УДК 539.3

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СДВИГОВЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН НА КРАЯХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ СО ЩЕЛЬЮ

Агаян К. Л.[1]

DIFFRACTION OF ELECTROELASTIC SHEAR PLANE WAVES AT THE EDGES OF THE SEMI-INFINITE ELECTRODES IN A PIEZOELECTRIC SPACE WITH AN OPENING

Aghayan K. L.

The compound piezoelectric space consisting of two identical half-spaces of 6 mm class, divided by a vacuum gap of finite width is considered. The boundary surfaces of both half-spaces are covered with a thin semi-infinite grounded metal layers (electrodes). The problem of tunnelling through the gap and diffraction on semi-infinite electrodes plane shear wave propagation in the upper half-space is investigated. The analytical solution of the problem is constructed. Asymptotic formulas defining characteristics of electro-elastic field in the lower half-space are obtained.

Keywords: wave field, diffraction, piezoelectric space, functional equation, residue, asymptotics

Рассмотрим пространство, состоящее из двух одинаковых пьезоэлектрических полупространств, разделенных вакуумным слоем толщины $2h$. В декартовой системе координат $Oxyz$ полупространства занимают области $\Omega_1\,(|x|<\infty;\ y>h,\ |z|<\infty)$ и $\Omega_2\,(|x|<\infty;\ y<-h,\ |z|<\infty)$, а вакуумный слой — $\Omega_0\,(|x|<\infty;\ h<y<h,\ |z|<\infty)$. Главные оси пьезоэлектрических полупространств (кристаллов) гексакональной симметрии класса 6mm параллельны оси Oz. Полуплоскости $x<0$ границ верхнего и нижнего полупространств покрыты тонкими полубесконечными металлическими заземленными слоями. Считая, что их жесткостью можно пренебречь, слои рассматриваются как электроды с нулевым потенциалом, занимающие области $\Omega_\pm\,(|x|<\infty;\ y=\pm h,\ |z|<\infty)$.

В кристалле, занимающем область Ω_1, из бесконечности под углом β к плоскости xz в сторону вершин электродов распространяются заданные плоские сдвиговые волны $w_\infty(x,y)\,e^{-i\omega t}$ и $\varphi_\infty(x,y)\,e^{-i\omega t}$, где

$$w_\infty(x,y)=e^{-ik_1x-ik_2y};\quad k_1=k\cos\beta,\quad k_2=k\sin\beta,\quad \varphi_\infty(x,y)=(e_{15}/\varepsilon_{11})\,w_\infty(x,y) \tag{1}$$

описывают амплитуды упругого перемещения и электрического потенциала падающих волн соответственно, $\beta\,(0<\beta<\pi/2)$ — угол скольжения падающих волн, k — волновое число, ω — частота колебаний, t — время, e_{15} — пьезомодуль, ε_{11} — диэлектрическая проницаемость [1].

Требуется определить дифрагированное электроупругое поле в каждой из областей $\Omega_j\ (j=0,1,2)$ пространства.

Единственное отличное от нуля упругое смещение $u_z^{(j)}(x,y,t)\ (j=1,2)$ и потенциал электрического поля $\varphi^{(j)}(x,y,t)\ (j=0,1,2)$ в соответствующих областях Ω_j ищем в виде бегущих волн

$$u_z^{(j)}(x,y,t)=w_j(x,y)\,e^{-i\omega t},\quad \varphi^{(j)}(x,y,t)=\varphi_j(x,y)\,e^{-i\omega t}. \tag{2}$$

Тогда в рамках квазистатической постановки задач для пьезоэлектрических тел данного кристаллографического класса [1] из (2) приходим к следующим краевым задачам от-

[1]Агаян Каро Леренцович, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института механики НАН Республики Армения; e-mail: Karo.Aghayan@gmail.com

