

УДК 539.3

НАПРЯЖЕНИЯ ВОКРУГ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ¹*Мазин В. А.², Михайлова В. Л.³, Сухомлинов Л. Г.⁴***STRESSES AROUND A CIRCULAR HOLE IN A TWO-LAYERED ELASTIC SEMI-PLANE UNDER LONGITUDINAL TENSION**

Mazin V. A., Mikhaylova V. L., Sukhomlinov L. G.

The results showed that the stress distribution around a circular hole in a two-layered elastic semi-plane under longitudinal tension received by using a variational finite-difference procedure for solving plane elastic problems for the holed rectangular domains are presented. The effects of the hole's position and of the layers' elastic constants on the level of stresses around the hole are examined.

Keywords: two-layered elastic semi-plane under tension, stresses around circular hole

Вопросы распределения напряжений вокруг круговых отверстий в однородных упругих телах (в рамках плоской постановки задачи статике теории упругости) достаточно подробно исследованы в литературе [1]. Между тем, на практике ослабленные отверстиями тела могут иметь неоднородную, в частности, слоистую структуру [2, 3]. В этой связи встает вопрос о влиянии слоистого характера тела на распределение напряжений вокруг имеющихся в нем круговых отверстий. В настоящей статье этот вопрос рассматривается на примере задачи о продольном растяжении двухслойной упругой полуплоскости, ослабленной круговым отверстием у края. Исследование выполняется с использованием вариационно-разностной процедуры численного решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с отверстиями и включениями, представленной в [4]. При численном моделировании вместо бесконечно протяженного объекта, каким является полуплоскость, рассматривается конечная прямоугольная область с размерами, многократно превышающими радиус отверстия.

Рассматривается прямоугольная область S , составленная из изотропных слоев $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$ (рис. 1). Считаем, что имеющееся в области S круговое отверстие $S_{(3)}$ заполнено материалом включения с пренебрежимо малым значением модуля Юнга (другими словами, при численном моделировании случай кругового отверстия сводим (как и в [4]) к случаю кругового включения пренебрежимо малой жесткости).

Как следует из описания вариационно-разностной процедуры [4], она может быть непосредственно применена к исследованию области S описанной структуры. Такая возможность обусловлена тем, что алгоритм [4] допускает наличие в рассматриваемой прямоугольной области S произвольного количества изотропных включений произвольной конфигурации. Поэтому при использовании алгоритма [4] применительно к данному случаю достаточно отнести (на программном уровне) составные части области S , различающиеся значениями упругих постоянных, к разряду «включений» и соответствующим образом настроить подпрограмму, определяющую значения упругих постоянных элемен-

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНПВШ 2.1.1./3179.

²Мазин Василий Александрович, старший преподаватель кафедры интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: vasilm@yandex.ru

³Михайлова Виктория Львовна, канд. техн. наук, доцент кафедры теоретической механики Московского государственного технического университета (МАМИ); e-mail: tm@mami.ru

⁴Сухомлинов Лев Георгиевич, д-р техн. наук, профессор кафедры теоретической механики Московского государственного технического университета (МАМИ); e-mail: tm@mami.ru

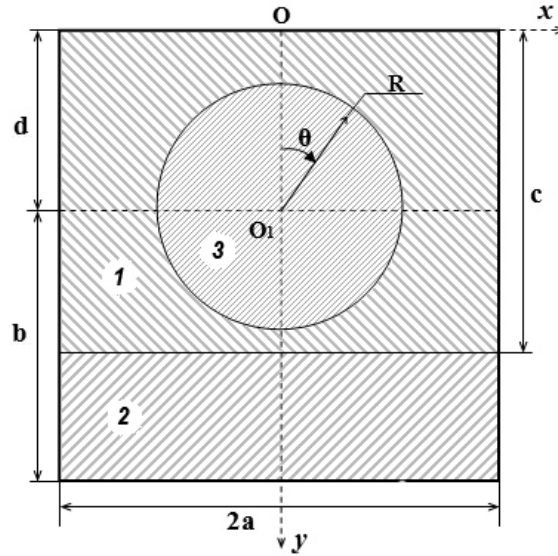


Рис. 1. Схема двухслойной прямоугольной области с круговым включением

тов расчетной модели в зависимости от их положения в области S .

