УДК 517.929.2

ДОПУСТИМОСТЬ ПАР ПРОСТРАНСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ

Афанасьева Т. Н.[1]

ADMISSIBILITY OF SPACES COUPLES FOR NON-LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS AND EQUATIONS

Afanasyeva T. N.

The admissibility of space couples is studied for nonlinear difference operators as well as for nonlinear difference equations.

Keywords: nonlinear differential equation, nonlinear difference operator, space of bounded sequences, admissibility of spaces couples

Изучается допустимость различных пар пространств относительно нелинейных разностных операторов

$$\tilde{K}x = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n, k, \mathbf{x}_k) \right\}$$

и нелинейных разностных уравнений

$$x = \widetilde{K}x + f.$$

Рассматривается нелинейное разностное уравнение

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n, k, \mathbf{x}_k) + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0 \qquad (1)$$

и линейное разностное уравнение

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}\mathbf{x}_k + \mathbf{f}_n, \ n \geqslant 0, \qquad (2)$$

где $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{f}_n$, $\mathbf{K}(n, k, \mathbf{x})$ — векторы из R^m, $\mathbf{A}_{nk}$ — $m \times m$ матрицы с действительными элементами. Предполагается, что $\mathbf{K}(n, k, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Матрица $A = \{\mathbf{A}_{nk}\}$ является ядром уравнения (2), удовлетворяющим условию

$$M = \sup_{n \geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{A}_{nk}\| < \infty. \qquad (3)$$

Положим по определению

$$\sum_{k=i+1}^{i} \mathbf{a}_k = 0.$$

Резольвентой ядра A называется матрица $R = \{\mathbf{R}_{nk}\}$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{R}_{nk} = \mathbf{A}_{nk} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \mathbf{A}_{ni}\mathbf{R}_{ik}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Резольвента R является единственным решением этого уравнения, и уравнение (2) всегда имеет единственное решение $x = \{\mathbf{x}_n\}$, представимое в виде [1]

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0.$$

Определение 1. Пусть F и X — линейные пространства. Пара (F, X) называется допустимой относительно уравнения, если при любом $f \in F$ решение $x \in X$.

Определение 2. Пара (F, X) называется допустимой относительно оператора $\tilde{K}$, если $\tilde{K}x \in X$ при любом $f \in F$.

Определение 3. Ядро A уравнения (2) устойчиво, если при любом f таком, что $\sup\limits_{n \geqslant 0} \|\mathbf{f}_n\|_{R^m} < \infty$, решение x удовлетворяет условию $\sup\limits_{n \geqslant 0} \|\mathbf{x}_n\|_{R^m} < \infty$.

[1]Афанасьева Татьяна Николаевна, старший преподаватель кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Кубанского государственного университета; e-mail: laktanik@rambler.ru

Обозначим через l_2^m линейное пространство векторов из R^m с нормой $\|\mathbf{x}\|_{l_2^m} = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} |x^j|^2}$; M_m — пространство действительных $m \times m$ матриц $\mathbf{A} = \{a^{ij}\}$ с нормой $\|\mathbf{A}\|_{M_m} = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{m} |a^{ij}|^2}$; l_∞ — пространство ограниченных последовательностей векторов из R^m с нормой $\|x\|_{l_\infty} = \sup\limits_{n\geqslant 0} \|\mathbf{x}_n\|_{l_2^m}$.

Определение 4. N-срезкой вектора $\mathbf{b} = \mathrm{col}(\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_{N-1}, \mathbf{b}_N, \ldots)$ называется вектор $\mathbf{b} = \mathrm{col}(\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_{N-1}, \mathbf{0}, \ldots)$.

Определение 5. Будем говорить, что замкнутое подпространство X обладает свойством (L) в l_∞, если существует такое число $r > 0$, что для любого $N \geqslant 1$ единичный шар из множества N-срезок векторов из X содержит шар радиуса r пространства N-срезок векторов из l_∞.

Для вектора $\mathbf{x} = \mathrm{col}(x^1, \ldots, x^m) \in R^m$ обозначим $|\mathbf{x}| = \mathrm{col}(|x^1|, \ldots, |x^m|)$. Аналогично, если $\mathbf{A} = \{a^{ij}\}$ — $m \times m$ матрица, то $|\mathbf{A}| = \{|a^{ij}|\}$.