носительно амплитуд:

$$\begin{gathered}\Delta w_j(x,y)+k^2 w_j(x,y)=0,\\ \Delta\varphi_j(x,y)-(e_{15}/\varepsilon_{11})\,w_j(x,y)=0,\\ (x,y)\in\Omega_j,\quad j=1,2;\end{gathered}\tag{3}$$

$$\begin{gathered}\Delta\varphi_0(x,y)=0,\quad (x,y)\in\Omega_0,\\ \tau_{yz}(x,\pm h)=0,\quad |x|<\infty,\\ D_{1y}(x,h+0)-D_{0y}(x,h-0)=\psi_1^-(x),\\ \varphi_1(x,h+0)=\varphi_0(x,h-0)=F_1^+(x),\\ D_{2y}(x,-h-0)-D_0(x,-h+0)=\psi_2^-(x),\\ \varphi_0(x,-h+0)=\varphi_2(x,-h-0)=F_2^+(x),\\ -\infty<x<\infty,\end{gathered}\tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}F_j^+(x)=0 \text{ при } x<0,\\ \psi_j^-(x)=0 \text{ при } x>0,\\ j=1,2,\end{gathered}$$

$D_{jy}(x,y)$ $(j=0,1,2)$ — нормальная компонента электрической индукции; Δ — оператор Лапласа. При этом решение должно удовлетворять условию излучения [2].

С учетом известных определяющих соотношений [1] (c_{44} — модуль сдвига)

$$D_{jy}(x,y)=e_{15}\frac{\partial w_j}{\partial y}-\varepsilon_{11}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y};$$

$$D_{0y}(x,y)=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\quad(\varepsilon_0=1);$$

$$\tau_{yz}^{(j)}(x,y)=c_{44}\frac{\partial w_j}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}$$

после преобразования Фурье решение краевых задач (3)–(4) сводится к следующим двум краевым задачам типа Римана в теории аналитических функций на действительной оси относительно Фурье-образов неизвестных функций $\bar F_j^+(\sigma)$ и $\bar\Psi_j^-(\sigma)$ $(j=1,2)$ [2–6]:

$$c_0|\sigma|\,\bar K_1(\sigma)\,\bar F_s^+(\sigma)-\bar\Psi_d^-(\sigma)=f(\sigma),\tag{5}$$

$$\bar K_0|\sigma|\,\bar K_2(\sigma)\,\bar F_d^+(\sigma)-h\bar\Psi_s^-(\sigma)=hf(\sigma),\tag{6}$$

$$f(\sigma)=c_1^*\delta(\sigma-k_1),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака,

$$\begin{gathered}\bar K_1(\sigma)=\varepsilon_0\Delta_4(\sigma)/c_0\Delta_1(\sigma),\\ \bar K_2(\sigma)\,\varepsilon_0\Delta_2(\sigma)/c_0\Delta_1(\sigma),\\ \bar K_0(\sigma)=\sigma h\operatorname{cth}(\sigma h),\end{gathered}\tag{7}$$

$$\begin{gathered}\bar F^+_{\binom{s}{d}}(\sigma)=\bar F_1^+(\sigma)\pm\bar F_2^+(\sigma),\\ \bar\Psi^-_{\binom{s}{d}}(\sigma)=\bar\Psi_1^-(\sigma)\pm\bar\Psi_2^-(\sigma),\\ \Delta_1(\sigma)=\varepsilon_{01}(\gamma-\chi|\sigma|),\quad \varepsilon_{01}=\varepsilon_0/\varepsilon_{11},\\ \Delta_2(\sigma)=\Delta_1(\sigma)+\gamma\operatorname{th}(|\sigma h|),\\ \Delta_4(\sigma)=\gamma+\Delta_1(\sigma)\operatorname{th}|\sigma h|,\\ \gamma=\sqrt{\sigma^2-k^2},\end{gathered}\tag{8}$$

$$c_0=\varepsilon_0+\varepsilon_{11}\left(1+\chi_1^2\right),\quad c_1^*=\frac{4\pi i\chi_2 k_1}{1+i\chi_2}e^{-ik_2h},$$

$$\chi=\frac{\chi_1^2}{1+\chi_1^2},\quad \chi_1^2=\frac{e_{15}^2}{c_{44}\varepsilon_{11}},\quad \chi_2=\chi\operatorname{tg}\beta.\tag{9}$$

В (8) $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}>0$ при $|\sigma|>k$, и $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, т. е. предполагается, что контур обходит точки ветвления $\sigma=-k$ сверху, а $\sigma=k$ снизу [8].