Введем обозначения $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) для модулей Юнга и коэффициентов Пуассона материалов участков $S_{(1)}$, $S_{(2)}$, $S_{(3)}$ области S . Для удобства последующего изложения перепишем физические соотношения плоской задачи теории упругости [4] с указанием номера k ($k = 1, 2, 3$) участка, к которому эти соотношения относятся. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(k)} &= \lambda_1^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \lambda_2^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)}, \\ \sigma_{yy}^{(k)} &= \lambda_2^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \lambda_1^{(k)} \varepsilon_{yy}^{(k)}, \\ \sigma_{xy}^{(k)} &= 2G^{(k)} \varepsilon_{xy}^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (1)$$

Коэффициенты $G^{(k)}$, $\lambda_1^{(k)}$, $\lambda_2^{(k)}$ линейных зависимостей (1) выражаются через упругие постоянные $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ согласно следующей схеме:

$$1) \quad G^{(k)} = \frac{0,5 E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}};$$

2) в случае плоского напряженного состояния

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{1 - (\nu^{(k)})^2}, \quad \lambda_2^{(k)} = \nu^{(k)} \lambda_1^{(k)};$$

3) в случае плоского деформированного состояния

$$\lambda_1^{(k)} = 2G^{(k)} + \lambda^{(k)}, \quad \lambda_2^{(k)} = \lambda^{(k)},$$

$$\lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}.$$

Считаем далее, что рассматриваемая область S нагружена таким образом, что в каждом из ее слоев $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$ на достаточно большом удалении от отверстия $S_{(3)}$ реализуется состояние, близкое к однородной деформации. Оценку напряжений и деформаций, отвечающих таким однородным состояниям слоев $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$, выполним, исходя из расчетной модели в виде сплошного (без отверстия) двухслойного пакета, находящегося в условиях продольного (вдоль оси Ox) растяжения, при котором сдвиговые и поперечные напряжения в слоях равны нулю, а именно

$$\sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{yy}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

В рассматриваемом случае условие совместности деформации слоев двухслойного пакета формулируются в виде

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \varepsilon_{xx}^{(2)}. \quad (3)$$

Для значений продольных напряжений в первом и втором слое двухслойного пакета вводим обозначения q и $q_{(2)}$, так что

$$\sigma_{xx}^{(1)} = q, \quad \sigma_{xx}^{(2)} = q_{(2)}. \quad (4)$$

Считая заданной величину q , из (1)–(4) получаем

$$q_{(2)} = q \frac{\lambda_1^{(2)} - (\lambda_2^{(2)})^2 / \lambda_1^{(2)}}{\lambda_1^{(1)} - (\lambda_2^{(1)})^2 / \lambda_1^{(1)}}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \varepsilon_{xx}^{(2)} = \frac{q}{\lambda_1^{(1)} - (\lambda_2^{(1)})^2 / \lambda_1^{(1)}},$$

$$\varepsilon_{yy}^{(1)} = -\frac{\lambda_2^{(1)} \varepsilon_{xx}^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}}, \quad \varepsilon_{yy}^{(2)} = -\frac{\lambda_2^{(2)} \varepsilon_{xx}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xy}^{(1)} = \varepsilon_{xy}^{(2)} = 0.$$

При использовании равенств (2), (4), (6) для определения напряженно-деформированного состояния рассматриваемого двухслойного пакета можно также считать заданной величину $q_{(2)}$, находя при этом значение q на основе равенства (5).

Настройку программы расчета на интересующий нас случай растяжения двухслойной полуплоскости с круговым отверстием осуществляем по схеме, аналогичной изложенной в [4] применительно к случаю бесконечной однородной области, ослабленной круговым отверстием. Как и в [4], при численном моделировании вместо полуплоскости рассматриваем конечную прямоугольную область с большими по сравнению с радиусом отверстия R размерами, полагая $b = a = 10R$. Исходя из симметрии принятой расчетной схемы относительно оси Oy , моделирование осуществляется для половины указанной прямоугольной области. При этом на участке границы моделируемой половины, лежащем на оси Oy , формулируем условия симметрии $u_x = 0$, $q_y = 0$; на участке, параллельном оси Ox , — условия $u_y = 0$, $q_x = 0$; на участке, лежащем на оси Ox , полагает $q_x = 0$, $q_y = 0$; на участке, параллельном оси Oy , — $q_y = 0$,

$$q_x = \begin{cases} q, & \text{при } y < c, \\ q_{(2)}, & \text{при } y > c. \end{cases}$$

При дискретизации рассматриваемой области S с круговым включением $S_{(3)}$ пренебрежимо малой жесткости используем [4] сетку прямоугольных элементов с $n = 200$, позволяющую получать числовые результаты по напряжениям вокруг кругового отверстия с погрешностью менее 6 % (в сравнении с точным аналитическим решением).

