

УДК 532.59+539.3+534.12

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГИДРОУПРУГОСТИ ПОГРУЖЕННОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

*Лукащик Е. П.<sup>1</sup>, Иванисова О. В.<sup>2</sup>*

RESEARCH OF DYNAMIC HYDROELASTICITY OF THE SUBMERGED PLATE ON THE BASIS  
OF THE GENERALIZED FUNCTIONS THEORY

Lukashchik E. P., Ivanisova O. V.

The mathematical model of hydroelastic interactions at the oscillations of a thin elastic plate into heavy fluid is created by generalized functions theory. Data of the numerical experiments display the development of the deformation process and behaviour of hydrodynamic and elastic characteristics. The critical values of parameters corresponding to dynamic instability of the oscillating plate are identified.

Keywords: generalized function, hydroelasticity, heavy fluid, dynamic instability

### Введение

Плотины гидроузлов, гидротехнические затворы, лопадки турбин, пластинчатые экраны в контурах атомных электростанций, крылья и рулевые плоскости и многие другие элементы гидроконструкций могут быть схематизированы тонкими упругими пластинами (постоянной или переменной толщины), колеблющимися в жидкости.

Первые исследования в области динамики гидросооружений, как правило, основывались на предположении о совпадении форм колебаний упругих тел в жидкости и пустоте. Такой подход позволил Лэмбу [1] определить первые две собственные частоты колебаний круглой пластинки, заземленной по контуру. Примененный им метод источников с успехом использован в многочисленных работах его последователей. В [2,3] при определении гибких перемещений плавающей пластины используется разложение по формам свободных колебаний в пустоте. Гидроупругий расчет элементов гидросооружений потребовал разработки методики исследований устойчивости упругих пластин. Для [4,7] характерно усложнение моделей жидкости и

упругого тела, расширение арсенала используемых методов, а также учет большего числа факторов, влияющих на динамические характеристики системы «упругое тело – жидкость». Отметим, что классическим руководством по аэроупругости и по сей день остается работа Бисплингоффа, Халфмена, Эшли [8].

Предметом исследований в настоящей работе являются волновые движения, возникающие в несжимаемой жидкости при колебаниях погруженной упругой тонкой пластинки. Гармонические колебания представляют интерес и как частный случай зависимости от времени, и как подход к решению произвольных нестационарных задач, так как в силу принципа суперпозиции для линейных систем произвольная зависимость от времени может быть разложена на гармонические составляющие в виде ряда или интеграла Фурье. При этом для каждой гармоники формулируется независимая задача, совпадающая с соответствующей задачей для установившихся гармонических колебаний.

Математическая постановка и исследование данной задачи гидроупругости проводились на основе теории обобщенных функ-

<sup>1</sup>Лукащик Елена Павловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: lep\_9091@mail.ru

<sup>2</sup>Иванисова Ольга Владимировна, преподаватель кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: zah-ivanisov@yandex.ru

ций [9, 10], позволяющей в математически корректной форме представить решение многих задач математической физики.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу о периодических колебаниях упругой пластины, погруженной в тяжелую жидкость.

Ось  $Ox$  направим вдоль средней линии пластинки, а ось  $Oy$  проведем через центр пластины и направим вверх против силы тяжести  $g$ . Таким образом, пластинке соответствует на оси  $Ox$  отрезок  $[-a, a]$ ,  $a$  — полуширина пластины. Расстояние между пластиной и невозмущенным уровнем свободной поверхности обозначим через  $H$ . В уравнении свободной поверхности  $y = H + \eta(x, t)$  и в уравнении  $y = f_0(x, t) + f(x, t)$ , определяющем форму тонкой упругой пластины, отдельно выделим деформационные составляющие:  $\eta(x, t)$  — изменения свободной поверхности относительно невозмущенного уровня,  $f(x, t)$  — упругие смещения относительно заданной первоначальной формы пластины  $f_0(x, t)$ .

Геометрическая форма упругой пластины заранее не известна и определяется в зависимости от возникающих гидродинамических нагрузок, в то время как сами гидродинамические нагрузки существенно зависят от упругих перемещений пластины. В этом случае задача определения перепада давления и задача определения упругих перемещений должны решаться совместно.

Принимаем, что деформации свободной поверхности, а также прогибы пластины малы по сравнению с шириной пластины, следовательно, малыми будут и образующиеся волны, в силу чего можем принять обычные упрощения теории волн малой амплитуды.

При изучении установившихся колебаний в линейной постановке зависимость от времени для всех величин будет выражаться гармоническими функциями. Для потенциала возмущенных скоростей частиц жидкости используем представление в комплексном виде

$$\varphi(x, y, t) = \tilde{\varphi}(x, y)e^{-i\omega t},$$

где  $\tilde{\varphi}(x, y)$  — комплексная амплитуда потенциала скорости,  $\omega$  — частота колебаний пластины.

При условии, что период деформации пластины совпадает с периодом её колебаний, распределение упругих перемещений

представим в виде

$$f(x, t) = \tilde{f}(x)e^{-i\omega t}.$$

В результате все операции, выполняемые над гармоническими величинами, можно свести к операциям над комплексными амплитудами. В дальнейшем значок « $\sim$ » в обозначениях комплексных амплитуд будем опускать.

Комплексная амплитуда  $\varphi(x, y)$  в области течения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1.1)$$

с граничными условиями:

Условие непротекания пластины ( $y = 0$ ,  $x \in [-a, a]$ ):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y(x) = v_0(x) - i\omega f(x). \quad (1.2)$$

Считаем, что вертикальная составляющая скорости точек пластины  $v_y(x)$  складывается из заданного возмущения  $v_0(x) = -i\omega f_0(x)$  (кинематическое возмущение) и составляющей, вызванной упругими перемещениями пластины.

