиновой дисклинацией с заданным углом Франка ψ_1. Тогда $\mathbf{b}_1=0$.

Первое соотношение (2.5) в случае кольцевой пластинки преобразуется к виду

$$\begin{gathered}F|_{\Gamma_1}=-\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{A}+\mathrm{C}=\\ =-r\mathbf{A}\cdot(\mathbf{i}_1\cos\varphi+\mathbf{i}_2\sin\varphi)+\mathrm{C}=\\ =-rA_1\cos\varphi-rA_2\sin\varphi+\mathrm{C},\end{gathered}$$

$$A_s=\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_s, \quad s=1,2.$$

Здесь $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ — орты декартовых координат в плоскости пластинки.

Задача осесимметричная, поэтому функция напряжений Эри зависит только от r. Следовательно, A_1 и A_2 равны нулю, откуда имеем

$$F(b)=\mathrm{C}, \quad F'(b)=0. \qquad (2.8)$$

Подставим выражения (2.7) в интегральные соотношения (2.6), получим

$$\mathbf{b}_1=\oint\limits_{\Gamma_1}\left[K_1\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r-\left(rK_2'-K_1\right)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right]\cdot d\mathbf{r}=0,$$

$$\psi_1=\oint\limits_{\Gamma_1}\left(K_2'+\frac{K_2}{r}-\frac{K_1}{r}\right)\mathbf{e}_\varphi\cdot d\mathbf{r},$$

$$K_1=(Eh)^{-1}\left(\frac{F'}{r}-\nu F''\right)-\frac{1}{2}W'^2,$$

$$K_2=(Eh)^{-1}\left(F''-\nu\frac{F'}{r}\right).$$

Тогда

$$\mathbf{b}_1=\int\limits_0^{2\pi}\left(bK_2'(b)-K_1(b)\right)b\mathbf{e}_\varphi d\varphi=0,$$

$$\psi_1 = \int\limits_0^{2\pi} \left(K_2'(b) + \frac{K_2(b)}{b} - \frac{K_1(b)}{b} \right) b d\varphi.$$

Видно, что первое из этих уравнений удовлетворяется тождественно. Интегрируя правую часть второго уравнения, получим

$$bF'''(b) + F''(b) + \frac{Eh}{2}\left(W'(b)\right)^2 = \\ = \frac{Eh\psi_1}{2\pi}. \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) служит для определения неизвестной постоянной C в краевых условиях (2.8).

3. Влияние дисклинаций на прогиб кольцевой пластинки, нагруженной равномерным давлением

Рассмотрим равновесие круглой кольцевой пластинки, нагруженной равномерным давлением p. Плотность дисклокаций $\boldsymbol{\alpha}$ предполагается равной нулю, а плотность клиновых дисклинаций β считается постоянной.

Система дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) в полярной системе координат имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dF}{dr}\right)\right)\right) + \\ \qquad + \dfrac{Eh}{r}\dfrac{d^2W}{dr^2}\dfrac{dW}{dr} = Eh\beta; \\ \dfrac{D}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dW}{dr}\right)\right)\right) - \\ \qquad - \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{d^2F}{dr^2}\dfrac{dW}{dr} + \dfrac{d^2W}{dr^2}\dfrac{dF}{dr}\right) = p. \end{cases} \quad (3.1)$$

Интегрируя (3.1), получим

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dF}{dr}\right)\right) + \dfrac{Eh}{2r}\left(\dfrac{dW}{dr}\right)^2 = \\ \qquad = \dfrac{Eh\beta r}{2} + \dfrac{C_1}{r}; \\ \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dW}{dr}\right)\right) - \dfrac{1}{Dr}\dfrac{dF}{dr}\dfrac{dW}{dr} = \\ \qquad = \dfrac{pr}{2D} + \dfrac{C_2}{r}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Поставляя (2.3), (2.8), (2.9) в (3.2), имеем

$$C_1 = \frac{Eh\psi_1}{2\pi} - \frac{Eh\beta b^2}{2}, \quad C_2 = -\frac{pb^2}{2D}.$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (3.2) с граничными условиями (2.1)–(2.4), (2.8) применяется численный метод пристрелки, использованный ранее [2] в задаче изгиба круглой пластинки с дисклинациями.