В правильности настройки программы на рассматриваемый случай растяжения двухслойной области с круговым отверстием убеждаемся следующим образом. Полагаем сначала (на программном уровне), что материалы включения $S_{(3)}$ и слоя, в котором это включение находится, одинаковы. Если при этом численное моделирование с описанными граничными условиями и схемой дискретизации приводит к однородной картине напряжений и деформаций в слоях $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$ в полном соответствии с тем, что дают равенства (2), (4)–(6), считаем, что первый этап тестирования выполнен. Полагаем далее, что материалы слоев $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$ одинаковы, а жесткость включения пренебрежимо мала ($E^{(3)}/E^{(1)} = 0,0001$). Тем самым приходим к модели, соответствующей случаю ослабленной круговым отверстием однородной полуплоскости, равномерно растягиваемой вдоль оси Ox . Проводимый этап тестирования считаем успешным, если отмечается согласование результатов численного моделирования с имеющимся для такого случая аналитическим решением.

Укажем, что выполненное описанным образом тестирование программы расчета подтвердило корректность ее работы. Об этом, в частности, можно судить по данным таблицы, относящимся ко второму из отмеченных этапов тестирования. Здесь представлены результаты численного и приближенного аналитического решений в виде обезразмеренных окружных напряжений σ_θ/q в верхней ($\theta = 0^\circ$) и нижней ($\theta = 180^\circ$) точках кромки отверстия при различных положениях отверстия по отношению к границе рассматриваемой однородной полуплоскости, а именно при $d/R = 1,34; 1,54; 2,58$. Данные по аналитическому решению взяты из монографии [1]. Приближенный характер этих данных связан с тем, что они получены на основе вычислительной процедуры, при которой суммирование бесконечного ряда в точном аналитическом решении заменялось нахождением суммы некоторого фиксированного отрезка этого ряда. Поскольку сходимость такого ряда ухудшается при стремлении параметра d/R к единице (с приближением отверстия к границе полуплоскости), для значений d/R , близких к единице, упомянутая вычислительная процедура может приводить к заметным отклонениям от точного решения. Так, если при $d/R = 2,58$ различие между численным и приближенным

Случай продольного растяжения упругой изотропной полуплоскости, ослабленной круговым отверстием вблизи границы

d/R	1,34		1,54		2,58	
θ , град	0	180	0	180	0	180
численное решение σ_θ/q	5,82	3,67	4,86	3,56	3,59	3,32
приближенное аналитическое решение σ_θ/q	5,38	3,41	4,49	3,32	3,38	3,14

аналитическим решением не превышает 6 % (оцененное ранее отклонение численного решения при выбранной сетке от точного аналитического решения), то при $d/R \leq 1,54$ такое различие выходит (хотя и незначительно) за рамки указанных 6 %.

Данные таблицы позволяют судить и о степени влияния границы полуплоскости на характер распределения напряжений вокруг отверстия. Заметим, что в случае $d/R \gg 1$ (случай отверстия, находящегося на бесконечно большом расстоянии от границы полуплоскости) точное аналитическое решение, как известно, приводит к результату $\sigma_\theta/q = 3$ при $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$. Сравнивая этот результат с данными таблицы, можно видеть, что при $d/R \leq 1,54$ близость границы становится существенным фактором, влияющим на уровень напряжений вокруг отверстия. При $d/R = 2,58$ влияние границы остается заметным, но уже не столь существенным.

Учитывая сказанное, проведенное далее численное моделирование применительно к двухслойной полуплоскости нацелено на исследование распределения напряжений вокруг кругового отверстия в условиях его близкого расположения как по отношению к границе полуплоскости, так и по отношению к границе раздела сред. Моделирование проводится в предположении, что исследуемая двухслойная среда находится в состоянии плоской деформации и что $d/R = 1,54$.

Отметим, что численные исследования, проводимые с применением уже настроенной программы расчета, осуществляются без изменения сетки расчетной модели. Изменения при этом касаются лишь значений упругих постоянных элементов расчетной модели, относящихся к слоям $S_{(1)}$ и $S_{(2)}$.

Рассмотрим сначала случай, когда отверстие расположено в первом (верхнем) слое. При этом принимаем, что межслойная граница находится на расстоянии $c = 2,74R$ от границы полуплоскости. Результаты параметрических исследований для этого случая в виде зависимостей окружных напряжений σ_θ на

кромке отверстия от угла θ представлены на рис. 2–4.

