

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛ¹*Ватульян А. О.², Нестеров С. А.³***PARTICULARITIES OF INHOMOGENEOUS PROPERTIES IDENTIFICATION FOR THERMO-ELASTIC BODIES***Vatulyan A. O., Nesterov S. A.*

The identification functions problem characterizing inhomogeneous properties of thermo-elastic rod is considered. Inverse problem is formulated for transforms space. The iteration algorithm based on method of linearization and solution of Fredholm integral equation of the first kind is proposed. Results of numerical experiments are given.

Keywords: coefficient inverse problem, thermo-elasticity

В последнее время значительно возрос интерес к линейным моделям механики связанных полей для неоднородных тел. Это вызвано постоянно расширяющимся применением функционально-градиентных материалов в различных областях науки и техники, дающим новые возможности для оптимального проектирования конструкций при заданных условиях эксплуатации. При этом для термомеханических расчетов уже недостаточно знания набора постоянных коэффициентов переноса и модулей упругости, а требуется знание набора функций, характеризующих неоднородные свойства материалов. В случае однородных материалов коэффициенты, характеризующие их свойства, определялись из простых макроэкспериментов, и для многих материалов составлены обширные таблицы. Прямые измерения модулей упругости и коэффициентов переноса в случае неоднородных тел невозможны. Поэтому при неразрушающем контроле качества неоднородных материалов требуется ставить и решать коэффициентные обратные задачи (КОЗ). Количество работ, посвященных реконструкции теплофизических свойств материалов, довольно велико, однако большинство из них посвящено восстановлению коэф-

фициента теплопроводности и удельной теплоемкости в случае однородных, слоистых тел или температурной зависимости коэффициентов переноса [1]. В случае же неоднородных тел исследования, как правило, ограничиваются только идентификацией коэффициента теплопроводности в рамках КОЗ теплопроводности [2–4]. Задачу идентификации коэффициента теплопроводности исследовали Денисов А. М., Хайруллин М. Х., Chavent G., Kravaris C., Seinfeld J. H., Xu M. H., Cheng J. C., Chang S. Y., Кабанихин С. И., Гасанов А., Пененко А. В., Победря Б. Е., Кравчук А. С., Аризпе П. А. и др. Однако для ряда новых материалов необходимо учитывать связанность полей деформации и температуры и решать КОЗ термоупругости, которые для неоднородных тел недостаточно исследованы, ограничиваясь в основном слабо неоднородными материалами. Один из основных подходов к решению КОЗ основан на ее сведении к минимизации неквадратичного функционала невязки. При этом для минимизации функционала используют, как правило, градиентные методы [3] или генетические алгоритмы. При решении прямых задач используется в основном метод конечных элементов или конечных раз-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт П596).

²Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного Федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

³Нестеров Сергей Анатольевич, аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: 1079@list.ru

ностей [1–3]. Главная трудность при исследовании КОЗ термоупругости — формулировка операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов термоупругости и граничными полями перемещений и температуры. Поскольку соответствующие дифференциальные операторы имеют переменные коэффициенты, построить аналитические решения для таких операторов не представляется возможным. Однако в последние годы развит альтернативный подход к решению КОЗ в случае неоднородных тел. Задача об определении модулей является нелинейной задачей и может быть решена на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого строится решение линейной задачи. При этом линеаризация осуществляется, основываясь либо на условии ортогональности, либо на обобщенной теореме взаимности, либо на применении вариационного подхода. Последний подход был успешно применен к решению КОЗ теории упругости [5–7], теплопроводности [8, 9] и термоупругости в случае малости коэффициента связанности [10–13]. Решение же прямых одномерных задач основано на их сведении к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Рассмотрим продольные колебания жестко закрепленного на торце $x = 0$ неоднородного термоупругого стержня длины l под действием внезапно приложенной к торцу $x = l$ силы [14]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_x = E(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x) \theta \right), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= c(x) \rho(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \\ &+ T_0 \alpha(x) E(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \theta(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0, \\ \sigma_x(l, t) &= \sigma_0 H(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Здесь T_0 — начальная температура стержня, $\theta = T - T_0$ — прирост температуры от естественного состояния.