В качестве примера расчета рассмотрим кольцевую пластинку со следующими параметрами: $b = 0{,}1$, $a = 1$, $h = 0{,}1$, $E = 1$, $\nu = 0{,}3$.

Функция прогиба кольцевой пластинки представлена на рис. 1 (сверху — опертая по внешнему краю пластинка, снизу — защемленная). По оси ординат отложены значения прогиба $W(r)$ при различных плотностях распределенных дисклинаций. Для угла Франка изолированной дисклинации взято значение $\psi_1 = 0{,}01\pi$.

Рассмотрим пластинку, содержащую только распределенные дисклинации ($\psi_1 = 0$). Прогиб пластинки изображен на рис. 2.

На рис. 1, 2 видно, что увеличение плотности распределенных дисклинаций увеличивает прогиб пластинки независимо от знака плотности. Кроме того, изолированная дисклинация также увеличивает прогиб.

4. Устойчивость плоского напряженного состояния кольцевой пластинки с дисклинациями

Предположим, что поперечная нагрузка p равна нулю, а силы, приложенные к границе пластинки, лежат в ее плоскости. Тогда система уравнений (1.1), (1.2) имеет решение $W = 0$, которое соответствует плоскому напряженному состоянию. Это состояние описывается уравнением (1.1), а уравнение (1.2) удовлетворяется тождественно.

При некоторых значениях плотности дисклинаций и контурных нагрузок плоское напряженное состояние может стать неустойчивым. Для исследования устойчивости плоского состояния воспользуемся бифуркационным методом.

Рассмотрим кольцевую пластинку под действием равномерно распределенной по контуру $r = a$ сжимающей радиальной нагрузки с интенсивностью σ_0 на единицу длины. Пластинка содержит равномерно распределенные с плотностью β и изолированную с углом Франка ψ_1 дисклинации. Плоское