Условия на свободной поверхности жидкости ( $y = H$ ):

1) динамическое условие постоянства давления на свободной границе

$$-i\omega\varphi + g\eta = 0, \quad (1.3)$$

2) кинематическое условие, означающее, что свободная граница является линией тока

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -i\omega\eta. \quad (1.4)$$

Объединяя условия (1.3) и (1.4), получим условие для потенциальных течений на свободной поверхности тяжелой жидкости

$$-\omega^2\varphi + g\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad y = H. \quad (1.5)$$

Условие на бесконечной глубине

$$|\varphi(x, y)| \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow -\infty. \quad (1.6)$$

Условие излучения при  $x \rightarrow \pm\infty$  примет вид

$$\varphi(x, y) = B_{\pm}e^{\pm i\sigma x}, \quad \sigma > 0. \quad (1.7)$$

Коэффициенты  $B_{\pm}$  и волновые числа  $\sigma$  определяются параметрами задачи.

Для определения прогибов пластины под действием гидродинамических сил используем линейное дифференциальное уравнение

изгиба пластины при наличии заданных постоянных усилий в срединной плоскости [11]. Перемещения пластины определяются влиянием гидродинамических сил, а также силы тяжести, которая для весомой жидкости выступает в качестве массовой силы

$$-\rho_0 h_0 \omega^2 f + D \frac{d^4 f}{dx^4} = P(x) - \rho g f, \quad (1.8)$$

где  $D$  — изгибная жесткость пластины,  $h_0$  — толщина пластины,  $\rho_0$  — плотность материала пластины,  $\rho$  — плотность жидкости,  $P(x)$  — гидродинамическое давление.

Различные способы закрепления упругой пластины задают граничные условия для уравнения изгиба (1.8).

По распределению упругих перемещений можно определить изгибающий момент и перерезывающую силу по следующим формулам [11]:

$$M(x) = -D \frac{d^2 f(x)}{dx^2}; \quad Q(x) = -D \frac{d^3 f(x)}{dx^3}.$$

Введем в рассмотрение функцию, характеризующую скачок касательных скоростей в точках пластины

$$\gamma(x) = \frac{\partial \varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_-}{\partial x}, \quad x \in [-a, a].$$

Здесь индексы «+» и «-» указывают на величины, относящиеся соответственно к верхней и к нижней поверхности пластинки.

С физической точки зрения функцию  $\gamma(x)$  можно интерпретировать как интенсивность вихревого слоя, моделирующего влияние пластины на невозмущенное течение жидкости. Считая, что завихренность вне пластины отсутствует, продолжим функцию  $\gamma(x)$  на всю действительную ось, определив ее значения за пределами отрезка  $[-a, a]$  нулевыми.

Для определения гидродинамических сил необходимо определить распределение гидродинамического давления  $P(x)$  по поверхности пластины. Используя интеграл Коши-Лагранжа, выразим давление через потенциал возмущенных скоростей

$$P(x) = -i\rho\omega(\varphi_+ - \varphi_-) = -i\rho\omega \int_{-a}^x \gamma(\xi) d\xi.$$

Требование ограниченности давления на краях профиля приводит к равенству

$$\int_{-a}^a \gamma(\xi) d\xi = 0. \quad (1.9)$$

Опираясь на физический смысл функции  $\gamma(x)$ , (1.9) можно интерпретировать как условие бесциркуляционности течения.

Таким образом, математическая модель колебательного движения представляет собой связанную задачу гидроупругости тонкой упруго-деформируемой пластины. Для решения поставленной задачи (1.1)–(1.8) примем гидродинамический подход, а именно: задача изгиба пластины будет считаться вспомогательной для определения возмущений скорости точек пластины, формирующих распределение давления жидкости на пластину.

## 2. Определение упругих перемещений

Введем безразмерные величины

$$\bar{f} = \frac{f}{a}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega a}$$

и воспользуемся следующими обозначениями для основных параметров:  $m = (\rho_0 h_0)/(\rho a)$  — относительная масса,  $\nu = (\omega^2 a)/g$  — приведенная частота,  $\beta = (\rho g a^4)/D$  — коэффициент упругости. Запишем в безразмерном виде уравнение цилиндрического изгиба упругой пластины

$$\frac{d^4 \bar{f}}{d\bar{x}^4} - \mu^4 \bar{f} = -i\beta\nu \int_{-1}^{\bar{x}} \bar{\gamma}(s) ds, \quad (2.1)$$

где

$$\mu^4 = \frac{(\rho_0 h_0 \omega^2 - \rho g) a^4}{D} = (m\nu - 1)\beta.$$

Приведем в безразмерном виде формулы для определения коэффициентов изгибающего момента и перерезывающей силы соответственно:

$$\bar{M} = -\frac{1}{2\beta\nu} \frac{d^2 \bar{f}}{d\bar{x}^2}, \quad \bar{Q} = -\frac{1}{2\beta\nu} \frac{d^3 \bar{f}}{d\bar{x}^3}, \quad (2.2)$$

где

$$\bar{M} = \frac{M}{2\rho\omega^2 a^4}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{2\rho\omega^2 a^3}.$$

Черта над безразмерными величинами в дальнейшем будет опущена.

При выполнении соотношения

$$\rho_0 h_0 \omega^2 > \rho g,$$

например, для *относительно тяжелых* погруженных пластин, уравнение (2.1) по виду совпадает с уравнением вынужденных колебаний упругой пластины [12]. Решение данного уравнения проводим методом функций Грина. Для построения функции Грина используем балочные функции Крылова [11]

$$\begin{aligned} S(x) &= 0,5(\operatorname{ch} x + \cos x), \\ V(x) &= 0,5(\operatorname{sh} x - \sin x), \\ U(x) &= 0,5(\operatorname{ch} x - \cos x), \\ T(x) &= 0,5(\operatorname{sh} x + \sin x), \end{aligned}$$

для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} S'(x) &= V(x), & V'(x) &= U(x), \\ U'(x) &= T(x), & T'(x) &= S(x). \end{aligned}$$

Вид функции Грина зависит от условий закрепления упругой пластины. Приведем выражения, полученные для прогибов свободно опертой и консольной балки.