Каждая из дисперсионных функций $\Delta_j(\sigma)$ $(j=1,\,2,\,4)$ (8) на действительной оси имеют только два корня $\pm\sigma_j^*$. При этом они упорядочены следующим образом [1, 8]

$$0<k<\sigma_4^*<\sigma_2^*<\sigma_1^*<\infty.\tag{10}$$

Предполагается также, что при решении задач (5) и (6) контур интегрирования всюду совпадает с вещеественной осью и обходит точки $-\sigma_j^*$ сверху, а σ_j^* — снизу, обеспечивая тем самым условие излучения [2].

Таким образом, решение поставленной выше задачи свелось к решению двух независимых функциональных уравнений (5) и (6).

Факторизируя функции-коэффициенты (7) и решая функциональные уравнения методом Винера–Хопфа [7, 8, 10], получим решение уравнений (5), (6) в виде

$$\bar F^+_{\binom{1}{2}}(\sigma)=-\frac{1}{2}\left[\frac{c_1}{\sqrt{\sigma+i0}\bar K_1^+(\sigma)}\pm\right.$$
$$\left.\pm\frac{c_2}{\bar K_0^+(\sigma)\,\bar K_2^+(\sigma)}\right]\frac{1}{(\sigma-k_1+i0)},\tag{11}$$

$$\sqrt{\sigma+i0}=\lim_{\tau\to+0}\sqrt{\sigma+i\tau},$$

$$\delta(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\sigma-i0}-\frac{1}{\sigma+i0}\right),$$

$$c_1=\frac{2\sqrt{k_1}\chi_2 e_{15}}{c_0(1+i\chi_2)\,\bar K_1^-(k_1)}e^{-ik_2h},\tag{12}$$

$$c_2=\frac{2k_1\chi_2 e_{15}}{c_0(1+i\chi_2)\,\bar K_0^-(k_1)\,\bar K_2^-(k_1)}e^{-ik_2h},$$

Здесь $\bar{K}_j(\sigma) = \bar{K}_j^+(\sigma)\cdot\bar{K}_1^-(\sigma)$ $(j=1,2)$, где $\bar{K}_j^+(\alpha)(\alpha=\sigma+i\tau)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$, а $\bar{K}_j^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha<0$. При этом, $\bar{K}_j^{\pm}(\alpha)\to 1$ $(j=1,2)$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности и определяются формулами

$$\bar{K}_j^{\pm}(\sigma)=\exp\left(\bar{R}_j^{\pm}(\sigma)\right),\qquad \bar{R}_j^-(\sigma)=\bar{R}_j^+(-\sigma), \tag{13}$$

$$\bar{R}_j^+(\sigma)=\int_0^{\infty}R_j(x)e^{i(\sigma+i0)x}dx,\quad j=1,\,2,$$

$$R_j(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\overline{K}_j(\sigma)\right]e^{-i\sigma x}d\sigma.$$

Для $\bar{K}_0(\sigma)$ имеем

$$\bar{K}_0(\sigma)=(\sigma h)\operatorname{cth}(\sigma h)=\bar{K}_0^+(\sigma)\bar{K}_0^-(\sigma),$$

$$\bar{K}_0^{\pm}(\sigma)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(1\mp i\frac{\sigma h}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mp i\frac{\sigma h}{\pi}\right)}, \tag{14}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Имея решение функциональных уравнения (5), (6) в виде (11)–(14), после обратного преобразования Фурье для компонентов дифрагированного электроупругого поля в каждой из областей Ω_j $(j=0,1,2)$ получим представление:

в области Ω_1

$$w_1(x,y)=W_1(x,y)+w_{ref}^{(1)}(x,y)+w_{\infty}(x,y),$$

$$W_1(x,y)=\frac{\chi\varepsilon_0}{2\pi e_{15}}\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma|\,\bar{F}_{11}^+(\sigma)\,e^{-\gamma y_1}d\sigma,$$

$$y_1=y-h,$$

$$\bar{F}_{j1}^+(\sigma)=\left[\frac{\bar{F}_j^+(\sigma)}{\Delta_1(\sigma)}\right]e^{-i\sigma x},\quad j=1,\,2,$$

$$w_{ref}^{(1)}(x,y)=A_{ref}^{(1)}e^{-ik_1x+ik_2(y-2h)}, \tag{15}$$

$$A_{ref}^{(1)}=\frac{(i\chi_2-1)}{(1+i\chi_2)},$$

$$\varphi_1(x,y)=\varphi_1(x,y)+\varphi_{nh}^{(1)}(x,y)+\varphi_{ref}^{(1)}+\varphi_{\infty},$$