Теорема 1. Пусть замкнутое подпространство X обладает свойством (L) в l_∞ [2], пара (X, X) допустима относительно оператора $\tilde{K}$,

$$|\mathbf{K}(n,k,\mathbf{x}) - \mathbf{K}(n,k,\mathbf{y})| \leqslant \mathbf{A}_{nk}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{4}$$

и ядро A устойчиво.Тогда пара (X, X) допустима относительно уравнения (1).

Доказательство.

Пусть f — произвольный вектор из подпространства X, обладающего свойством (L). Можно считать, что $|\mathbf{f}_n| \geqslant \mathbf{e}$, $\mathbf{e} = \mathrm{col}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m})$, $n \geqslant 0$ [2]. В противном случа, найдется такая постоянная $c = \inf\limits_{n\geqslant 0} \|\mathbf{f}_n\|_{R^m}$, что $|\mathbf{f}_n|/c \geqslant \mathbf{e}$.

Для уравнения (1) построим последовательные приближения $\{x^p\}$ следующим образом:

$$\mathbf{x}_n^0 = \mathbf{f}_n,$$

$$\mathbf{x}_n^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{f}_k) + \mathbf{f}_n,$$

....

$$\mathbf{x}_n^{p+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{x}_k^p) + \mathbf{f}_n, \tag{5}$$

....

Покажем, что последовательность $\{x^p\}$ сходится к некоторому вектору $\overline{x}$. Для этого докажем сходимость ряда

$$\mathbf{x}_n^0 + \sum_{p=0}^{\infty} (\mathbf{x}_n^{p+1} - \mathbf{x}_n^p). \tag{6}$$

Оценим

$$|\mathbf{x}_n^1 - \mathbf{x}_n^0| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}|\mathbf{f}_k|.$$

Так как неотрицательное ядро A устойчиво, то в силу леммы 1 найдется такое число $\alpha \in (0;1)$ [2], что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}|\mathbf{f}_k| \leqslant \alpha|\mathbf{f}_n|.$$

Следовательно,

$$|\mathbf{x}_n^1 - \mathbf{x}_n^0| \leqslant \alpha|\mathbf{f}_n|.$$

Предположим, что

$$|\mathbf{x}_n^p - \mathbf{x}_n^{p-1}| \leqslant \alpha^p|\mathbf{f}_n|. \tag{7}$$

Тогда

$$|\mathbf{x}_n^{p+1} - \mathbf{x}_n^p| \leqslant \alpha^{p+1}|\mathbf{f}_n|.$$

По индукции заключаем, что оценка (7) справедлива при всех p. Следовательно,

$$\sup_{n\geqslant 0} \left\| \mathbf{x}_n^0 + \sum_{p=0}^{\infty} (\mathbf{x}_n^{p+1} - \mathbf{x}_n^p) \right\|_{R^m} \leqslant \|f\|_{l_\infty} \frac{1}{1-\alpha}.$$

По теореме Вейерштрасса [3] ряд (6) сходится абсолютно и равномерно. Пусть вектор $\overline{x}$ — его сумма, тогда

$$\|x^p - \overline{x}\|_{l_\infty} = \sup_{n\geqslant 0} \|\mathbf{x}_n^p - \overline{\mathbf{x}}_n\|_{R^m} \to 0, \quad p \to \infty.$$

Отсюда, учитывая условие (3)

$$\sup_{n\geqslant 1} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{x}_k^p) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\overline{\mathbf{x}}_k) \right\|_{R^m} \leqslant \leqslant M\|x^p - \overline{x}\|_{l_\infty} \to 0$$

при $p \to \infty$.

Переходя в (5) к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\overline{\mathbf{x}}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\overline{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{f}_n, n \geqslant 0, \tag{8}$$

т. е. $\overline{x}$ является решением уравнения (1).