Перейдем в (1)–(5) к безразмерным параметрам и переменным, обозначая

$$z = \frac{x}{l}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k(zl)}{k_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(zl)}{c_0},$$

$$\bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zl)}{\rho_0}, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(zl)}{E_0},$$

$$\bar{\alpha}(z) = \frac{\alpha(zl)}{\alpha_0}, \quad \tau = \frac{\sqrt{E_0} t}{\sqrt{\rho_0 l}},$$

$$W(z, \tau) = \alpha_0 \theta, \quad U = \frac{u}{l}, \quad \Omega = \frac{\sigma_x}{E_0},$$

$$\delta = \frac{\alpha_0^2 T_0 E_0}{c_0 \rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{k_0}{c_0 \sqrt{E_0 \rho_0} l}, \quad \lambda = \frac{\sigma_x}{\sigma_0}.$$

Здесь $k_0, \alpha_0, c_0, \rho_0, E_0$ — некоторые характерные коэффициент теплопроводности, теплового расширения, удельной теплоемкости, плотности и модуля Юнга соответственно.

Тогда краевая задача (1)–(5) примет вид:

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (6)$$

$$\Omega_z = \bar{E}(z) \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\alpha}(z) W \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= \\ &= \bar{c}(z) \bar{\rho}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta \bar{\alpha}(z) \bar{E}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U(0, \tau) &= W(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau) = 0, \\ \Omega_z(1, \tau) &= \lambda H(\tau), \end{aligned} \quad (9)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial z}(z, 0) = 0. \quad (10)$$

Применим к уравнениям (6)–(8) и граничным условиям (9) преобразование Лапласа и, с учетом начальных условий (10), получим

$$\frac{d\tilde{\Omega}_z}{dz} = p^2 \bar{\rho}(z) \tilde{U}, \quad (11)$$

$$\tilde{\Omega}_z = \bar{E}(z) \left(\frac{d\tilde{U}}{dz} - \bar{\alpha}(z) \tilde{W} \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dz} \left(\bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}}{dz} \right) &= \\ &= p \bar{c}(z) \bar{\rho}(z) \tilde{W} + \delta p \bar{\alpha}(z) \bar{E}(z) \frac{d\tilde{U}}{dz}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}(0, p) = \tilde{W}(0, p) = 0, \quad \frac{d\tilde{W}}{dz}(1, p) = 0, \\ \tilde{\Omega}_z(1, p) = \frac{\lambda}{p}.\end{aligned}\quad (14)$$

После некоторых преобразований получим каноническую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трансформант:

$$\frac{d\tilde{W}}{dz} = \frac{1}{\bar{k}(z)}\tilde{Q}(z, p), \quad (15)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{Q}}{dz} = p\bar{c}(z)\bar{\rho}(z)\tilde{W}(z, p) + \\ + p\delta\bar{\alpha}^2(z)\bar{E}(z)\tilde{W}(z, p) + p\delta\bar{\alpha}(z)\tilde{\Omega}(z, p),\end{aligned}\quad (16)$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}}{dz} = p^2\bar{\rho}(z)\tilde{U}(z, p), \quad (17)$$

$$\frac{d\tilde{U}}{dz} = \frac{1}{\bar{E}(z)}\tilde{\Omega}(z, p) + \bar{\alpha}(z)\tilde{W}(z, p). \quad (18)$$

Здесь введены обозначения: p — параметр преобразования Лапласа, $\tilde{W}(z, p)$, $\tilde{Q}(z, p)$, $\tilde{\Omega}(z, p)$, $\tilde{U}(z, p)$ — безразмерные трансформанты температуры, теплового потока, напряжения, смещения соответственно.

Далее выполним следующую последовательность действий: проинтегрируем систему дифференциальных уравнений (15)–(18) по z на отрезке $[0, z]$, найдем постоянные интегрирования из граничных условий, исключим из системы (15)–(18) $\tilde{Q}(z, p)$ и $\tilde{U}(z, p)$, и, поменяв порядок интегрирования в двойных интегралах, получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned}\tilde{W}(z, p) = \int_0^1 K_1(z, \xi, p)\tilde{W}(\xi, p)d\xi + \\ + \int_0^1 K_2(z, \xi, p)\tilde{\Omega}(\xi, p)d\xi,\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}(z, p) = \int_0^1 K_3(z, \xi, p)\tilde{W}(\xi, p)d\xi + \\ + \int_0^1 K_4(z, \xi, p)\tilde{\Omega}(\xi, p)d\xi + f(p).\end{aligned}\quad (20)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}K_1(z, \xi, p) = -\frac{p}{\varepsilon}\bar{c}(\xi)\bar{\rho}(\xi) \int_0^{\min\{z, \xi\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)} - \\ - \frac{p}{\varepsilon}\delta\bar{\alpha}^2(\xi)\bar{E}(\xi) \int_0^{\min\{z, \xi\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},\end{aligned}$$