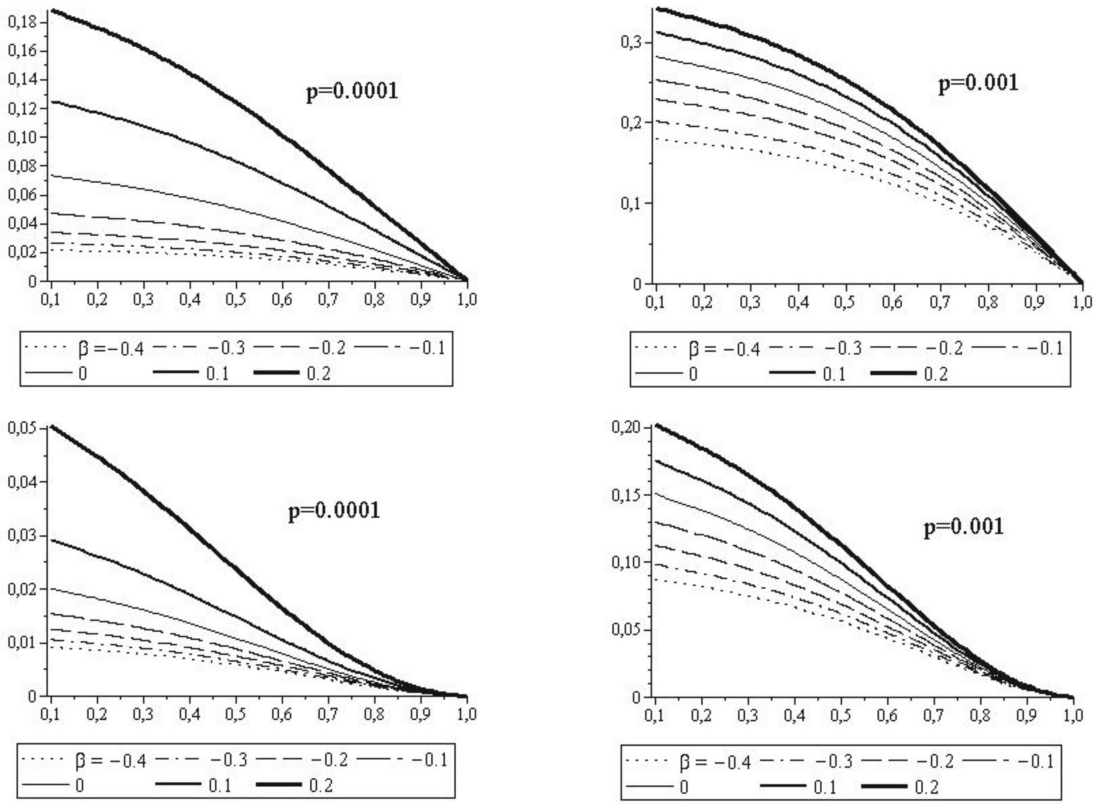

Рис. 1. Прогиб кольцевой пластинки с распределенными и изолированной дисклинациями