где $\varphi_{\infty}(x,y)$ дается формулой (1), а

$$\varphi_1(x,y)=\frac{\varepsilon_{01}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^-(\sigma,y)\,\bar{F}_{11}^+(\sigma)d\sigma,$$

$$\Delta^{\pm}(\sigma,y)=\gamma e^{\pm|\sigma|(y\pm h)}-\chi|\sigma|\,e^{\pm\gamma(y\pm h)}, \tag{16}$$

$$\varphi_{nh}^{(1)}(x,y)=-\frac{2i\chi_2e_{15}}{\varepsilon_{11}(1+i\chi_2)}e^{-k_1y_1}e^{-i(kx+k_2h)},$$

$$\varphi_{ref}^{(1)}(x,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{1-i\chi_2}{1+i\chi_2}\,e^{-ik_2(y-2h)}e^{-ikx};$$

в области Ω_0

$$\varphi_0(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\sigma)\,e^{-i\sigma x}d\sigma, \tag{17}$$

$$S(\sigma)=S^+(\sigma)\,\bar{F}_1^+(\sigma)+S^-(\sigma)\,\bar{F}_2^+(\sigma),$$

$$S^{\pm}(\sigma)=\frac{\operatorname{sh}(\sigma(y\pm h))}{4\pi\operatorname{sh}(2\sigma h)};$$

в области Ω_2

$$w_2(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\chi\varepsilon_0}{e_{15}}\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma|\,\bar{F}_{21}^+(\sigma)d\sigma,$$

$$\varphi_2(x,y)=\frac{\varepsilon_{01}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^+(\sigma,y)\,\bar{F}_{21}^+(\sigma)\,d\sigma. \tag{18}$$

Таким образом, компоненты электроупругого волнового поля в составном пространстве описываются формулами (15)–(18). При этом $w_{ref}^{(1)}(x,y)$ — амплитуда отраженной волны упругого перемещения, а $\varphi_{nh}^{(1)}(x,y)$ — амплитуда неоднородной (щелевой) [9] волны потенциала электрического поля.

2. Для полного и детального изучения характерных особенностей элетроупругого волнового поля в пьезоэлектрическом пространстве следует подробно исследовать интегральные составляющие, входящие в (15)–(18), так как именно этими составляющими обусловлено влияние полубесконечных электродов на распределение волнового поля. Здесь при исследовании этих интегралов использован подход работ [7, 10], в которых асимптотические формулы получены новым и, на наш взгляд, более доступным путем.

В связи со сложностью рассматриваемой задачи, коротко остановимся на исследовании волнового поля упругих перемещений только в области Ω_1, используя при этом результаты работ [7, 10]. Перемещения в этой области даются формулами (15).

Рассмотрим сначала область $\Omega_1^{(1)}$ ($x<0$, $y\geqslant h$) и при помощи контурного интегрирования представим интеграл из (15), в виде

$$W_1(x,y)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left\{g_a^-+g_a^+\right\}\frac{\tau\,\bar{M}^+(i\tau)}{(\tau+ik_1)\,e^{\tau|x|}}d\tau+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{k}\left\{g_b^-+g_b^+\right\}\frac{\sigma\bar{M}^+(\sigma)\,e^{-i\sigma x}}{\sigma-k_1+i0}d\sigma+$$
$$+w_{11}^{(pz)}(x,y)+w_{11}^{(sur)}(x,y),\quad(19)$$