$$K_2(z, \xi, p) = -\frac{p}{\varepsilon}\delta\bar{\alpha}(\xi) \int_0^{\min\{z, \xi\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},$$

$$K_3(z, \xi, p) = -p^2\bar{\alpha}(\xi) \int_{\min\{z, \xi\}}^1 \bar{\rho}(\eta)d\eta,$$

$$K_4(z, \xi, p) = -p^2 \frac{1}{\bar{E}(\eta)} \int_{\min\{z, \xi\}}^1 \bar{\rho}(\eta)d\eta,$$

$$f(z, p) = \frac{\lambda}{p}.$$

Рассмотрим теперь продольные колебания жестко закрепленного на торце $x = 0$ неоднородного термоупругого стержня длины l под действием внезапно приложенного к торцу $x = l$ теплового потока [14]. В этом случае в математической постановке задачи нужно изменить граничные условия (4)

$$u(0, t) = \theta(0, t) = 0,$$

$$-k(l)\frac{\partial\theta}{\partial x}(l) = q_0H(t), \quad \sigma_x(l, t) = 0.$$

Приведение к безразмерному виду в этой задаче проводится аналогично первой, за исключением того, что

$$W(z, \tau) = \frac{k_0\theta}{q_0l}, \quad \tau = \frac{k_0t}{c_0\rho_0l^2}.$$

Выполняя построения, описанные выше, получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned}\tilde{W}(z, p) = \int_0^1 K_5(z, \xi, p)\tilde{W}(\xi, p)d\xi + \\ + \int_0^1 K_6(z, \xi, p)\tilde{\Omega}(\xi, p)d\xi + f_1(z, p),\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}(z, p) = & \int_0^1 K_7(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \\ & + \int_0^1 K_8(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi. \quad (22)\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}K_5(z, \xi, p) = & -p\bar{c}(\xi)\bar{\rho}(\xi) \int_0^{\min\{z, \xi\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)} - \\ & - p\delta\bar{\alpha}^2(\xi)\bar{E}(\xi) \int_0^{\min\{z, \xi\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},\end{aligned}$$

$$K_6(z, \xi, p) = -p\delta\bar{\alpha}(\xi) \int_0^{\min\{z, \xi\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},$$

$$K_7(z, \xi, p) = -\varepsilon^2 p^2 \bar{\alpha}(\xi) \int_{\min\{z, \xi\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta,$$

$$K_8(z, \xi, p) = -\varepsilon^2 p^2 \frac{1}{\bar{E}(\xi)} \int_{\min\{z, \xi\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta,$$

$$f_1(z, p) = -\frac{1}{p} \int_0^z \frac{d\xi}{\bar{k}(\xi)}.$$

При численном решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода применялся метод коллокаций с заменой интегралов их приближенными значениями по квадратурной формуле трапеций.

Обратную задачу анализируем в пространстве изображений по Лапласу, минуя процедуру обращения.

Рассмотрим подробно процедуру реконструкции удельной теплоемкости для первой постановки задачи; остальные коэффициенты при этом считаются известными. Для реконструкции необходимо заранее найти значения $\bar{c}(0)$ и $\bar{c}(1)$ восстанавливаемой функции на торцах. Процедура восстановления $\bar{c}(z)$ состоит из двух этапов. На первом этапе определяется начальное приближение по формуле $\bar{c}_0(z) = \bar{c}(0)(1-z) + \bar{c}(1)z$. На втором этапе уточняется закон изменения восстанавливаемой функции на основе метода линеаризации в окрестности некоторого известного состояния.

Рассмотрим состояние $\tilde{U}_{n+1}(1, p)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{E}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\alpha}(z)$, $\bar{c}_{n+1}(z)$, для которого известно $\tilde{U}_T(1, p) = \tilde{U}_{n-1}(1, p) + \beta\tilde{U}_n(1, p)$.