Графики, приведенные на рис. 2, иллюстрируют влияние модулей Юнга слоев на распределение напряжений вокруг отверстия; графики на рис. 3 — влияние коэффициентов Пуассона слоев; графики на рис. 4 — совместное влияние модулей Юнга и коэффициентов Пуассона слоев. Пунктирная кривая, отмеченная на рис. 2, 3, 4 номерами 3, 4, 3 (соответственно), относится к случаю однородной полуплоскости ($E^{(1)} = E^{(2)}$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)}$). Эта кривая соответствует данным таблицы при $d/R = 1,54$. Отслеживая отклонения от этой опорной кривой других кривых на обсуждаемых рисунках, можно получить наглядное представление о влиянии параметров упругости слоев на распределение напряжений вокруг отверстия в рассматриваемом случае. Остается только указать, что кривые 1, 2, 4, 5 на рис. 2 изображают результаты, полученные при $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$ и при $E^{(2)}/E^{(1)} = 0,05; 0,5; 2; 10$ (соответственно); кривые 1, 2, 3, 5, 6, 7 на рис. 3 — при $E^{(2)}/E^{(1)} = 1$ и при $(\nu^{(1)} = 0,45; \nu^{(2)} = 0,1), (\nu^{(1)} = 0,3; \nu^{(2)} = 0,2), (\nu^{(1)} = 0,3; \nu^{(2)} = 0,1), (\nu^{(1)} = 0,2; \nu^{(2)} = 0,3), (\nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,3), (\nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,45)$, соответственно; кривые 1, 2, 4, 5 на рис. 4 — при $(E^{(2)}/E^{(1)} = 0,2; \nu^{(1)} = 0,45; \nu^{(2)} = 0,1), (E^{(2)}/E^{(1)} = 0,2; \nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,45), (E^{(2)}/E^{(1)} = 5; \nu^{(1)} = 0,45; \nu^{(2)} = 0,1), (E^{(2)}/E^{(1)} = 5; \nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,45)$, соответственно.

Из анализа представленных на рис. 2–4 результатов можно сделать следующие выводы. В рассматриваемом случае изменение коэффициентов Пуассона слоев в широком диапазоне значений (от 0,1 до 0,45) не приводит к существенному изменению в картине распределения напряжений вокруг отверстия. Пятикратное (и более) увеличение модуля Юнга второго (нижнего) слоя по сравнению с верхним слоем ($E^{(2)}/E^{(1)} \geq 5$) приводит к снижению окружного напряжения в ниж-

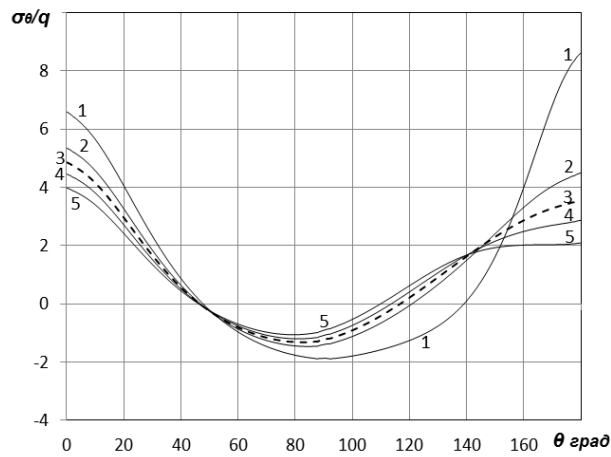


Рис. 2. Отверстие в первом слое. Картина распределения напряжений вокруг отверстия в зависимости от модулей Юнга слоев

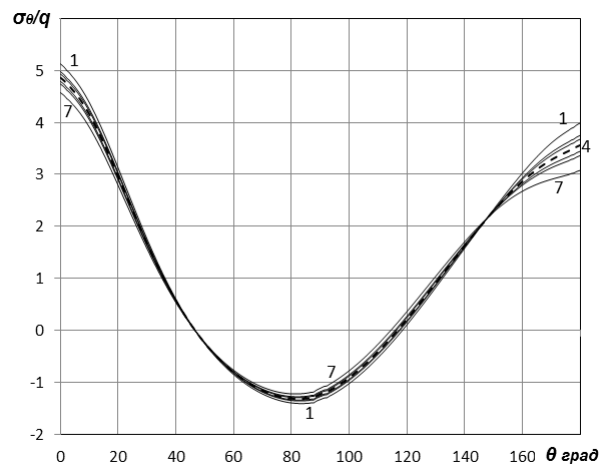


Рис. 3. Отверстие в первом слое. Картина распределения напряжений вокруг отверстия в зависимости от значений коэффициентов Пуассона слоев