$$g_a^{\pm}=e^{\pm i\gamma_\tau y_1}/a^{\pm},\quad g_b^{\pm}=e^{\pm i\gamma_\sigma y_1}/b^{\pm},$$
$$\gamma_\tau=\sqrt{k^2+\tau^2},\quad \gamma_\sigma=\sqrt{k^2-\sigma^2},$$
$$a^{\pm}=\sqrt{k^2+\tau^2}\pm\chi\tau,\quad b^{\pm}=\chi\sigma\pm\sqrt{k^2-\sigma^2},$$

$$w_{11}^{(pz)}(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau\gamma_\tau\bar{M}^+(i\tau)}{\gamma_\tau^2+\chi^2\tau^2}\frac{e^{-i\gamma_\tau y_1}e^{-\tau|x|}}{\tau+ik_1}d\tau,$$

$$w_{11}^{(sur)}(x,y)=$$
$$=A_{11}^{(sur)}e^{-\sqrt{\left(\sigma_1^*\right)^2-k^2}y_1}e^{-i\sigma_1^*|x|},\quad(20)$$

$$A_{11}^{(sur)}=\frac{i\sigma_1^*\left(\sigma_1^{*2}-k^2\right)\bar{M}^+(\sigma_1^*)}{\chi k^2(\sigma_1^*-k_1)},\quad(21)$$
$$\Delta_1(\sigma_1^*)=0,$$

$$\bar{M}^+(\sigma)=\frac{d_1}{\sqrt{\sigma+i0}\bar{K}_1^+(\sigma)}+$$
$$+\frac{d_2}{\bar{K}_0^+(\sigma)\,\bar{K}_2^+(\sigma)},\quad(22)$$
$$d_1=\frac{e_{15}}{2\chi c_{44}}c_1,\quad d_2=\frac{e_{15}}{2\chi c_{44}}c_2.$$

Следует отметить, что при получении (19) было учтено, что контур интегрирования обходит точку $\sigma=\sigma_1^*$ снизу, а точку $\sigma=k_1$ — сверху.

Подставляя (19) в (15), получим выражение, представляющее волновое поле в области $\Omega_1^{(1)}$ ($x<0$, $y\geqslant h$), где $w_{11}^{(sur)}(x,y)$ — амплитуда поверхностной волны, $w_{11}^{(pz)}(x,y)$ — амплитуда упругих перемещений, обусловленных чисто пьезоэффектом, а интегральные составляющие — амплитуды дифрагированных упругих волн. По этой формуле с достаточной точностью можно вычислить распределение упругих перемещений в ближней зоне [12].

Для более детального изучения влияния полубесконечных электродов на характер распределения волнового поля в рассматриваемой области пьезоэлектрика следует для интегральных составляющих (19) и (20) получить асимптотические формулы, позволяющие простыми аналитическими выражениями представить волновое поле и в дальних зонах.

Эти асимптотические формулы также получены при помощи подхода, изложенного в [7,10]. Не останавливаясь на подробностях, приведем окончательные результаты этих исследований, описывающие поведение волнового поля упругих перемещений в дальних зонах области $\Omega_1^{(1)}$ в полярных координатах (r,θ), т. е. при $r\to\infty$:

а) в секторе $\pi-\beta<\theta\leqslant\pi$

$$w_1(r,\theta)=w_{11}^{(sur)}(r,\theta)+w_{ref}^{(1)}(r,\theta)+$$
$$+w_\infty(r,\theta)+q_1(r,\theta)+$$
$$+q_{pz}^{(1)}(r,\theta)+O\left(r^{-2}\ln r\right),\quad(23)$$

$$w_{11}^{(sur)}(r,\theta)=A_{11}^{(sur)}e^{-r\sin\theta\sqrt{\left(\sigma_1^*\right)^2-k^2}-i\sigma_1^*r|\cos\theta|},$$
$$w_{ref}^{(1)}(r,\theta)=A_{ref}^{(1)}e^{-ikr\cos(\theta+\beta)}e^{-ik_2h},$$
$$w_\infty(r,\theta)=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)}e^{-ik_2h},$$
$$q_1(r,\theta)=-b_1\frac{e^{i(kr-\pi/4)}}{(kr)^{1/2}}+b_2\frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{2(kr)^{3/2}},\quad(24)$$