*а) Свободно опертая балка (шарнирное закрепление).* В этом случае края пластинки оперты и могут свободно поворачиваться, то есть прогиб и изгибающий момент на краях должны быть нулевыми

$$f(\pm 1) = f''(\pm 1) = 0.$$

Выражение для упругих перемещений представим в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{i\nu}{m\nu - 1} \times \\ &\times \left\{ \int_{-1}^x \gamma(\xi) [1 - S(\mu(x - \xi))] d\xi + \right. \\ &\left. + A^a V(\mu(1 + x)) + B^a T(\mu(1 + x)) \right\}, \quad (2.3) \end{aligned}$$

где константы определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A^a &= \frac{-1}{V^2(2\mu) - T^2(2\mu)} \times \\ &\times \int_{-1}^1 \gamma(s) \left\{ V(2\mu) [1 - S(\mu(1 - s))] + \right. \\ &\left. + T(2\mu) U(\mu(1 - s)) \right\} ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^a &= \frac{1}{V^2(2\mu) - T^2(2\mu)} \times \\ &\times \int_{-1}^1 \gamma(s) \left\{ V(2\mu) U(\mu(1 - s)) + \right. \\ &\left. + T(2\mu) [1 - S(\mu(1 - s))] \right\} ds. \end{aligned}$$

*б) Консольная балка.* В этом случае один конец пластинки зажат, то есть прогиб в точках этого края равен нулю и плоскость, касательная к изогнутой срединной поверхности, совпадает со срединной плоскостью пластинки до изгиба. Второй край пластинки в этом случае свободен. Эти физические требования математически выражаются соотношениями

$$f(-1) = f'(-1) = f''(1) = f'''(1) = 0.$$

Выражения для упругих перемещений консольной балки имеют вид

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{i\nu}{m\nu - 1} \times \\ &\times \left\{ \int_{-1}^x \gamma(\xi) [1 - S(\mu(x - \xi))] d\xi + \right. \\ &\left. + A^b V(\mu(1 + x)) + B^b U(\mu(1 + x)) \right\}, \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^b &= \frac{1}{T(2\mu)V(2\mu) - S^2(2\mu)} \times \\ &\times \int_{-1}^1 \gamma(s) \left\{ V(2\mu) U(\mu(1 - s)) - \right. \\ &\left. - S(2\mu) T(\mu(1 - s)) \right\} ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^b &= \frac{1}{T(2\mu)V(2\mu) - S^2(2\mu)} \times \\ &\times \int_{-1}^1 \gamma(s) \left\{ T(2\mu) T(\mu(1 - s)) - \right. \\ &\left. - S(2\mu) U(\mu(1 - s)) \right\} ds. \end{aligned}$$

### 3. Решение гидродинамической задачи

#### 3.1. Получение сверточного уравнения

Запишем в безразмерном виде гидродинамическую часть задачи (1.1), (1.2), (1.5),

(1.6)

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \nu\varphi &= 0, \quad y = h = \frac{H}{a}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= v_y(x), \quad y = 0, \quad |x| < 1, \\ |\varphi| &\rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Потенциал возмущенных скоростей  $\varphi(x, y)$  будем определять в пространстве обобщенных функций медленного роста [9]. Эффективным средством решения задач математической физики является операционное исчисление. В нашем случае в исследованиях используем преобразование Фурье, которое для обобщенных функций данного пространства всегда существует [10]. В Фурье-образах задача (3.1) превращается в краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \Phi_y'' - \alpha^2\Phi &= 0, \\ -\nu\Phi + \Phi_y' &= 0, \quad y = h, \\ \Phi_y' &= V(\alpha), \quad y = 0, \\ |\Phi| &\rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, y) &= F[\varphi(x, y)](\alpha), \\ V(\alpha) &= F[\varphi_y(x, 0)](\alpha). \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия, решение задачи (3.2) будем искать в виде пары функций, которые определим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_-(\alpha, y) &= A(\alpha)e^{|\alpha|y} \text{ при } y < 0, \\ \Phi_+(\alpha, y) &= B(\alpha)e^{|\alpha|y} + C(\alpha)e^{-|\alpha|y} \end{aligned}$$

при  $0 < y < h$ .

Используя условие на свободной поверхности (при  $y = h$ ), требование непрерывности нормальных производных при  $y = 0$

$$\frac{\partial\Phi_-}{\partial y} = \frac{\partial\Phi_+}{\partial y},$$

а также представление для Фурье-образа вихревой интенсивности

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= F[\gamma(x)](\alpha) = \\ &= -i\alpha(\Phi_+(\alpha, +0) - \Phi_-(\alpha, -0)), \end{aligned}$$

придем к следующей зависимости:

$$\begin{aligned} e^{-2|\alpha|h}(|\alpha| + \nu)\Gamma(\alpha) &= \\ &= -2i\alpha(|\alpha| - \nu)B(\alpha). \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\Gamma(\alpha)$  как Фурье-образ финитной функции является мультиплексором в пространстве обобщенных функций [9].

Рассматриваем (3.3) как уравнение относительно обобщенной функции  $B(\alpha)$ . Его общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{-2i}(|\alpha| + \nu)e^{-2|\alpha|h} \mathcal{P}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \times \\ &\times \mathcal{P}\left(\frac{1}{|\alpha| - \nu}\right) + C_1\Gamma(-\nu)\delta(\alpha + \nu) + \\ &+ C_2\Gamma(\nu)\delta(\alpha - \nu) + C_3\Gamma(0)\delta(\alpha), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $C_i, i = \overline{1, 3}$  — произвольные постоянные, а обобщенные функции  $\mathcal{P}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$  и  $\mathcal{P}\left(\frac{1}{|\alpha| - \nu}\right)$  действуют на основные функции как интеграл в смысле главного значения по Коши

$$\begin{aligned} \left(f(\alpha), \frac{1}{\alpha}\right) &= \text{Vp} \int_a^b \frac{f(\alpha)}{\alpha} d\alpha = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_a^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^b \right) \frac{f(\alpha)}{\alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Здесь и ниже в преобразованиях применяется известное для обобщенной функции Дирака соотношение

$$f(\alpha)\delta(\alpha - \nu) = f(\nu)\delta(\alpha - \nu).$$

Значение Фурье-образа нормальной скорости при  $y = 0$  представляется в виде

$$|\alpha|B(\alpha) \left( 1 - \frac{|\alpha| - \nu}{|\alpha| + \nu} e^{2|\alpha|h} \right) = V(\alpha),$$

что с учетом (3.4) приведет к выражению

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)K(\alpha) + C_1^*\Gamma(-\nu)\delta(\alpha + \nu) + \\ + C_2^*\Gamma(\nu)\delta(\alpha - \nu) &= V(\alpha), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$K(\alpha) = \frac{\text{sign } \alpha}{2i} \left( 1 - \frac{|\alpha| + \nu}{|\alpha| - \nu} e^{-2|\alpha|h} \right).$$

Выбор методики во многом определяется особенностями поведения исследуемой функции  $K(\alpha)$ . Нетрудно установить, что при  $\alpha \rightarrow \infty$

$$K(\alpha) = \frac{1}{2i} \text{sign}(\alpha) + o(1).$$

В точке  $\alpha = 0$  нарушается однозначность данной функции.