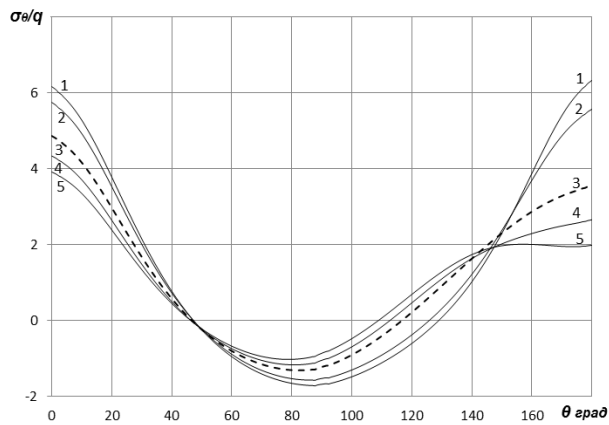


Рис. 4. Отверстие в первом слое. Совместное влияние модулей Юнга и коэффициентов Пуассона слоев на картину распределения напряжений вокруг отверстия

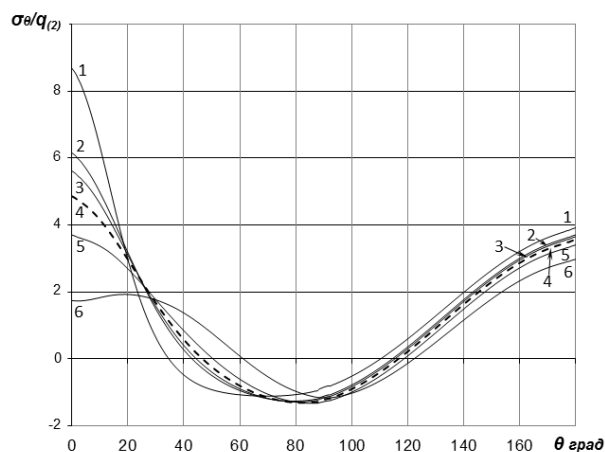


Рис. 5. Отверстие во втором слое. Картина распределения напряжений вокруг отверстия в зависимости от отношений модулей Юнга слоев

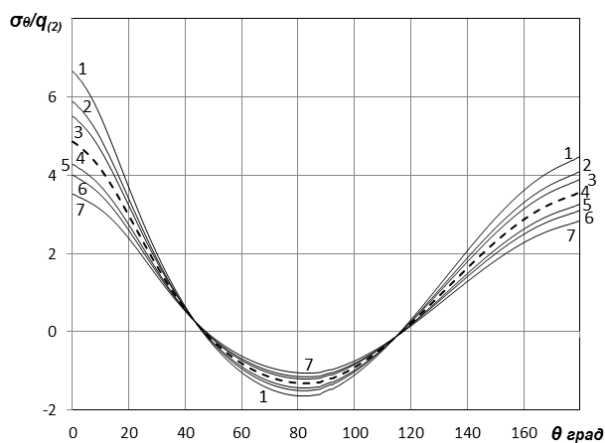


Рис. 6. Отверстие во втором слое. Картина распределения напряжений вокруг отверстия в зависимости от значений коэффициентов Пуассона слоев

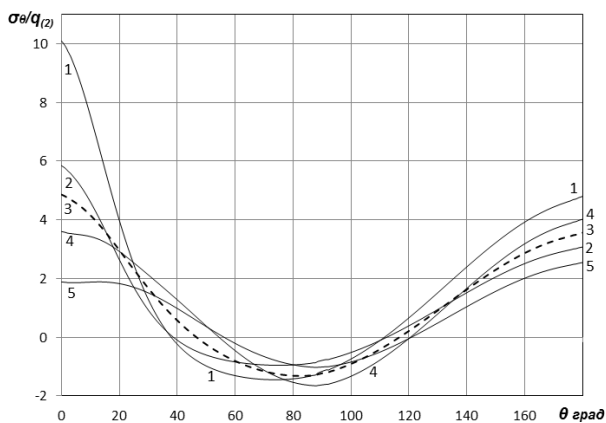


Рис. 7. Отверстие во втором слое. Совместное влияние модулей Юнга и коэффициентов Пуассона слоев на картину распределения напряжений вокруг отверстия