Для этого положим,

$$\bar{c}_{n+1}(z) = \bar{c}_{n-1}(z) + \beta\bar{c}_n(z),$$

$$\tilde{W}_{n+1}(z, p) = \tilde{W}_{n-1}(z, p) + \beta\tilde{W}_n(z, p), \quad (23)$$

$$\tilde{U}_{n+1}(z, p) = \tilde{U}_{n-1}(z, p) + \beta\tilde{U}_n(z, p),$$

$$\tilde{\Omega}_{n+1}(z, p) = \tilde{\Omega}_{n-1}(z, p) + \beta\tilde{\Omega}_n(z, p).$$

Здесь: β — формальный малый параметр, $\tilde{U}_T$ — безразмерная трансформанта торцевого смещения, вычисленная для точного закона.

Подставляя представление (23) в исходную задачу (11)–(14) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра β , получим следующие краевые задачи.

При β^0 :

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d}{dz} \left(\bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz} \right) = \\ = p\bar{c}_{n-1}(z)\bar{\rho}(z)\tilde{W}_{n-1} + \\ + p\delta\bar{\alpha}^2(z)\bar{E}(z)\tilde{W}_{n-1}(z, p) + \\ + \delta p\bar{\alpha}(z)\tilde{\Omega}_{n-1}, \quad (24)\end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_{n-1}}{dz} = p^2\bar{\rho}(z)\tilde{U}_{n-1}, \quad (25)$$

$$\tilde{\Omega}_{n-1} = \bar{E}(z) \left(\frac{d\tilde{U}_{n-1}}{dz} - \bar{\alpha}(z)\tilde{W}_{n-1} \right), \quad (26)$$

$$\tilde{U}_{n-1}(0, p) = \tilde{W}_{n-1}(0, p) = 0,$$

$$\frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz}(1, p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_{n-1}(1, p) = \frac{\lambda}{p}. \quad (27)$$

При β^1 :

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d}{dz} \left(\bar{k}(z) \frac{d\tilde{W}_n}{dz} \right) = \\ = p\bar{c}_{n-1}(z)\bar{\rho}(z)\tilde{W}_n(z, p) + \\ + p\delta\bar{\alpha}^2(z)\bar{E}(z)\tilde{W}_n(z, p) + \\ + p\bar{c}_n(z)\bar{\rho}(z)\tilde{W}_{n-1}(z) + \delta p\bar{\alpha}(z)\tilde{\Omega}_n, \quad (28)\end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{\Omega}_n}{dz} = p^2\bar{\rho}(z)\tilde{U}_n, \quad (29)$$

$$\tilde{\Omega}_n = \bar{E}(z) \left(\frac{d\tilde{U}_n}{dz} - \bar{\alpha}(z)\tilde{W}_n \right), \quad (30)$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_n(0, p) &= \tilde{W}_n(0, p) = 0, \\ \frac{d\tilde{W}_n}{dz}(1, p) &= 0, \quad \tilde{\Omega}_n(1, p) = 0.\end{aligned}\quad (31)$$

Далее выполним следующие преобразования: умножим уравнения (24) на $\tilde{W}_n$, (28) на $\tilde{W}_{n-1}$, вычтем одно из другого, а результат проинтегрируем по частям по отрезку $[0, 1]$. Для исключения промежуточных слагаемых умножим (25) на $\tilde{U}_n(z)$, (26) на $\tilde{\Omega}_n$, (29) на $\tilde{U}_{n-1}(z)$, (30) на $\tilde{\Omega}_{n-1}$ и проинтегрируем каждое произведение по частям на отрезке $[0, 1]$. Тогда с учетом граничных условий (27), (31) получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода для нахождения поправки реконструируемой функции

$$\begin{aligned}p \int_0^1 \bar{c}_n(z) \bar{\rho}(z) \tilde{W}_{n-1}^2 dz &= \\ &= -\lambda \delta(\tilde{U}_T - \tilde{U}_{n-1})|_{z=1}.\end{aligned}\quad (32)$$

Здесь $\tilde{U}_T(1, p)$ — вычисленное значение безразмерной трансформанты смещений на торце для точного закона изменения удельной теплоемкости, а $\tilde{U}_{n-1}(1, p)$ — вычисленное значение безразмерной трансформанты торцевого смещения на $(n-1)$ -й итерации для приближенного закона. Функция $\tilde{U}(1, p)$ находится путем интегрирования (18) на отрезке $[0, 1]$. На основе уравнения (32) строится итерационный процесс уточнения реконструируемой функции по схеме $\bar{c}_{n+1}(z) = \bar{c}_{n-1}(z) + \bar{c}_n(z)$.