Поскольку  $\gamma(x)$  — обобщенная функция с компактным носителем, то ее свертка с обобщенной функцией медленного роста переходит при преобразовании Фурье в произведение образов  $F[\gamma]F[k] = F[\gamma * k]$ , где  $k(x) = F^{-1}[K(\alpha)](x)$  [10]. Применением обратного преобразования Фурье к (3.5) получаем при  $|x| < 1$  сверточное уравнение относительно  $\gamma(x)$

$$(\gamma * k)(x) + C_1^* \Gamma(-\nu) e^{i\nu x} + C_2^* \Gamma(\nu) e^{-i\nu x} = v_y(x). \quad (3.6)$$

Константы  $C_1^*$ ,  $C_2^*$  определим ниже исходя из физических требований.

Ядро  $k(x)$  сверточного уравнения (3.6), учитывая поведение  $K(\alpha)$  на бесконечности, будет содержать сингулярную составляющую [9]

$$F^{-1} \left[ \frac{\text{sign } \alpha}{2i} \right] (x) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

### 3.2. Вычисление ядра сверточного уравнения

В выражении для  $K(\alpha)$  выделим как отдельное слагаемое сингулярную составляющую

$$\begin{aligned} K(\alpha) &= K_1(\alpha) + R(\alpha), \\ K_1(\alpha) &= \frac{\text{sign } \alpha}{2i} \left( 1 - e^{-2|\alpha|h} \right), \\ R(\alpha) &= \frac{i\nu \text{sign } \alpha}{|\alpha| - \nu} e^{-2|\alpha|h}. \end{aligned}$$

В теории обобщенных функций известно, что

$$F^{-1} [K_1(\alpha)] = \frac{-1}{2\pi} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 4h^2} \right).$$

Остановимся на вычислении  $F^{-1} [R(\alpha)]$ .

Однозначность функции  $R(\alpha)$  нарушается в точке  $\alpha = 0$ . Представим эту функцию в виде суммы

$$R(\alpha) = \Theta(-\alpha) R_-(\alpha) + \Theta(\alpha) R_+(\alpha),$$

где  $\Theta(\alpha)$  — функция Хэвисайда,

$$\begin{aligned} R_-(\alpha) &= \frac{i\nu}{(\alpha + \nu)} e^{2\alpha h}, \\ R_+(\alpha) &= \frac{i\nu}{(\alpha - \nu)} e^{-2\alpha h}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F^{-1} [R(\alpha)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 R_-(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} R_+(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Вне полюсов  $\alpha = \mp\nu$  обобщенные функции  $R_-$  и  $R_+$  совпадают с регулярными функциями, имеющими на бесконечности экспоненциальный характер убывания. Таким образом, преобразование Фурье для этих функций можно считать классическим, выделив отдельно в окрестности полюсов интеграл в смысле главного значения.

Для вычисления Фурье-образов используем методику, аналогичную применяемой при решении динамических контактных задач [13].

В соотношении (3.7) интегралы будем понимать как предел при  $r \rightarrow \infty$  последовательности интегралов по интервалам  $-r < \alpha < 0$  и  $0 < \alpha < r$ .

При  $x < 0$  аналитически продолжим функцию  $R$  в верхнюю полуплоскость комплексного переменного  $\alpha$ . Через точку  $\alpha = 0$  проведем вертикальный разрез  $(0; 0 + i\infty)$  для обеспечения однозначности функции  $R(\alpha)$ . Для вычисления интегралов (3.7) замкнем контуры интегрирования в верхней полуплоскости (рис. 1). По разным сторонам разреза имеем замкнутые контуры, образованные горизонтальным отрезком вещественной оси, дугой  $C_r$  и берегом разреза. Заменяем горизонтальный участок контура кривой  $L$ , чтобы полюс обходилась сверху. Внутри обоих контуров подынтегральная функция голоморфна по  $\alpha$  и, следовательно, по теореме Коши интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Используя формулы Сохоцкого [9] для обобщенных функций

$$\begin{aligned} \frac{1}{x + i0} &= -i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}, \\ \frac{1}{x - i0} &= i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

приведем выражение для вычисления интеграла в смысле главного значения

$$\text{Vp} \int_a^b \frac{f(\alpha)}{\alpha - \nu} d\alpha = \pm i\pi f(\nu) + \int_L \frac{f(\alpha)}{\alpha - \nu} d\alpha,$$

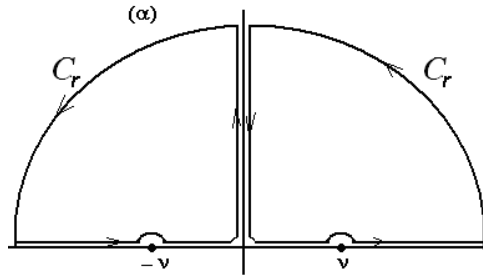


Рис. 1. Контур интегрирования при  $x < 0$

$$\nu \in [a, b].$$

Знак «+», если контур  $C$  обходит полюс сверху, знак «-», если снизу.