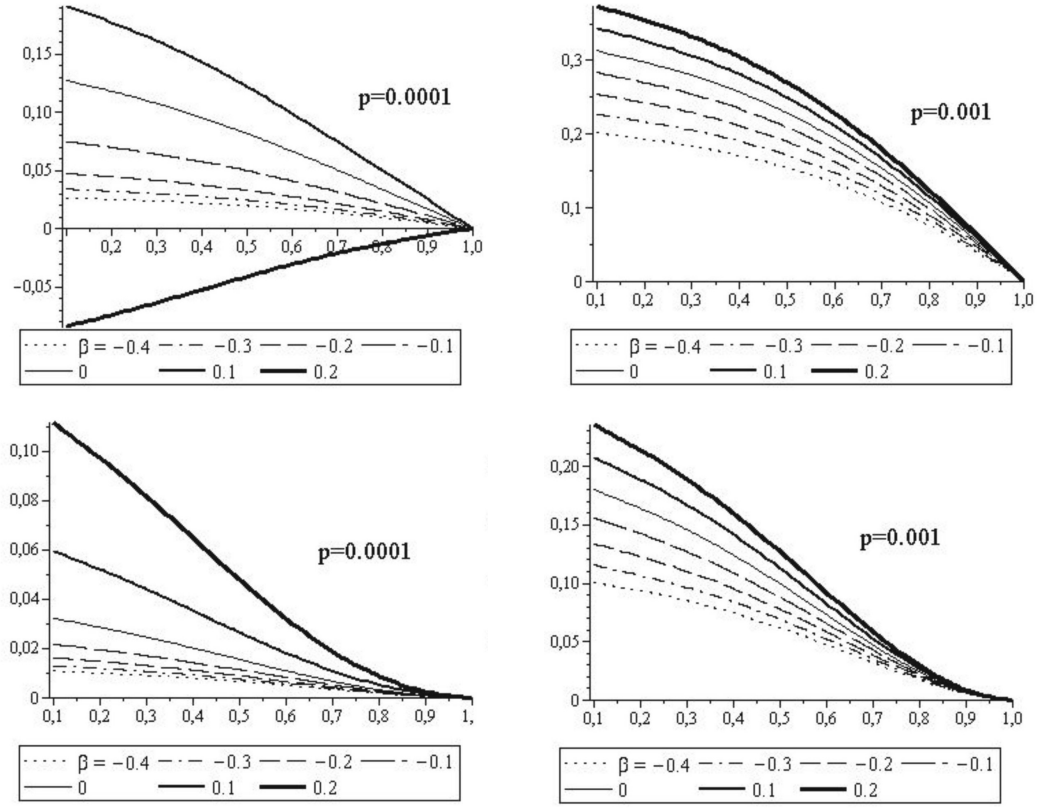

Рис. 2. Прогиб кольцевой пластинки с распределенными дисклинациями

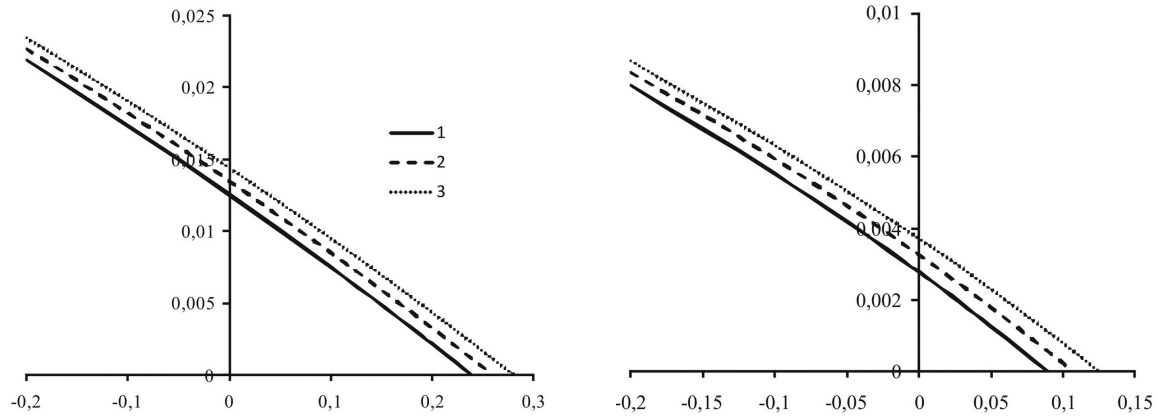

Рис. 3. Зависимость критических значений бокового давления от плотности дисклинаций (слева — защемленная по внешнему контуру пластинка, справа — опертая пластинка)

напряженное состояние описывается следующей краевой задачей:

$$\begin{cases} \Delta\Delta F = Eh\beta; \\ F(a) = 0, F'(a) = -a\sigma_0; \\ F'(b) = 0, bF'''(b) + F''(b) = \dfrac{Eh\psi_1}{2\pi}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Решение задачи (4.1) имеет вид

$$F(r) = \frac{Eh\mu}{64} r^4 + C_1 + C_2 \ln r + \\ + r^2 (C_3 + C_4 \ln r). \tag{4.2}$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 находятся из граничных условий.

Тензор усилий в силу (2.7) и (4.2) в докритическом состоянии принимает вид

$$\mathbf{T} = \sigma_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \sigma_\varphi \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \\ \sigma_r = \frac{1}{r} F', \quad \sigma_\varphi = F'', \tag{4.3}$$

где σ_r и σ_φ — компоненты усилий.

На основании (1.1), (1.2), (4.2), (4.3) линеаризованная краевая задача, описывающая осесимметричные изгибные формы равновесия, мало отличающиеся от плоского состояния, для защемленной по внешнему контуру и свободной по внутреннему контуру пластинки формулируется следующим образом:

$$DW^{IV} + \frac{2D}{r} W''' + \left(-\frac{D}{r^2} - \sigma_r \right) W'' + \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{D}{r^2} - \sigma_\varphi \right) W' = 0. \tag{4.4}$$

$$\left(W'' + \frac{\nu}{r} W' \right)\Big|_{r=b} = 0, \\ \left(W''' + \frac{W''}{r} - \frac{W'}{r^2} \right)\Big|_{r=b} = 0. \tag{4.5}$$

$$W(a) = 0, W'(a) = 0. \tag{4.6}$$

Линейная краевая задача (4.4)–(4.6) всегда имеет тривиальное решение $W = 0$. Исследование устойчивости плоского состояния пластинки заключается в отыскании критических значений нагрузки σ_0, при которых указанная однородная задача имеет нетривиальное решение.

Для численного решения задачи устойчивости применим конечно-разностный метод, предложенный в [3].

Для расчета использованы следующие данные: $b = 0{,}1$, $a = 1$, $E = 1$, $h = 0{,}1$, $\nu = 0{,}3$. Результаты показаны в виде рисунков, на которых по оси абсцисс отложено значение плотности дисклинаций β, а по оси ординат — минимальное критическое значение краевой нагрузки σ_0. На рис. 3 дается зависимость критических значений боковой нагрузки от плотности распределенных дисклинаций при различных значениях угла Франка ψ_1 ($\psi_1 = 0{,}005\pi$ для кривой 1, $\psi_1 = 0$ для кривой 2, $\psi_1 = -0{,}005\pi$ для кривой 3).

Результаты на рис. 3. показывают, что критическое значение бокового давления уменьшается при увеличении плотности дисклинаций независимо от ее знака. Присутствие изолированной дисклинации также уменьшает критическое значение σ_0.