Выполняя аналогичные действия для первой постановки задачи, получим другие интегральные уравнения Фредгольма первого рода, позволяющие находить поправку одной функций при известных других

$$\begin{aligned}\varepsilon \int_0^1 \bar{k}_n(z) \left(\frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz &= \\ &= -\lambda \delta(\tilde{U}_T - \tilde{U}_{n-1})|_{z=1},\end{aligned}\quad (33)$$

$$\begin{aligned}p \int_0^1 \bar{E}_n(z) \left(\frac{d\tilde{U}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz &= \\ &= -\lambda(\tilde{U}_T - \tilde{U}_{n-1})|_{z=1}.\end{aligned}\quad (34)$$

Для второй постановки получены интегральные уравнения для нахождения попра-

вок

$$\begin{aligned}\int_0^1 \bar{c}_n(z) \bar{\rho}(z) \tilde{W}_{n-1}^2(z, p) dz &= \\ &= \frac{1}{p^2} (\tilde{W}_T - \tilde{W}_{n-1})|_{z=1},\end{aligned}\quad (35)$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \bar{k}_n(z) \left(\frac{d\tilde{W}_{n-1}}{dz} \right)^2 dz &= \\ &= \frac{1}{p} (\tilde{W}_T - \tilde{W}_{n-1})|_{z=1},\end{aligned}\quad (36)$$

$$\begin{aligned}\delta \int_0^1 \bar{E}_n(z) \tilde{W}_{n-1}^2 dz &= \\ &= \frac{1}{p^2} (\tilde{W}_T - \tilde{W}_{n-1})|_{z=1}.\end{aligned}\quad (37)$$

Решение интегральных уравнений (32)–(37) является некорректной задачей и требует регуляризации. В работе применяется метод регуляризации Тихонова [15]. При дискретной реализации метода Тихонова осуществлен следующий принцип выбора набора параметров $\{p_j\}_{j=1}^{m+1}$:

1) отображение множества $p \in [0, +\infty)$ в отрезок $\mu \in [0, 1]$ осуществлено по правилу $\mu^2 = p^2 (1 + p^2)^{-1}$;

2) построение равномерного разбиения отрезка $\mu \in [\delta_1, 1 - \delta_1]$ точками $\{\mu_j\}_{j=1}^{m+1}$;

3) вычисление $\{p_j\}_{j=1}^{m+1}$ при помощи обратного отображения набора $\{\mu_j\}_{j=1}^{m+1}$.

Критерием выхода из итерационного процесса является стабилизация функционала невязки между точными $\tilde{U}_T(1, p)$ и вычисленными $\tilde{U}_{n-1}(1, p)$ безразмерными торцевыми перемещениями в изображениях (для первой постановки)

$$J_1 = \int_0^\infty (\tilde{U}_{n-1}(1, p) - \tilde{U}_T(1, p))^2 dp$$

и точной $\tilde{W}_T(1, p)$, и вычисленной $\tilde{W}_{n-1}(1, p)$ безразмерной торцевой температурой в изображениях (для второй постановки)