Таким образом, слева от разреза получим

$$\begin{aligned} \frac{i\nu}{2\pi} \text{Vp} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2\alpha h}}{\alpha + \nu} e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = -\frac{\nu}{2} e^{-2\nu h} e^{i\nu x} + \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i2\tau h}}{i\tau + \nu} e^{\tau x} d\tau. \end{aligned}$$

Соответственно справа от разреза имеем

$$\begin{aligned} \frac{i\nu}{2\pi} \text{Vp} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha h}}{\alpha - \nu} e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = -\frac{\nu}{2} e^{-2\nu h} e^{-i\nu x} + \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i2\tau h}}{\nu - i\tau} e^{\tau x} d\tau. \end{aligned}$$

В результате выполненных преобразований осуществлен переход от интегрирования вдоль вещественной оси сильно осциллирующей функции к интегрированию вдоль мнимой оси экспоненциально убывающей функции

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\pi} \text{Vp} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = \frac{\nu}{2} e^{-2\nu h} (e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}) - \\ - \frac{\nu}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\nu \cos 2\tau h + \tau \sin 2\tau h)}{\nu^2 + \tau^2} e^{\tau x} d\tau, \quad x < 0. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется  $F^{-1}[R(\alpha)](x)$  при  $x > 0$ . В этом случае функцию  $R$  аналитически продолжаем в нижнюю полуплоскость

$\alpha$ , проводим для однозначности вертикальный разрез  $(0; 0 - i\infty)$ , контур интегрирования также замыкаем в нижней полуплоскости  $\text{Im } \alpha < 0$ . Деформируем горизонтальный участок контура так, чтобы полюс обходилась снизу.

Окончательное выражение для ядра сверточного уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} k(x) = \frac{-1}{2\pi} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 4h^2} \right) + \\ + \frac{\nu}{2} \text{sign } x e^{-2\nu h} (e^{i\nu x} + e^{-i\nu x}) - \\ - \frac{\nu}{\pi} \text{sign } x \int_0^{\infty} \frac{(\nu \cos 2\tau h + \tau \sin 2\tau h)}{\nu^2 + \tau^2} e^{-\tau|x|} d\tau \end{aligned}$$

при  $-\infty < x < +\infty$ .

Подставим полученное выражение для  $k(x)$  в сверточное уравнение (3.6).

Заметим, что экспоненциальная составляющая в свертке дает исчезающую на бесконечности периодическую функцию

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \gamma(s) e^{i\nu(x-s)} ds = e^{i\nu x} \int_{-1}^{+1} \gamma(s) e^{-i\nu s} ds = \\ = e^{i\nu x} \Gamma(-\nu). \end{aligned}$$

Левая часть уравнения (3.6), представляющая нормальную составляющую возмущенной скорости, будет содержать два вида экспоненциальных слагаемых. При  $x < 0$  первое слагаемое с  $e^{i\nu x}$  соответствует волнам с положительной скоростью, то есть приходящим из бесконечности, второе слагаемое с  $e^{-i\nu x}$  — волнам с отрицательной скоростью, то есть уходящим на бесконечность. Согласно принципу излучения, следует оставить при  $x < 0$  лишь волны второй группы, для чего полагаем

$$C_1^* = \frac{\nu}{2} e^{-2\nu h}.$$

Для удовлетворения принципа излучения при  $x > 0$  примем

$$C_2^* = -\frac{\nu}{2} e^{-2\nu h}.$$

В результате сверточное уравнение относительно  $\gamma(x)$  примет вид

$$\int_{-1}^1 \gamma(s) k_0(x-s) ds = v_y(x), \quad (3.8)$$

где

$$k_0(x) = \frac{-1}{2\pi} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 4h^2} \right) + \nu \operatorname{sign} x e^{i\nu|x|} e^{-2\nu h} - \nu \frac{\operatorname{sign} x}{\pi} \int_0^\infty e^{-\varsigma|x|} \frac{\nu \cos 2\varsigma h + \varsigma \sin 2\varsigma h}{\nu^2 + \varsigma^2} d\varsigma.$$

#### 4. Численный анализ

Выражение для упругих перемещений

$$f(x) = \int_{-1}^1 \gamma(s) G(x, s) ds,$$

полученное методом функции Грина во второй части, используем для определения нормальной скорости на пластине  $v_y(x)$  в правой части интегрального уравнения (3.8). Затем слагаемое, отвечающее за вклад упругих сил в изменение эффективного угла атаки на пластинке, перенесем в левую часть этого уравнения. В результате уравнение (3.8) преобразуется к виду

$$\int_{-1}^1 \gamma(s) [k_0(x-s) + iG(x, s)] ds = v_0(x). \quad (4.1)$$

Тип полученного уравнения определяет функция  $k_0(x)$  (на особенность которой было указано выше), в силу чего соответствующий интеграл понимается в смысле Коши.

Решение уравнения (4.1)  $\gamma(x)$  применяется для определения прогибов упругой пластины по формулам (2.3), (2.4) и формы свободной поверхности по формуле

$$\eta(x) = i \int_{-1}^1 \gamma(s) q(x-s) ds, \quad (4.2)$$

где  $q(x) = F^{-1}[Q(\alpha)]$  — обратное преобразование Фурье функции

$$Q(\alpha) = -\frac{1}{i} \operatorname{sign} \alpha \left( \frac{\nu}{|\alpha| - \nu} e^{-|\alpha|h} \right).$$

В результате преобразований, аналогичных применяемым при вычислении ядра  $k_0(x)$ , получим выражение

$$q(x) = -\nu \operatorname{sign} x \cdot e^{i\nu|x|} e^{-\nu h} + \nu \frac{\operatorname{sign} x}{\pi} \int_0^\infty e^{-\varsigma|x|} \frac{\nu \cos \varsigma h + \varsigma \sin \varsigma h}{\nu^2 + \varsigma^2} d\varsigma.$$

Для данной задачи бесциркуляционного обтекания нормальная сила пропорциональна ускорению. Коэффициенты присоединенных масс  $\lambda$  и присоединенного момента инерции  $I$  определяются по формулам

$$\lambda = \int_{-1}^1 s \gamma(s) ds, \quad I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 \gamma(s) ds.$$

Для численного решения уравнения (4.1) применяем метод дискретных вихрей [14] и получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N [\gamma(s_j) (k_0(x_i - s_j) + iG(x_i, s_j))] = v_0(x_i), \\ \sum_{j=1}^N \gamma(s_j) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

где

$$x_i = -1 + \left( i - \frac{1}{4} \right) \frac{2}{N - \frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$s_j = -1 + \left( j - \frac{3}{4} \right) \frac{2}{N - \frac{1}{2}}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Последнее уравнение системы (4.3) выражает требование бесциркуляционности течения (1.9), а выбор узлов и точек коллокации обеспечивает нахождение решения сингулярного уравнения в классе функций, неограниченных на обоих концах, что характерно для данного типа течения.