Пересечение критических кривых с осью абцисс на рис. 3 означает, что выпучивание пластинки возможно без приложения внешней нагрузки, только за счет внутренних на-

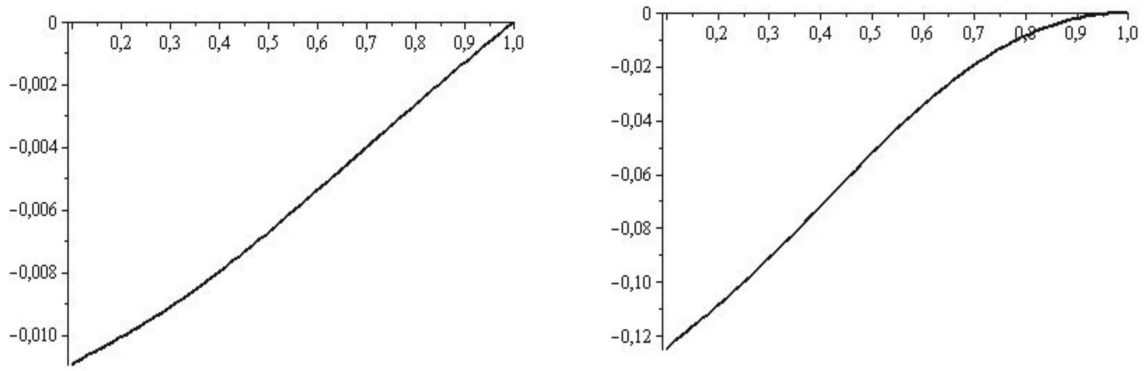

Рис. 4. Прогиб кольцевой пластинки, содержащей клиновые дискилинации при отсутствии внешних нагрузок

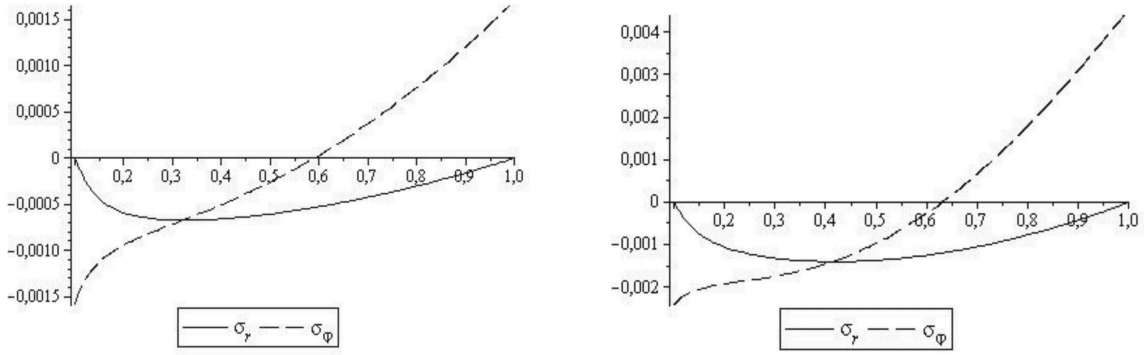

Рис. 5. Компоненты усилий кольцевой пластинки, содержащей клиновые дискилинации при отсутствии внешних нагрузок

пряжений, обусловленных распределенными дефектами.

5. Закритическое поведение пластинки с внутренними напряжениями

В этом разделе рассмотрим закритическое поведение кольцевой пластинки с равномерно распределенными и изолированной дисклинациями и свободной от внешних нагрузок. Если плотность дисклинаций превышает критическое значение, которое найдено в разд. 4, то система дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) имеет не только тривиальное, но и нетривиальное решение.

На рис. 4 приведены прогибы в закритической стадии кольцевой пластинки с клиновыми дисклинациями (слева — опертая по внешнему контуру пластинка $\beta = 0{,}14$, справа — защемленная по внешнему контуру пластинка $\beta = 0{,}4$).

Компоненты усилий приведены на рис. 5 (слева — опертая по внешнему контуру пластинка $\beta = 0{,}14$, справа — защемленная по внешнему контуру пластинка $\beta = 0{,}4$).

На рис. 6. показано сравнение компонентов усилий σ_r и σ_φ изогнутой пластинки с усилиями в плоском напряженном состоянии (4.1) (случай защемленной по внешнему контуру пластинка).