$$J_2 = \int_0^\infty (\tilde{W}_{n-1}(1, p) - \tilde{W}_T(1, p))^2 dp.$$

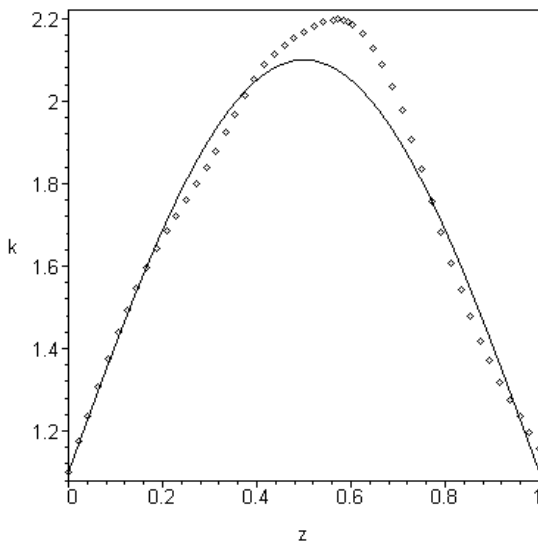


Рис. 1

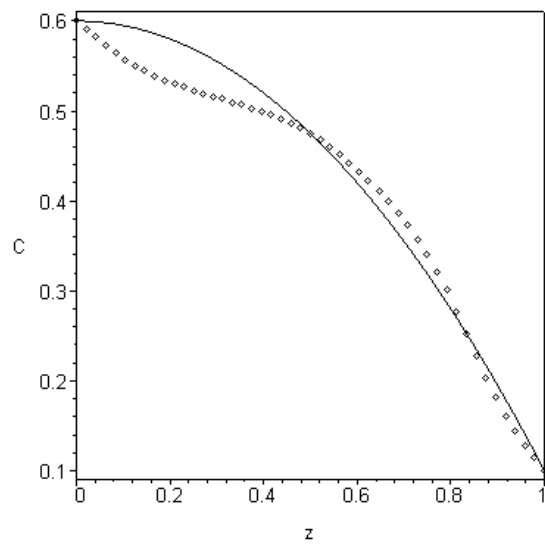


Рис. 2

При составлении ядер интегральных уравнений Фредгольма первого рода вычисление производной $\frac{d\tilde{W}}{dz}$ осуществляется по формуле (15), а производной $\frac{d\tilde{U}}{dz}$ — по формуле (18).

В работе натурный эксперимент заменен вычислительным. При этом восстанавливалась одна безразмерная функция, все остальные полагались известными и равными единице. В ходе масштабных вычислительных экспериментов исследовалось влияние параметра связанности, зашумления входной информации, типа нагружения, монотонности функций, параметра регуляризации, количества узлов в квадратурной формуле на результаты реконструкции. Выяснено, что увеличение количества разбиений в квадратурной формуле более 20 незначительно снижает погрешность восстановления, но сильно увеличивает затраты машинного времени; постепенное увеличение параметра связанности $\delta \in [0,001; 0,4]$ незначительно увеличивает погрешность реконструкции; для многих функций устойчивая реконструкция возможна при допустимом диапазоне параметра регуляризации $\alpha \approx 10^{-4} \div 10^{-8}$. Восстанавливались гладкие функции: степенные, тригонометрические, экспоненциальные; немонотонные функции восстанавливаются с большей погрешностью, чем монотонные. Оказалось, что при тепловом нагружении намного лучше, чем при механическом, восстанавливаются теплофизические коэффициенты: удельная теплоемкость и коэффициент теплопро-

водности. В то же время модуль Юнга лучше восстанавливается при механическом нагружении. Восстановление удельной теплоемкости при механическом нагружении возможно только для параметра связанности $\delta \geq 0,1$. Для аналогии с реальными экспериментами были проведены вычислительные эксперименты при зашумлении входной информации аддитивным образом. Выяснено, что процедура реконструкции удельной теплоемкости и модуля Юнга при тепловом нагружении даже при однопроцентном шуме практически невозможна. В то же время процедура реконструкции коэффициента теплопроводности при тепловом нагружении и всех коэффициентов при механическом нагружении устойчива к 5–6 % шумам. Погрешность реконструкции не превышает 30 %. Оказалось, что наибольшая погрешность удельной теплоемкости возникала в окрестности торца $z = 0$, а коэффициента теплопроводности — в окрестности торца $z = 1$. Это связано с особенностью ядер интегральных уравнений, обращающихся в нуль на соответствующих торцах.

На рис. 1–3 представлены результаты реконструкции функций, при этом сплошной линией изображен точный закон, точками — восстановленный. В расчетах приняты следующие безразмерные параметры: $\lambda = 0,05$, $\varepsilon = 10^{-5}$. На рис. 1 представлен результат восстановления немонотонной функции $\bar{k}(z) = 1,1 + \sin(\pi z)$ при тепловом нагружении. Начальное приближение $\bar{k}_0(z) = 1,1 + z$, параметр регуляризации — $\alpha = 10^{-7}$, па-

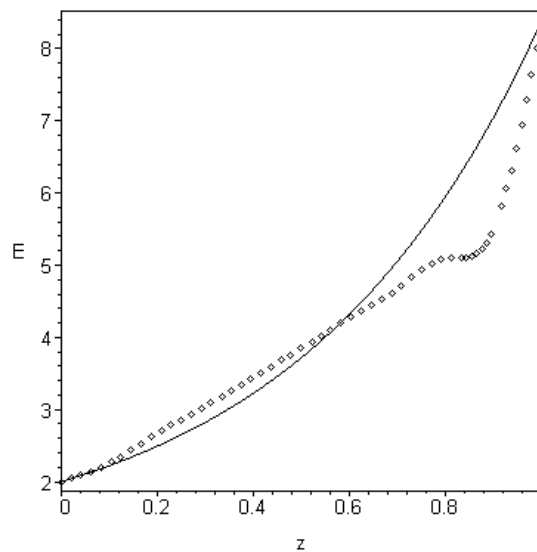


Рис. 3

параметр связанности $\delta = 0,001$. При этом на пятой итерации погрешность восстановления не превысила 10% при невязке $2 \cdot 10^{-4}$. На рис. 2 приводится пример реконструкции убывающей функции $\bar{c}(z) = 0,6 - \frac{z^2}{2}$ при тепловом нагружении. Параметр регуляризации — $\alpha = 10^{-7}$, начальное приближение — $\bar{c}_0(z) = 0,6 - 0,5z$, параметр связанности — $\delta = 0,4$. Погрешность реконструкции во внутренних точках стержня после шестой итерации не превысила 13% при невязке $2 \cdot 10^{-7}$. На рис. 3 представлен график реконструкции возрастающей функции $E(z) = 1 + e^{2z}$ при механическом нагружении. Начальное приближение — $\bar{E}_0(z) = 2 + 4,2z$, параметр регуляризации — $\alpha = 10^{-9}$, параметр связанности — $\delta = 0,001$. Погрешность реконструкции после третьей итерации не превысила 20%.

Результаты вычислительных экспериментов показали достаточную эффективность предложенного подхода для реконструкции монотонных теплофизических и механических характеристик неоднородных материалов с любым параметром связанности.

Литература

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
2. Победря Б. Е., Кравчук А. С., Аризе П. А. Идентификация коэффициентов нестационарного уравнения теплопроводности // Вычислительная механика сплошных сред. 2008. Т. 1. № 4. С. 78–87.
3. Кабанихин С. И., Гасанов А., Пененко А. В. Метод градиентного спуска для решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности // Сибирский журнал вычислительной математики. Т. 11. 2008. № 1. С. 41–54.
4. Xu M. H., Cheng J. C., Chang S. Y. Reconstruction theory of the thermal conductivity depth profiles by the modulated photo reflectance technique // Journal of Applied physics. Vol. 84. No. 2. С. 675–682.
5. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 222 с.
6. Бочарова О. В., Ватульян А. О. Обратные задачи для упругого неоднородного стержня // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2008. № 3. С. 33–37.
7. Бочарова О. В., Ватульян А. О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 3. С. 281–288.
8. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном подходе к восстановлению коэффициентов переноса // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2009. № 3. С. 39–43.
9. Нестеров С. А. О реконструкции коэффициента теплопроводности неоднородного стержня // Мат. моделирование и биомеханика в современном университете: тез. докладов всеросс. школы-семинара пос. Дивногорское. 2008. С. 75–76.
10. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. № 3. С. 24–30.
11. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном подходе к восстановлению коэффициентов переноса и модуля Юнга неоднородно-

- го стержня // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды 13 междунар. конф. Ростов-н/Д. 2009. С. 44–48.
12. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях постановки коэффициентных обратных задач термоупругости для неоднородного стержня // Теоретическая и прикладная механика. 2009. Вып. 46. С. 118–124.
13. Ватульян А. О., Нестеров С. А. К определению неоднородных свойств термоупругих тел // Современные проблемы математики, механики, информатики. Материалы междунар. научной конф. Тула. 2010. С. 114–118.
14. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
15. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 289 с.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, термоупругость

Статья поступила 23 декабря 2010 г.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

© Ватульян А. О., Нестеров С. А., 2011