Докажем, что $\overline{x}$ — единственное решение (1). Пусть $\widetilde{x}$ — другое решение этого уравнения. Вычитая

$$\widetilde{\mathbf{x}}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\widetilde{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{f}_n, n \geqslant 0,$$

из (8) и, учитывая оценку (4), получим

$$|\overline{\mathbf{x}}_n - \widetilde{\mathbf{x}}_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk} |\overline{\mathbf{x}}_k - \widetilde{\mathbf{x}}_n|.$$

Откуда

$$|\overline{\mathbf{x}}_n - \widetilde{\mathbf{x}}_n| \leqslant \alpha^{p+1} |\mathbf{f}_k|.$$

Так как $\alpha^{p+1}|\mathbf{f}_n| \to 0$ при $p \to \infty$, то $\overline{\mathbf{x}}_n \equiv \widetilde{\mathbf{x}}_n$. Следовательно, $\overline{x}$ — единственное решение уравнения (1).

По условию пара (X, X) допустима относительно оператора $\tilde{K}$, т. е. при любом $f \in X$ последовательность $\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{f}_k) \right\} \in X$. Откуда

$$\{\mathbf{x}_n^1\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{f}_k) + \mathbf{f}_n \right\} \in X.$$

Предположим, что вектор x^p, $p \geqslant 0$, принадлежит подпространству X. Тогда

$$\{\mathbf{x}_n^{p+1}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{x}_k^p) + \mathbf{f}_n \right\} \in X.$$

По индукции заключаем, что $x^p \in X$ при всех $p \geqslant 0$. Отсюда и из замкнутости X следует $\overline{x} \in X$ [4]. Таким образом, пара (X, X) допустима относительно уравнения (1). □

Теорема 2. Пусть пара (X, X) допустима относительно оператора $\tilde{K}$ и существует такая непрерывная неубывающая по третьему аргументу неотрицательная функция $\omega(n, k, x)$, что

$$\|\mathbf{K}(n,k,\mathbf{x}) - \mathbf{K}(n,k,\mathbf{y})\|_{R^m} \leqslant \leqslant \omega(n,k,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{R^m}), \quad (9)$$

$$0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$\sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(n,k,\tau) < \tau. \quad (10)$$

Тогда пара (X, X) допустима относительно уравнения (1).

Доказательство. Построим последовательные приближения (5). Оценим разность при всех $l \geqslant 1$

$$\|\mathbf{x}_n^{p+l+1} - \mathbf{x}_n^{p+1}\|_{R^m} \leqslant \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \omega(n,k,\|\mathbf{x}_k^{p+l} - \mathbf{x}_k^p\|_{R^m}).$$

Обозначим через

$$u^p = \sup_{n\geqslant 0} \sup_{l\geqslant 1} \|\mathbf{x}_n^{p+l} - \mathbf{x}_n^p\|_{R^m}.$$

Отсюда, в силу условий (9) и (10), имеем

$$u^{p+1} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(n,k,u^p) < u^p.$$

Поэтому числовая последовательность $\{u^p\}$ является монотонно убывающей и ограниченной снизу (из определения $u^p \geqslant 0$, $p \geqslant 0$). Следовательно, существует предел [5]

$$\overline{u} = \lim_{p\to\infty} u^p.$$

Докажем, что $\overline{u} = 0$. Предположим, что $\overline{u} \neq 0$. Перейдем к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве

$$u^{p+1} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(n,k,u^p).$$

В силу условия (10)

$$\overline{u} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(n,k,\overline{u}) < \overline{u}.$$

Следовательно, $\overline{u} = 0$.

Таким образом, для всех $l \geqslant 1$

$$\|x^{p+l} - x^p\|_{l_\infty} \to 0 \quad (11)$$

при $p \to \infty$. Согласно критерию Коши [5] последовательность $\{x^p\}$ равномерно сходится к единственному решению $\overline{x}$ уравнения (1).

По условию при каждом $f \in X$ последовательность $\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{f}_k) \right\} \in X$. Поэтому

$$\{\mathbf{x}_n^1\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{f}_k) + \mathbf{f}_n \right\} \in X.$$

Предположим, что вектор x^p, $p \geqslant 0$, принадлежит подпространству X. Тогда

$$\{\mathbf{x}_n^{p+1}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{x}_k^p) + \mathbf{f}_n \right\} \in X.$$

По индукции заключаем, что $x^p \in X$ при всех $p \geqslant 0$. Отсюда и из замкнутости X следует $\overline{x} \in X$. Таким образом, пара (X,X) допустима относительно уравнения (1). □

2. Рассматривается нелинейное уравнение

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}(\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k)) + \mathbf{f}_n, n \geqslant 0, \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(n,\mathbf{x})$ вектор из R^m.