Из рис. 6 видно, что изогнутая форма пластинки более выгодна по сравнению с плоским состоянием, так как в изогнутой пластинке составляющие мембранных усилий меньше по абсолютной величине.

Закритическая изогнутая форма пластинки, содержащей только изолированную дисклинацию ($\beta = 0$, $\psi_1 = 0{,}05\pi$), изображена на рис. 7.

На рис. 7 видно, что при малой толщине h форма выпученной пластинки близка к конусу, а при большей толщине h форма выпучивания отличается от конуса.

С ростом плотности дисклинаций число решений краевой задачи о равновесии пластинки возрастает. На рис. 8 изображены

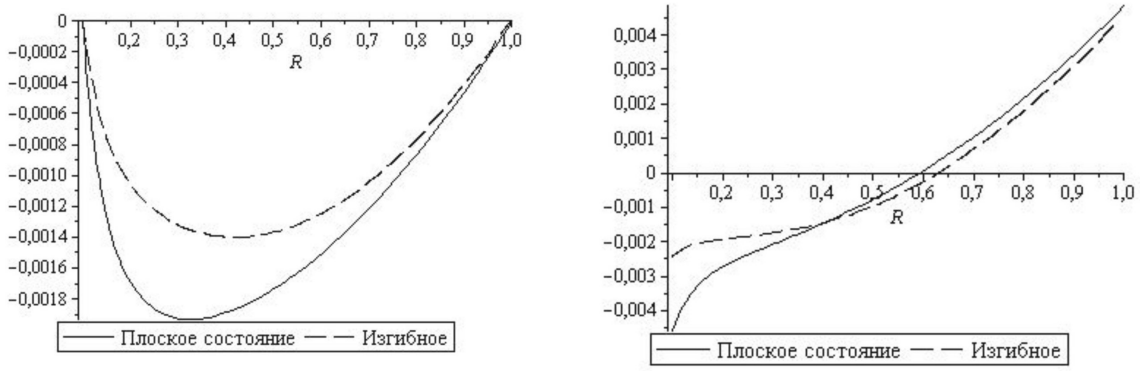

Рис. 6. Сравнение компонентов усилий σ_r (слева) и σ_φ (справа) с плоским напряженным состоянием

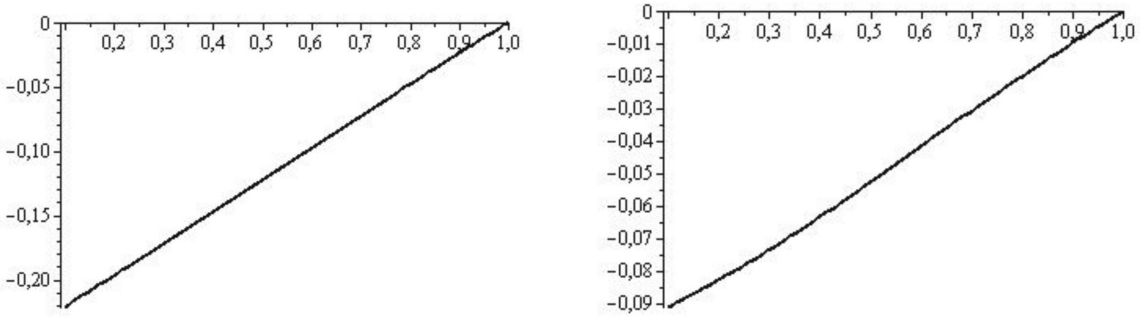

Рис. 7. Прогиб опертой пластинки, содержащей изолированную дисклинацию (слева — $h = 0{,}01$; справа — $h = 0{,}1$)

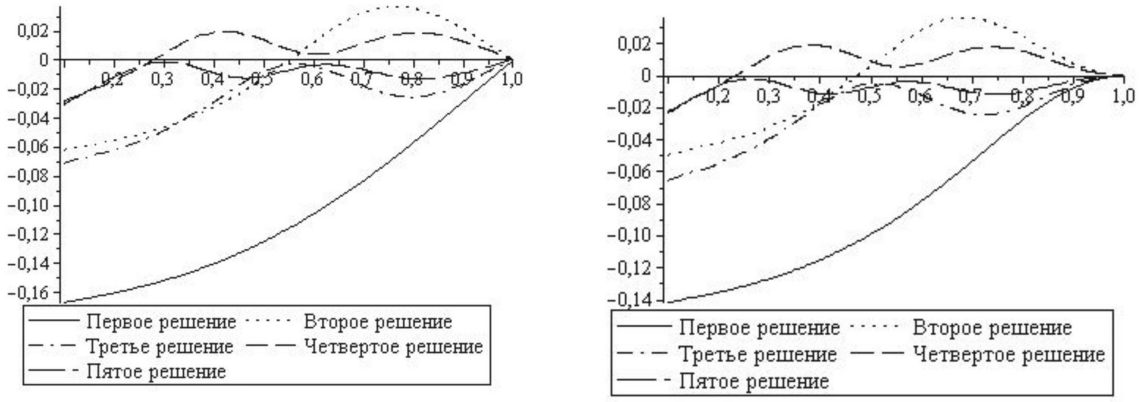

Рис. 8. Прогиб кольцевой пластинки, содержащей распределенные дисклинации с плотностью $\beta = 0{,}1$ в закритическом состоянии (слева — опертая пластинка, справа — защемленная пластинка)

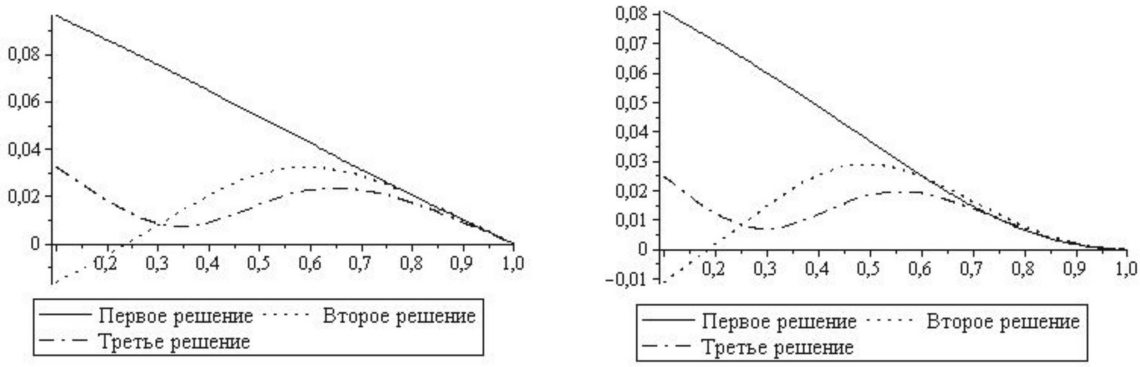

Рис. 9. Прогиб кольцевой пластинки, содержащей изолированные дисклинации с углом Франка $\psi_1 = 0{,}01\pi$ в закритическом стадии (слева — опертая пластинка, справа — защемленная пластинка).

формы равновесия пластинки с плотностью дисклинаций β, расположенной между пятым и шестым критическим значением. Толщина пластинки $h = 0{,}01$.

Для пластинки, содержащей только изолированную дисклинацию при достаточно большом угле Франка ψ_1, также существует несколько форм равновесия. Результаты приведены на рис. 9.

При отрицательных значениях плотности β и угла Франка ψ_1 осесимметричных форм равновесия найти не удается. Это означает, что при $\beta < 0$, $\psi_1 < 0$ потеря устойчивости кольцевой пластинки будет происходить по неосесимметричным формам.

Литература

1. *Зубов Л. М.* Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями // ДАН. 2007. Т. 412. №3. С. 343–346.
2. *Фам Т. Х.* Большие прогибы круглой пластинки с распределенными дисклинациями // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды XIII Междунар. конф. Ростов-н/Д, 2009. Т. 1. С. 209–212.
3. *Зубов Л. М., Моисеенко С. И.* Выпучивание упругого цилиндра при кручении и сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №5. С. 78–84.

Ключевые слова: нелинейный изгиб, плотность дисклинаций, выпучивание пластинки, закритическое поведение

Статья поступила 1 декабря 2010 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
© Зубов Л. М., Фам Т. Х., 2010