$$b_1=\frac{\pi^{-1/2}k^2|\sin2\theta|}{(\chi|k_\theta|+ik\sin\theta)}\left[\frac{d_1}{\sqrt{k_\theta}\bar{K}_1^+(k_\theta)}+\right.$$
$$\left.+\frac{d_2}{\bar{K}_0^+(k_\theta)\,\bar{K}_2^+(k_\theta)}\right]\frac{1}{2\sqrt{2}(k_\theta-k_1)},$$
$$k_\theta=k|\cos\theta|,\quad k_1=k\cos\beta,$$

$$b_2=\frac{3k|\sin\theta|}{2\sqrt{2k}}M(k_\theta)-$$
$$-\frac{3\sqrt{2}k^{3/2}}{8}|\sin2\theta|\left.\frac{dM}{d\sigma}\right|_{\sigma=k_\theta}+$$
$$+\frac{k^3}{2\sqrt{2}}\left|\sin^3\theta\right|\left.\frac{d^2M}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=k_\theta},$$

$$M(\sigma)=\frac{\sigma\bar{M}_{11}^+(\sigma)}{\chi\sigma+i\sqrt{k^2-\sigma^2}}\frac{1}{\sigma-k_1},$$

$$q_{pz}^{(1)}(r,\theta) = -\sqrt{\frac{\pi k c_0}{\varepsilon_{11}}}\frac{d_1 e^{-i\pi/4}}{2k_1|\cos\theta|^{3/2}}\frac{e^{ikr\sin\theta}}{(kr)^{-3/2}}, \quad (25)$$

$A_{11}^{(sur)}$ — дается формулой (21);

б) в секторе $\pi - \beta < \theta < \pi/2$

$$w_1(r,\theta) = w_{11}^{(sur)}(r,\theta) + w_{ref}^{(1)}(r,\theta) + w_\infty(r,\theta) + w_{ref}^{(2)}(r,\theta) + q_1(r,\theta) + q_{pz}^{(1)}(r,\theta) + O\left(r^{-2}\ln r\right), \quad (26)$$

$$w_{ref}^{(2)}(r,\theta) = A_{ref}^{(2)} e^{-ikr\cos(\theta+\beta)} e^{-ik_2 h},$$

$$A_{ref}^{(2)} = \frac{i\sqrt{k_1}}{(\chi k_1 + ik_2)} \times \left[\frac{d_1}{\bar{K}_1^+(k_1)} + \frac{d_2\sqrt{k_1}}{\bar{K}_0^+(k_1)\bar{K}_2^+(k_1)}\right];$$

в) по лучу $\theta = \pi - \beta$

$$w_1(r,\pi-\beta) = w_{11}^{(sur)}(r,\theta) + w_{ref}^{(1)}(r,\theta) + \frac{A_{ref}^{(2)}}{2} e^{ikr} + w_\infty(r,\theta) + O\left(r^{-1/2}\right), \quad r\to\infty.$$

Аналогичное представление волнового поля упругих перемещений получено также и для области $\Omega_2^{(1)}$ $(x > 0, y \geqslant h)$. Приведем формулу, представляющую асимптотическое поведение упругих перемещений по линии $y = h$ при $x \to +\infty$,

$$w_1(x,h) = A_{12}^{(sur)} e^{i\sigma_2^* x} + A_{14}^{(sur)} e^{i\sigma_4^* x} + \frac{i\chi_2 - 1}{1 + i\chi_2} e^{-ik_1 x} e^{-ikh} + A_{15}\frac{e^{i(kx+\pi/4)}}{(kx)^{3/2}} + O\left(x^{-2}\ln x\right), \quad (27)$$

$$x \to +\infty,$$

$$A_{12}^{(sur)} = \frac{d_2 c_0}{h\varepsilon_{11}} \frac{\operatorname{th}(\sigma_2^* h)\,\overline{K}_2^+(\sigma_2^*)\,\overline{K}_0^+(\sigma_2^*)}{(\sigma_2^* + k_1)\,B_{12}(\sigma_2^*)},$$

$$B_{12}(\sigma_2^*) = \varepsilon_{01}\left(\chi - \frac{\sigma_2^*}{\gamma_2^*}\right) + \frac{\sigma_2^*\operatorname{sh}(2\sigma_2^* h) - 2h\gamma_2^{*2}}{2\gamma_2^*\operatorname{ch}^2(\sigma_2^* h)},$$

$$\gamma_j^* = \sqrt{\sigma_j^{*2} - k^2}, \quad j = 2,4,$$

$$A_{14}^{(sur)} = \frac{i d_1 c_0}{\varepsilon_{11}} \frac{\sqrt{\sigma_4^*}\,\overline{K}_1^+(\sigma_4^*)}{B_{14}(\sigma_2^*)},$$

$$B_{14}(\sigma_2^*) = \frac{h\,\varepsilon_{01}(\chi\sigma_4^* - \gamma_4^*)}{\operatorname{ch}^2(\sigma_4^* h)} + \varepsilon_{01}\chi\operatorname{th}(\sigma_4^* h) - \frac{\sigma_4^*}{\gamma_4^*}\left[1 + \varepsilon_{01}\operatorname{th}(\sigma_4^* h)\right],$$

$$A_{15} = -\frac{2\sqrt{2}c_0}{\sqrt{\pi}\varepsilon_{11}\varepsilon_{01}^2\chi^2}\left[\frac{d_2\bar{K}_2^+(k)\,\bar{K}_0^+(k)}{kh\operatorname{cth}(kh)} + id_1\operatorname{cth}(kh)\,\bar{K}_1^+(k_1)\right]\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Полученные асимптотические формулы позволяют заключить, что полубесконечный электрод существенным образом влияет на качественное распределение волнового поля упругих перемещений. В частности, как следует из (16), (23) и (26), полубесконечный электрод возбуждает неоднородную волну $\varphi_{nh}^{(1)}(x,y)$ и поверхностные волны $w_{1k}^{(sur)}(x,y)$ $(k = 1,2,4)$. Далее, из сравнения формул (26) и (23) можно заметить, что полубесконечный электрод поглощает отраженную волну $w_{ref}^{(2)}(r,\theta)$ в секторе $\pi - \beta < \theta \leqslant \pi$, а из (26) следует, что по направлению луча $\theta = \pi - \beta$ полубесконечный электрод возбуждает перемещение $0.5A_{ref}^{(2)}e^{ikr}$. В (23) $q_{pz}^{(1)}(r,\theta)$ — волна, обусловленная присутствием электрода и распространяющаяся по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $\omega/k\sin\theta$. При этом на линии $y = h$ она теряет волновой характер.

Литература

1. *Балакирев М. К., Гилинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240 с.
2. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и незонансные являения в деформируемых средах. М.: Научный Мир. 1999. 247 с.
3. *Агаян К. Л., Григорян Э. Х., Джилавян С. А.* Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением // Изв. НАН РА. Механика. Т. 56. № 4. 2003. С. 3–17.

4. *Григорян Э. Х., Джилавян С. А.* Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пъезоэлектрическом пространстве // Изв. НАН РА. Механика. Т. 58. № 1. 2005. С. 38–50.
5. *Григорян Э. Х., Агаян К. Л.* Излучение плоской сдвиговой волны из упругого волновода в составное упругое пространство // Изв. НАН РА. Механика. Т. 60. № 3. 2007. С. 23–37.
6. *Григорян Э. Х., Синанян С. С.* Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пъезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем // Изв. НАН РА. Механика. Т. 62. № 1. 2009. С. 40–51.
7. *Агаян К. Л., Григорян Э. Х.* Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т. 63. № 1. С. 50–69.
8. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 294 с.
9. *Danoyan Z. N., Piliposian G. I.* Surface electroelastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer // Int. J. of Solids and Structures. 2008. Vol. 44. P. 5829–5847.
10. *Григорян Э. Х.* Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости // Уч. записки ЕГУ. 1979. № 3. С. 29–34.
11. *Григорян Э. Х., Агаян К. Л.* О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн // Доклады НАН Армении. Т. 110. № 3. 2010. С. 261–271.
12. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.

Ключевые слова: волновое поле, дифракция, пьезоэлектрическое пространство, функциональное уравнение, вычет, асимптотика

Статья поступила 10 марта 2011 г.
Институт механики НАН Республики Армения, г. Ереван
© Агаян К. Л, 2011