ней точке контура отверстия ($\theta = 180^\circ$) примерно на 40% по сравнению со случаем однородной среды. При этом снижение напряжения в верхней точке контура отверстия ($\theta = 0^\circ$) оказывается не столь значительным (порядка 17%). Как следствие напряжение при $\theta = 0^\circ$ оказывается почти в два раза превышающим напряжение при $\theta = 180^\circ$. Уменьшая модуль Юнга нижнего слоя по сравнению с верхним слоем, можно (в данном случае при $E^{(2)}/E^{(1)} = 0,2$) получить ситуацию, когда значения напряжений при $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$ становятся одинаковыми. Дальнейшее уменьшение параметра $E^{(2)}/E^{(1)}$ приводит к тому, что точка максимума напряжения переходит из верхнего положения ($\theta = 0^\circ$) в нижнее ($\theta = 180^\circ$).

Рассмотрим теперь случай, когда отверстие расположено в нижнем слое. При этом полагаем, что межслойная граница находится на расстоянии $s = 0,486R$ от границы полуплоскости. Результаты параметрических исследований для этого случая представлены на рис. 5–7. Здесь так же, как и на рис. 2–4, для целей сравнения пунктиром представлена кривая, относящаяся к случаю однородной полуплоскости. Для ее обозначения на рис. 5, 6, 7 использованы номера 4, 4, 3 (соответственно). Кривые 1, 2, 3, 5, 6 на рис. 5 изображают результаты, полученные при $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$ и при $E^{(2)}/E^{(1)} = 10; 5; 1,5; 0,5; 0,05$ (соответственно); кривые 1, 2, 3, 5, 6, 7 на рис. 6 – при $E^{(2)}/E^{(1)} = 1$ и при ($\nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,45$), ($\nu^{(1)} = 0,3; \nu^{(2)} = 0,45$), ($\nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,3$), ($\nu^{(1)} = 0,3; \nu^{(2)} = 0,1$), ($\nu^{(1)} = 0,45; \nu^{(2)} = 0,3$), ($\nu^{(1)} = 0,45; \nu^{(2)} = 0,1$), соответственно; кривые 1, 2, 4, 5 на рис. 7 – при ($E^{(2)}/E^{(1)} = 5; \nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,45$), ($E^{(2)}/E^{(1)} = 5; \nu^{(1)} = 0,45; \nu^{(2)} = 0,1$), ($E^{(2)}/E^{(1)} = 0,2; \nu^{(1)} = 0,1; \nu^{(2)} = 0,45$), ($E^{(2)}/E^{(1)} = 0,2; \nu^{(1)} = 0,45; \nu^{(2)} = 0,1$), соответственно.

Как видно из рис. 5–7, в рассматриваемом случае изменение значений коэффициентов Пуассона слоев в диапазоне от 0,1 до 0,45 приводит к существенным изменениям в величинах напряжений на кромке отверстия. При соответствующем подборе значений упругих постоянных слоев можно добиться существенного снижения уровня напряжений на кромке отверстия. В данном случае при $E^{(2)}/E^{(1)} = 0,2; \nu^{(1)} = 0,45; \nu^{(2)} = 0,1$ имеет место почти двукратное снижение упомянутого уровня по сравнению со случаем однородной полуплоскости.

В качестве общего вывода по изложенным результатам исследования отметим, что проведенный анализ позволил дать оценку влияния двухслойной структуры продольно растягиваемой полуплоскости на характер распределения напряжений вокруг имеющегося вблизи ее границы кругового отверстия. Более того, установлена возможность существенного снижения уровня указанных напряжений при надлежащем выборе характеристик слоев.

Литература

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 888 с.
2. Ефимов В. В., Кривой А. Ф., Попов Г. Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1998. № 2. С. 42–58.
3. Члинггарян Г. С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с включениями на границе раздела материалов // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т. 62. № 3. С. 52–58.
4. Мазин В. А., Михайлова В. Л., Сухомлинов Л. Г. Вариационно-разностная процедура численного решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области с включениями и отверстиями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. № 2. С. 53–62.

Ключевые слова: растяжение двухслойной упругой полуплоскости, напряжения вокруг кругового отверстия

Статья поступила 9 марта 2011 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Московский государственный технический университет (МАМИ), г. Москва

© Мазин В. А., Михайлова В. Л., Сухомлинов Л. Г., 2011