Решив систему (4.3), найдем интенсивность точечных вихрей  $\gamma(s_j)$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,



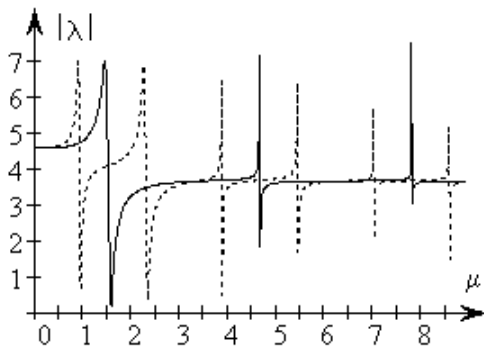


Рис. 2. Влияние жесткости на величину коэффициента присоединенных масс при  $\nu = 0,5$ ,  $h = 0,5$ ,  $m = 10$  (прямая линия представляет свободно опертую балку, пунктирная — консольную балку)

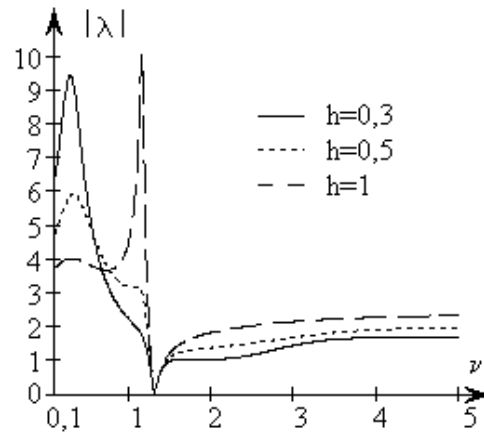


Рис. 3. Зависимость присоединенной массы от приведенной частоты при различных глубинах ( $m = 10$ ,  $\beta = 0,5$ )

что позволит затем определить коэффициент присоединённых масс и коэффициент присоединённого момента инерции по формулам

$$\lambda = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N s\gamma(s_j), \quad I = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s^2\gamma(s_j).$$

### 5. Результаты вычислений

Результаты проведенных расчетов для однородной упругой пластины, совершающей поступательные симметричные колебания ( $\nu_0 = -1$ ), позволяют проследить за развитием деформационного процесса и установлением значения гидродинамических и упругих характеристик.

Закономерности, представленные на рис. 2–9, свидетельствуют: при поступательных колебаниях симметричное распределение гидродинамической нагрузки для свободно опертой балки в силу симметрии закрепления приводит к симметричной картине течения; отсутствие же симметрии закреплений консольной балки при симметричной нагрузке может привести к произвольным картинам течения.

На рис. 2 показано поведение гидродинамической подъемной силы в зависимости от изменения упругих свойств (жесткости) для пластины относительной массы  $m = 10$ , колеблющейся с приведенной частотой  $\nu = 0,5$  на глубине  $h = 0,5$ . Обращает внимание наличие бесконечного числа критических точек  $\mu_n$  на графике, при которых происходит резкое изменение значений подъемной силы. Значения  $\mu_n$ , при которых происходит по-

теря устойчивости, зависят от свойств пластины (жесткости, массы), свойств жидкости и частоты колебаний. Эти критические точки можно определить, решив задачу о собственных колебаниях закрепленной пластины (2.1). Каждому собственному числу  $\mu_n$  соответствует нормальная функция, определяющая форму деформаций, отвечающих некоторому естественному типу колебаний.

Существенное влияние на собственные значения оказывают условия закрепления пластины. Так, для шарнирного закрепления при симметричных поступательных колебаниях картина течения симметрична, в силу чего в решении участвуют только четные нормальные функции, которые соответствуют собственным числам  $\mu_n \approx \frac{\pi(2n-1)}{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . При этих значениях (рис. 2) наблюдаются резонансные явления для гидродинамических характеристик. Соответствующие собственным значениям  $\mu_n$  симметричные формы деформаций можно аппроксимировать гармониками вида  $f_n(x) \approx A_n \cos \mu_n x$  (рис. 4).

Для консольной балки собственные значения определяются как решения трансцендентного уравнения  $\cos(2\mu) \operatorname{ch}(2\mu) = -1$ , которые приближенно равны:  $\mu_1 \approx 0,298\pi$ ,  $\mu_2 \approx 0,747\pi$ ,  $\mu_n \approx \pi \frac{(2n-1)}{4}$  ( $n \geq 3$ ).

Собственные формы деформаций для консольной балки можно рассчитать по фор-

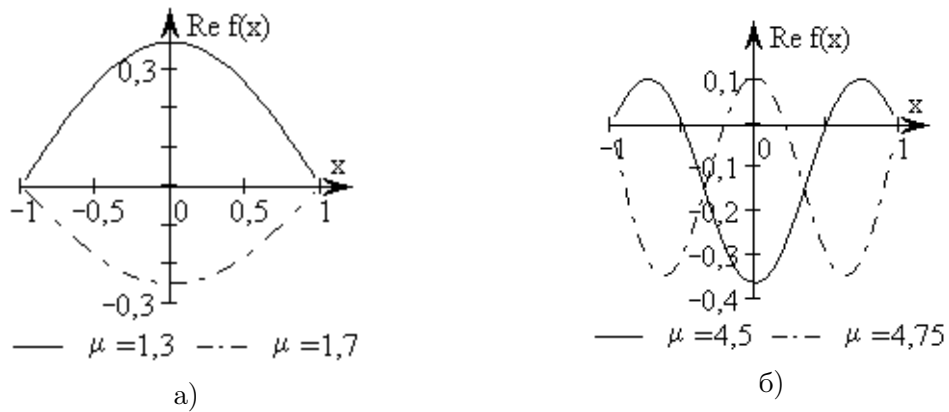


Рис. 4. Собственные формы деформаций свободно опертой балки ( $\nu = 0,5$ ,  $h = 0,5$ ,  $m = 10$ )  
(*a* — первая четная собственная форма, *б* — вторая четная собственная форма)

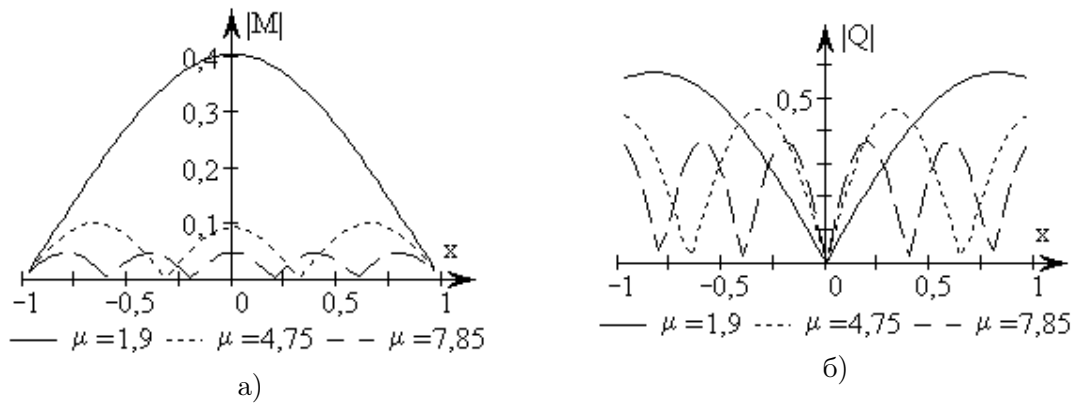


Рис. 5. Зависимость распределения изгибающего момента (*a*) и перерезывающей силы (*б*) от упругих свойств свободно опертой балки ( $\nu = 0,5$ ,  $h = 0,5$ ,  $m = 10$ )

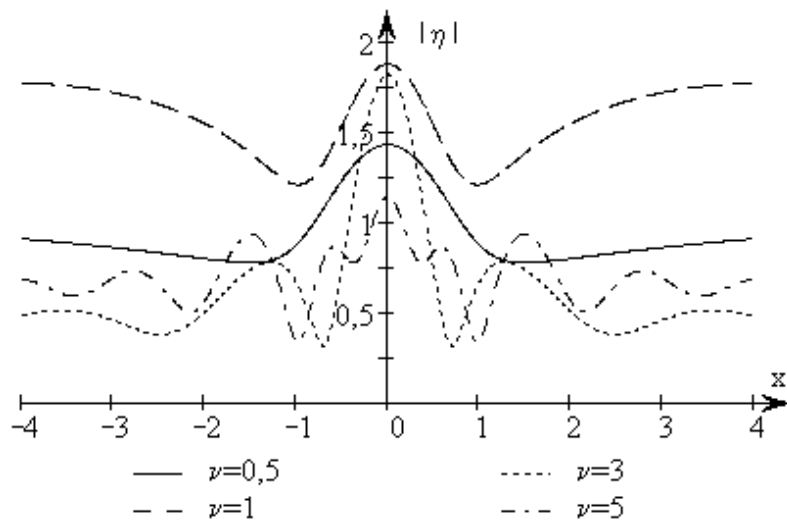


Рис. 6. Форма свободной поверхности при различных числах  $\nu$  (свободно опертая балка)  $\beta = 0,5$ ,  
 $h = 0,5$ ,  $m = 10$

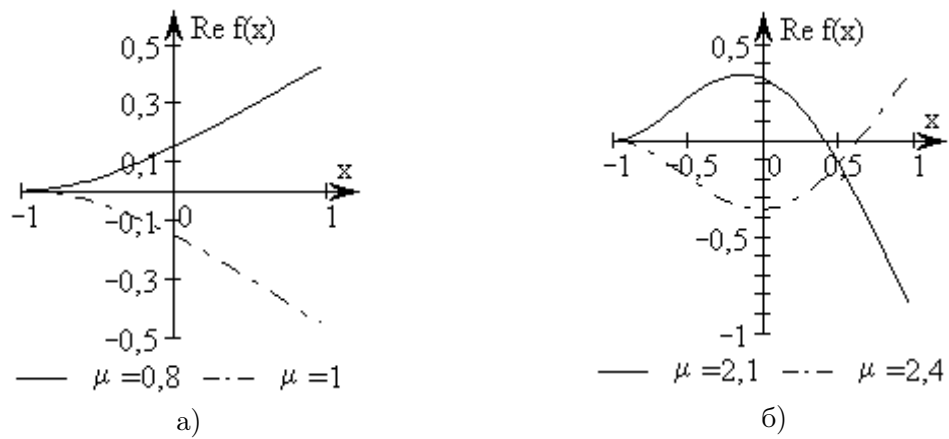


Рис. 7. Собственные формы деформаций консольной балки ( $\nu = 0,5, h = 0,5, m = 10$ ) (а — первая собственная форма, б — вторая собственная форма)

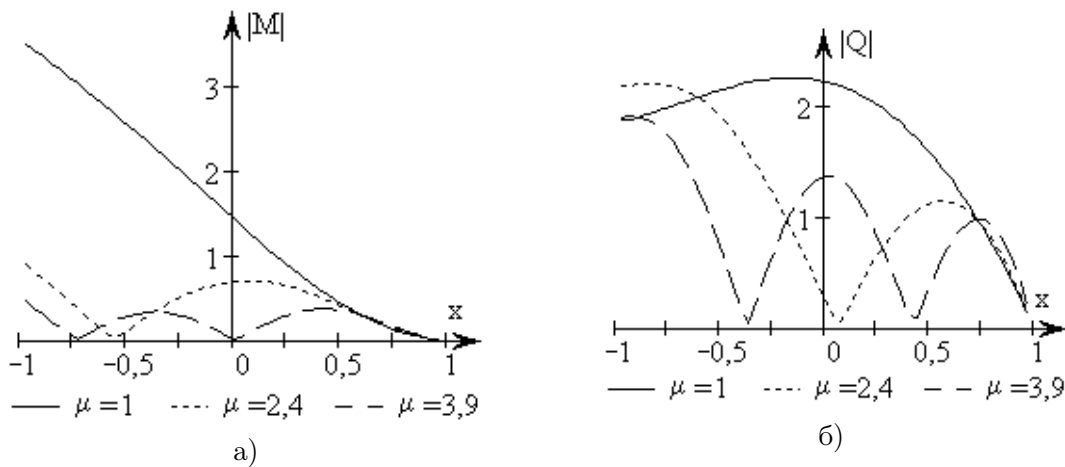


Рис. 8. Зависимость распределения изгибающего момента (а) и перерезывающей силы (б) от упругих свойств консольной балки ( $\nu = 0,5, h = 0,5, m = 10$ )

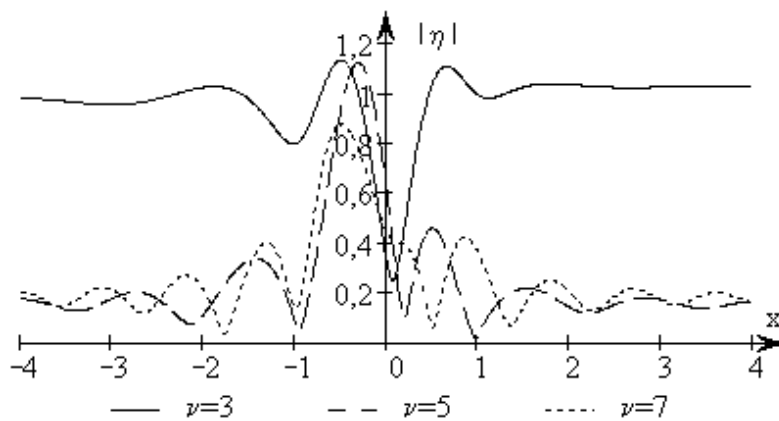


Рис. 9. Форма свободной поверхности при различных числах  $\nu$  (консольная балка)  $m = 0,5, h = 0,5, \beta = 1$

муле

$$f_n(x) \approx A_n \left[ U(\mu_n(1+x)) - \frac{V(2\mu_n)}{S(2\mu_n)} V(\mu_n(1+x)) \right]. \quad (5.1)$$

Формы деформации, вычисленные при значениях параметра  $\mu$ , близких к первому и второму собственным значениям, представлены на рис. 7. Видно, что они качественно близки к собственным формам колебаний, определяемым по формуле (5.1).

Представленные на рис. 2 зависимости показывают, что консольная балка является менее устойчивой, т.е. при прочих равных условиях резонансные явления наблюдаются для более жестких пластин.

Кривые на рис. 3 демонстрируют зависимость гидродинамической силы от приведенной частоты при различных глубинах для случая свободно опертой балки. При определенных значениях  $\nu$  для гибкой пластины наблюдаются резонансные явления. Это объясняется тем, что данные значения  $\nu$  соответствуют некоторому критическому значению  $\mu_n$ , о которых шла речь выше. При уменьшении параметра гибкости  $\beta$  резонанс удаляется в область больших  $\nu$ , результаты вычислений при этом согласуются с данными работы [15].

На рис. 5 и 8 показано распределение динамических характеристик (2.2) для пластины различной жесткости. Вид кривых обусловлен близостью параметра  $\mu$  к соответствующему собственному значению для данного способа закрепления.

Свободная поверхность (4.2) при колебаниях пластины представляет собою комбинацию волн с убывающей амплитудой, уходящих от источника возмущений. Рис. 6 и 9 демонстрируют влияние приведенной частоты на вид свободной поверхности при различных режимах закрепления гибкой пластины. Замечено, что увеличение приведенной частоты приводит к увеличению колебательности формы свободной поверхности, а с увеличением погружения амплитуда волн уменьшается.

### Заключение

Результаты численного эксперимента на основе полученной математической модели

подтвердили, что при колебаниях пластины возможны ситуации, когда упругие перемещения пластины представляют собой колебания со все возрастающей амплитудой, то есть имеет место динамическая неустойчивость типа флаттера [8].

Отмечено также, что при фиксированных упругих свойствах пластины (жесткости) изменение других параметров системы «упругая пластина – весома жидкость», например, частоты колебаний или массы пластины, также может перевести систему из окрестности одного неустойчивого состояния в окрестность другого неустойчивого состояния, что повлечет качественное изменение поведения всех характеристик системы.

Выявленные в работе закономерности могут быть полезны при прогнозировании динамического поведения гибких устройств в тяжелой жидкости, а также при определении параметров нормального устойчивого функционирования систем.

### Литература

1. Lamb H. On the vibration of an elastic plate in contact with water // Proc. Roy. Soc. of London, ser. A., 1920. Vol. 98. No. 690. P. 205–216.
2. Chong Wu., Watanabe E., Utsunomiya T. An eigenfunction expansion-matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate // Appl. Ocean Res. 1995. Vol. 17. No. 5. P. 301–310.
3. Коробкин А. А. Численное и асимптотическое исследование плоской задачи о гидродинамическом поведении плавающей пластины на волнах // ПМТФ. 2000. Т. 41. №2. С. 90–96.
4. Ефремов И. И., Макаеев М. В. Обтекание тонкого упругого профиля под свободной поверхностью весома жидкости // В сб.: Научные основы современных технологий орошения. Краснодар: КГАУ, 1992. С. 67–76.
5. Хабахпашева Т. И. Плоская задача об упругой плавающей пластине // Динамика сплошной среды. 2000. Вып. 116. С. 166–169.
6. Ефремов И. И., Лукащик Е. П. Колебания упругой пластины на свободной поверхности весома жидкости // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. №2. С. 24–32.
7. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Численно-аналитическое исследование динамической устойчивости упругой пластины при аэрогидродинамическом воздействии // Прикладная математика и механика. 2009. С. 3–22.

8. *Бисплингофф Р. Л., Эшли Х., Халфмен Р. Л.* Аэроупругость. М: Иностранная литература, 1958. 800 с.
9. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
10. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М: Наука, 1977. 288 с.
11. *Тимошенко С. П., Войновски-Кригер С. А.* Пластины и оболочки. М.: Наука, 1963. 636 с.
12. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
13. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М: Наука, 1989. 344 с.
14. *Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М: Наука, 1971. 768 с.
15. *Ефремов И. И., Иванисова О. В., Лукацкий Е. П.* Колебания массивной твердой пластинки в весоной жидкости // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 1. С. 30–34.

Ключевые слова: обобщенная функция, гидроупругость, весоная жидкость, динамическая неустойчивость

---

Статья поступила 17 марта 2011 г.  
Кубанский государственный университет, г. Краснодар  
© Лукацкий Е. П., Иванисова О. В., 2011