Теорема 3. Пусть пара (X,X) допустима относительно линейного разностного уравнения (2), $\varphi(X) \subset X$, существуют такая непрерывная неубывающая по второму аргументу неотрицательная функция $\nu(n,\tau)$, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}(n,\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(n,\mathbf{y})\|_{R^m} \leqslant \leqslant \nu(n, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{R^m}), \quad (13)$$

$$0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$\sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{R}_{nk}\|_{M_m} \nu(k,\tau) < \tau. \quad (14)$$

Тогда пара (X,X) допустима относительно уравнения (1).

Доказательство. Уравнение (12) равносильно уравнению

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_n, \quad (15)$$

$$n \geqslant 0.$$

Построим последовательные приближения

$$\mathbf{x}_n^0 = \mathbf{f}_n,$$

$$\mathbf{x}_n^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}(\mathbf{f}_k + \boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{f}_k)) + \mathbf{f}_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{x}_n^{p+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}(\mathbf{f}_k + \boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k^p)) + \mathbf{f}_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

В силу неравенств (13) и (14) получим

$$u^{p+1} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{R}_{nk}\|_{M_m} \nu(k,u^p) < u^p,$$

где $u^p = \sup_{n\geqslant 0} \sup_{l\geqslant 1} \|\mathbf{x}_n^{p+l} - \mathbf{x}_n^p\|_{R^m}$. Поэтому монотонно убывающая и ограниченная снизу числовая последовательность $\{u^p\}$ имеет предел

$$\overline{u} = \lim_{p\to\infty} u^p.$$

Докажем, что $\overline{u} = 0$. Предположим, что $\overline{u} \neq 0$. Перейдем к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве

$$u^{p+1} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{R}_{nk}\|_{M_m} \nu(k,u^p).$$

В силу неравенства (14), имеем

$$\overline{u} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{R}_{nk}\|_{M_m} \nu(k,\overline{u}) < \overline{u}.$$

Следовательно, $\overline{u} = 0$.

Таким образом, для всех $l \geqslant 1$

$$\|x^{p+l} - x^p\|_{l_\infty} \to 0$$

при $p \to \infty$. Следовательно, по критерию Коши, последовательность $\{x^p\}$ равномерно сходится к единственному решению $\overline{x}$ уравнения (12).

По условию пара (X,X) допустима относительно уравнения (12). Кроме того, $\varphi(X) \subset X$. Откуда

$$\{\mathbf{x}_n^1\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}(\mathbf{f}_k + \boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{f}_k)) + \mathbf{f}_n \right\} \in X.$$

Предположим, что вектор x^p, $p \geqslant 0$ принадлежит подпространству X. Тогда

$$\{\mathbf{x}_n^{p+1}\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}(\mathbf{f}_k + \boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k^p)) + \mathbf{f}_n \right\} \in X.$$

Следовательно, $x^p \in X$ при всех $p \geqslant 0$. Отсюда и из замкнутости X получаем, что $\overline{x} \in X$. Таким образом, пара (X,X) допустима относительно уравнения (1). □

Автор ыражает искреннюю благодарность проф. Цалюку З. Б. за интерес, проявленный к статье, и за труд, который он взял на себя в связи с ее созданием.

Литература

1. *Афанасьева Т. Н., Ойнас И. Л.* О допустимости некоторых пар пространств для разностного уравнения Вольтерра и об устойчивости его решений / Кубанский гос. университет. Краснодар, 2000. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 19.01.00, №94 В20OO.
2. *Афанасьева Т. Н., Цалюк З. Б.* Допустимость пар пространств относительно линейных разностных уравнений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. № 2. С. 12–20.
3. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
4. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 750 с.

Ключевые слова: нелинейное разностное уравнение, нелинейный разностный оператор, пространство ограниченных последовательностей, допустимость пар пространств

Статья поступила 14 января 2010 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар