

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ СИСТЕМЫ ШТАМПОВ С УПРУГИМ СЛОЕМ¹

Соболь Б. В.², Пешхоев И. М.³

A SPATIAL PROBLEM OF A STAMPS SYSTEM AND AN ELASTIC LAYER CONTACT

Sobol B. V., Peshkhoyev I. M.

The three-dimensional static contact problem of the system of two symmetric rigid stamps and an elastic layer is considered. The problem is reduced to the singular integral equation of first kind for one contact area. An analytical solution for the case of elliptic stamps was constructed in a form of asymptotic decomposition by two parameters characterizing the relative distance between the stamps and the relative thickness of the layer.

Keywords: elastic layer, stamp, singular integral equation, asymptotic decomposition, the contact stresses concentration

Аналитическое решение контактной задачи о внедрении жесткого эллиптического в плане штампа с плоской подошвой в упругое полупространство впервые получено в [1]. Задача о контакте эллиптического штампа с упругим слоем при различных условиях на нижней грани детально рассмотрена в [2]. Построены асимптотические решения задачи в случаях больших и малых относительных толщин слоя. Асимптотические решения статических контактных задач теории упругости для полупространства в случае системы эллиптических областей получены в [3–5]. Аналитические методы и результаты решения цикла неклассических контактных задач для упругого клина и слоя в двумерной постановке приведены в [6]. Плоская статическая задача о контакте системы штампов с упругим слоем рассмотрена в [7]. В представленной работе упомянутые результаты рассматриваются как предельные случаи, а также в качестве асимптотических оценок решения задачи в более общей постановке.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача об исследовании концентрации напряжений, обусловленной поступательным внедрением системы двух

одинаковых жестких штампов с плоской подошвой на глубину γ в упругий слой толщиной h . Штампы занимают в плане некоторую симметричную область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$; каждая из составляющих областей обладает двумя осями симметрии. Рассмотрены два варианта условий, при которых слой своей нижней гранью а) опирается без трения на жесткое основание или б) жестко связан с основанием. Предполагается, что трение между подошвами штампов и верхней гранью слоя отсутствует. Тогда для определения напряжений под штампами имеем интегральное уравнение [2] по составной области Ω .

Воспользовавшись симметрией в постановке задачи, сведем ее к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода в области Ω_1 , занимаемой одним из штампов:

$$\iint_{\Omega_1} q(\xi, \eta) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} - \frac{1}{h} F\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{1}{h} F\left(\frac{R_l}{h}\right) \right] d\xi d\eta = -2\pi\theta\gamma, \quad (1.1)$$

$$\theta = \frac{G}{1-\nu}, \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (10-08-00839-а).

²Соболь Борис Владимирович, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий Донского государственного технического университета; e-mail: b.sobol@mail.ru

³Пешхоев Иса Мусаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Донского государственного технического университета; e-mail: peshkhoev@rambler.ru

$$R_l = \sqrt{(x + \xi + 2l)^2 + (y - \eta)^2},$$

$$F(t) = \int_0^\infty [1 - L(u)] J_0(ut) du.$$

Здесь G — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, $J_n(t)$ — функция Бесселя первого рода, а функция $L(u)$ для описанных случаев краевых условий соответственно равна [2]:

$$\text{a) } L(u) = \frac{\text{ch } 2u - 1}{\text{sh } 2u + 2u},$$

$$\text{b) } L(u) = \frac{2\kappa \text{sh } 2u - 4u}{2\kappa \text{ch } 2u + 1 + \kappa^2 + 4u^2}, \quad (1.2)$$

$$\kappa = 4 - 3\nu.$$

Отметим, что подобная технология ранее была описана при исследовании трехмерных задач теории трещин [8].

2. Решение интегрального уравнения

Решение интегрального уравнения (1.1) будем строить в предположении, что область контакта Ω представляет внутренность двух симметричных эллипсов Ω_1, Ω_2 , описываемых соответственно неравенствами (для определенности примем $a \leq b$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{(x + 2l)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Введем в рассмотрение два безразмерных геометрических параметра $\lambda_1 = l/b$, $\lambda_2 = h/b$, характеризующих, соответственно, относительное расстояние между штампами и относительную толщину слоя. Для решения задачи применим метод «больших λ » [2]. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, предположим следующую линейную связь между введенными параметрами [8]: $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda t$. Следует отметить, что эффективность получаемых в дальнейшем асимптотических разложений будет существенно зависеть не только от значений параметров λ и t , но и от значения параметра $r = b/a$, характеризующего протяженность областей контакта вдоль оси симметрии.

Искомую функцию контактных напряжений будем строить в виде

$$q(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(x, y) \lambda^{-i}. \quad (2.1)$$

Регулярную часть ядра уравнения (1.1) разложим по отрицательным степеням параметра λ :

$$\frac{1}{R_l} = \frac{1}{2b\lambda} - \frac{x + \xi}{4b^2} \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2(x + \xi)^2 - (y - \eta)^2}{16b^3} \frac{1}{\lambda^3} + O(\lambda_1^{-4}), \quad (2.2)$$

$$L_0(u) = 1 - L(u),$$

$$-\frac{1}{h} F\left(\frac{R}{h}\right) = -\frac{1}{\lambda b t} \int_0^\infty L_0(u) du + \frac{R^2}{4b^3 t^3 \lambda^3} \int_0^\infty L_0(u) u^2 du + O(\lambda^{-5}), \quad (2.3)$$

$$-\frac{1}{h} F\left(\frac{R_l}{h}\right) = -\frac{1}{b t \lambda} \int_0^\infty L_0(u) J_0\left(\frac{2u}{t}\right) du + \frac{(\xi + x)}{b^2 t^2 \lambda^2} \int_0^\infty L_0(u) u J_1\left(\frac{2u}{t}\right) du + \left\{ \frac{(\xi + x)^2}{b^3 t^3} \int_0^\infty L_0(u) \times \right. \\ \times \left[\frac{u^2}{2} J_0\left(\frac{2u}{t}\right) - \frac{u t}{4} J_1\left(\frac{2u}{t}\right) \right] du + \left. + \frac{(\eta - y)^2}{4b^3 t^2} \int_0^\infty L_0(u) u J_1\left(\frac{2u}{t}\right) du \right\} \frac{1}{\lambda^3} + \left\{ \frac{(\xi + x)^3}{b^4 t^4} \int_0^\infty L_0(u) \times \right. \\ \times \left[\frac{u t^2}{12} J_1\left(\frac{2u}{t}\right) - \frac{u^2 t}{12} J_0\left(\frac{2u}{t}\right) - \frac{u^3}{6} J_1\left(\frac{2u}{t}\right) \right] du + \left. + \frac{(\eta - y)^2 (\xi + x)}{4b^4 t^3} \int_0^\infty L_0(u) \times \right. \\ \times \left[u^2 J_0\left(\frac{2u}{t}\right) - u t J_1\left(\frac{2u}{t}\right) \right] du \left. \right\} \frac{1}{\lambda^4} + O(\lambda^{-5}). \quad (2.4)$$

Чтобы определить область сходимости ряда (2.2), представим левую часть в виде

$$\frac{1}{R_l} = \frac{1}{\sqrt{(x + \xi + 2l)^2 + (y - \eta)^2}} = \frac{\varepsilon}{b\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)}}, \quad (2.5)$$

где

$$\alpha = \frac{(x + \xi)}{b}, \quad \beta = \frac{(y - \eta)}{b},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\lambda}, \quad |\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Последнее выражение (2.5) может быть представлено как произведение двух сходящихся в области $|\varepsilon| < 2/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ рядов Маклорена по степеням ε и поэтому разлагается в сходящийся в той же области ряд. Следовательно, ряд (2.2) сходится в области $\lambda > \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/2$. Учитывая, что $|\alpha| \leq 2a/b$, $|\beta| \leq 2$, имеем $\lambda > \sqrt{(a^2 + b^2)}/b^2$.

Сходимость ряда (2.3) при $R/h < 2$ доказана в работе [2], откуда следует оценка для $\lambda_2 = \lambda t > \sqrt{(a^2 + b^2)}/b^2$.

Воспользуемся выводом теоремы [1] о структуре решения уравнений вида (1.1) в случае эллиптической области контакта. Подставим полученные разложения в уравнение (1.1) и выпишем соотношения при одинаковых степенях параметра. В результате получим систему сингулярных интегральных уравнений, последовательно решая которые по методике [2], находим коэффициенты разложения (2.1)

$$q(x, y) = q_0(x, y) \left[1 + \sum_{i=1}^4 M_i(x, y) \lambda^{-i} \right] + O(\lambda^{-5}), \quad (2.6)$$

$$q_0(x, y) = -\frac{\theta\gamma}{aK} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2},$$

$$M_1(x, y) = -\frac{bC_1}{K},$$

$$M_2(x, y) = \frac{b^2C_1^2}{K^2} - \frac{be^2C_2x}{K[E - (1 - e^2)K]},$$

$$M_3(x, y) = \tau + \frac{\alpha K e^2 x}{E - (1 - e^2)K} + \frac{K(\Psi_1 x^2 + \Psi_2 y^2)}{\Psi},$$

$$M_4(x, y) = K(a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{2,0}x^2 + a_{0,2}y^2 + a_{3,0}x^3 + a_{1,2}xy^2).$$

Здесь $K = K(e)$, $E = E(e)$ — значения полных эллиптических интегралов первого и второго рода соответственно, $e = \sqrt{1 - a^2/b^2}$:

$$C_1 = \frac{1}{2b} - \frac{1}{tb}c_0,$$

$$c_0 = \int_0^\infty L_0(u) [1 + J_0(2u/t)] du,$$

$$C_2 = -\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2t^2}c_1,$$

$$c_1 = \int_0^\infty L_0(u) u J_1(2u/t) du,$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

$$\tau = \delta - \frac{a^2}{2} \left[\frac{K - E}{e^2} \frac{\Psi_1}{\Psi} + \frac{E - (1 - e^2)K}{(1 - e^2)e^2} \frac{\Psi_2}{\Psi} \right],$$

$$\delta = -\frac{a^2 b C_{35} + b^3 C_{34}}{3K} - \frac{b^3 C_1^3}{K^3},$$

$$\alpha = \frac{b^2}{K^2} C_1 C_2,$$

$$A = \frac{-bC_{35}}{K}, \quad B = \frac{-bC_{34}}{K}, \quad c_2 = \int_0^\infty L_0(u) u^2 du,$$

$$C_3 = \int_0^\infty L_0(u) \left[u^2 J_0\left(\frac{2u}{t}\right) - \frac{ut}{2} J_1\left(\frac{2u}{t}\right) \right] du,$$

$$C_{34} = -\frac{1}{16b^3} + \frac{c_2}{4b^3t^3} + \frac{c_1}{4b^3t^2},$$

$$C_{35} = \frac{1}{8b^3} + \frac{c_2}{4b^3t^3} + \frac{C_3}{2b^3t^2},$$

$$\Psi = \frac{(e^2 - 1)K^2 + 2(2 - e^2)EK - 3E^2}{4e^4},$$

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \left[e^{-4} K - \left(\frac{e^{-2}}{2} + e^{-4} \right) E \right] A + \\
&\quad + \left[\left(e^{-4} - \frac{e^{-2}}{2} \right) K - e^{-4} E \right] B, \\
\Psi_2 &= \left[\left(e^{-4} - \frac{3e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \right) K + \right. \\
&\quad \left. + (e^{-2} - e^{-4}) E \right] A + \\
+ &\left[(e^{-4} - 2e^{-2} + 1) K - \left(\frac{3e^{-2}}{2} - e^{-4} \right) E \right] B, \\
c_3 &= \int_0^\infty L_0(u) u^3 J_1 \left(\frac{2u}{t} \right) du, \\
c_4 &= \int_0^\infty L_0(u) u^2 J_0 \left(\frac{2u}{t} \right) du, \\
L_1 &= \frac{c_4}{2b^3 t^3} - \frac{c_1}{4b^3 t^2}, \\
L_2 &= \frac{c_1}{12b^4 t^2} - \frac{c_4}{12b^4 t^3} - \frac{c_3}{6b^3 t^3}, \\
L_3 &= \frac{c_4}{4b^4 t^3} - \frac{c_1}{4b^3 t^2}, \quad B_{30} = \frac{b \left(L_2 - \frac{1}{16b^4} \right)}{K}, \\
B_{20} &= -\frac{b^2 C_1 \left(L_1 + \frac{1}{8b^3} + \frac{c_2}{4b^3 t^3} \right)}{K^2}, \\
B_{10} &= \frac{-b}{K} \left[a^2 \left(L_2 - \frac{1}{16b^4} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{b^2}{3} \left(L_3 + \frac{3}{32b^4} \right) + \frac{C_2 b^2 C_1^2}{K^2} \right], \\
B_{02} &= -\frac{b^2 C_1}{K^2} \left(\frac{c_1}{4b^3 t^2} - \frac{1}{16b^3} + \frac{c_2}{4b^3 t^3} \right), \\
B_{12} &= \frac{-b}{K} \left(L_3 + \frac{3}{32b^4} \right), \\
B_{00} &= -\frac{b}{K} \left\{ \frac{b C_l}{K} \left[\frac{a^2}{3} \left(L_1 + \frac{1}{8b^3} + \frac{c_2}{4b^3 t^3} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{b^2}{3} \left(\frac{c_1}{4b^3 t^2} - \frac{1}{16b^3} + \frac{c_2}{4b^3 t^3} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - C_1 \left(\tau + \frac{K a^2 \Psi_1}{3\Psi} + \frac{K b^2 \Psi_2}{3\Psi} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_2^2 a^2 b e^2}{3K (E - (1 - e^2) K)} \right\}.
\end{aligned}$$

Примем $\omega = 3a^6 (s_{1,2}^2 - s_{0,3} s_{2,1})$,

$$\begin{aligned}
a_{3,0} &= \frac{1}{5} \left(2b^4 \left[-3 (4b^2 s_{2,1} - a^2 s_{1,2}) B_{3,0} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (4b^2 s_{1,2} - a^2 s_{0,3}) B_{1,2} \right] \right) \omega^{-1}, \\
a_{1,2} &= \frac{a^2}{5} \left(2b^2 \left[(3b^2 s_{1,2} - 2a^2 s_{0,3}) B_{1,2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 6 (3b^2 s_{2,1} - 2a^2 s_{1,2}) B_{30} \right] \right) \omega^{-1}, \\
a_{2,0} &= a^2 \left(2b^2 \left[- (2b^2 s_{2,0} - a^2 s_{1,1}) B_{2,0} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (2b^2 s_{1,1} - a^2 s_{0,2}) B_{0,2} \right] \right) \omega^{-1}, \\
a_{0,2} &= a^4 \left(2 \left[- (b^2 s_{2,0} - 2a^2 s_{1,1}) B_{2,0} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (b^2 s_{1,1} - 2a^2 s_{0,2}) B_{0,2} \right] \right) \omega^{-1}, \\
a_{0,0} &= \frac{1}{K} \left(B_{0,0} - \frac{a^2}{2} s_{1,0} a_{2,0} - \frac{a^2}{2} s_{0,1} a_{0,2} \right), \\
a_{1,0} &= \frac{b^2}{a^2 s_{0,1}} \left[B_{1,0} - \frac{3a^4}{2b^2} s_{1,0} a_{3,0} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^2}{2} \left(\frac{a^2}{b^2} s_{0,2} - 2s_{1,1} \right) a_{1,2} \right], \\
s_{0,0} &= K, \quad s_{1,0} = \frac{K - E}{e^2}, \\
s_{0,1} &= \frac{E - (1 - e^2) K}{e^2 (1 - e^2)}, \\
s_{1,1} &= \frac{(2 - e^2) E - 2 (1 - e^2) K}{3e^4 (1 - e^2)}, \\
s_{2,0} &= \frac{(2 + e^2) K - 2 (1 + e^2) E}{3e^4}, \\
s_{0,2} &= \frac{2 (2e^2 - 1) E + (1 - e^2) (2 - 3e^2) K}{3e^4 (1 - e^2)^2}, \\
s_{3,0} &= \frac{(8 + 3e^2 + 4e^4) K - (8 + 7e^2 + 8e^4) E}{15e^6}, \\
s_{2,1} &= \frac{(8 - 7e^2 - e^4) K - (8 - 3e^2 - 2e^4) E}{15e^6 (e^2 - 1)},
\end{aligned}$$

$$s_{1,2} = \frac{(8 - 17e^2 + 9e^4) K - (8 - 13e^2 + 3e^4) E}{15e^6 (e^2 - 1)^2},$$

$$s_{0,3} = \left(- (8 - 19e^2 + 15e^4) (e^2 - 1) K - (8 - 23e^2 + 23e^4) E \right) \left(15e^6 (e^2 - 1)^3 \right)^{-1}.$$

Функция $q_0(x, y)$ представляет собой известное решение контактной задачи для изолированного эллиптического в плане плоского штампа, внедряемого поступательно на глубину γ в упругое полупространство [1]. Очевидно, это решение вытекает из (2.5) предельным переходом при $\lambda \rightarrow \infty$.

Следует подчеркнуть, что из построенного здесь решения также вытекают как предельные случаи известные результаты исследования неклассических контактных задач теории упругости и в более общих постановках. В частности, решение задачи о контакте системы двух симметрично расположенных эллиптических штампов с упругим полупространством [3] получается из (2.5) предельным переходом при $t \rightarrow \infty$, а известное решение пространственной контактной задачи для штампа на упругом слое при различных вариантах условий опирания нижней грани слоя на жесткое основание [2] вытекает из (2.5), если осуществить одновременный предельный переход при $\lambda \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$, сохраняя в нужном диапазоне значения параметра $\lambda_2 = \lambda t$.

3. Анализ результатов

Эффективность асимптотики оценивалась вычислением относительного значения невязки интегрального уравнения (1.1) в фиксированной точке (x, y) области Ω_1 по формуле

$$Er(x, y) = \left\{ \iint_{\Omega_1} q(\xi, \eta) \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} - \frac{1}{h} F\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{1}{h} F\left(\frac{R_l}{h}\right) \right] d\xi d\eta + 2\pi\theta\gamma \right\} \frac{100\%}{2\pi\theta\gamma}. \quad (3.1)$$

Интегралы в (3.1) вычислялись численно. Анализ численных результатов показал, что эффективность данной асимптотики зависит не только от значений параметра λ , но и от формы штампов — параметра $r = b/a$.

Наибольших значений невязки достигают в точках, лежащих на границе области контакта. На рис. 1 приведен график функции $Er(x, y)$, вычисленной по формуле (3.1) в граничных точках эллиптической области Ω_1 , для случая $\lambda_1 = 1,5$; $\lambda_2 = 1,5$ и $r = 2$. Максимальное по модулю значение невязки в данном случае достигается в точках $(0, \pm b)$ и равно $-2,04\%$.

Перейдем к анализу влияния различных геометрических параметров задачи на концентрацию контактных напряжений под штампами. На всех рисунках ниже приведены графики компоненты тензора контактных напряжений $\sigma_z = q(x, y)$, отнесенной к $\theta\gamma$.

3.1. Влияние условий опирания слоя и его толщины на концентрацию напряжений

Как показывают непосредственные вычисления, для слоя конечной толщины условию гладкого контакта нижней грани с основанием (при равенстве всех соответствующих параметров) отвечают меньшие значения концентрации напряжений под подошвой штампов по сравнению с условием жесткого сцепления (задача *b*). Это различие постепенно исчезает при увеличении толщины слоя. На рис. 2 приведены графики изменения компоненты σ_z , деленной на $\theta\gamma$, в зоне контакта на отрезке $-a < x < a$, $y = 0$ для задачи о двух эллиптических штампах на слое при $r = 1,25$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1,25$ для случаев *a*) и *b*) краевых условий.

Уменьшение толщины слоя приводит к возрастанию напряжений под подошвой штампа. На рис. 3 представлены аналогичные графики напряжений при относительном расстоянии между штампами $\lambda_1 = 2$ и относительной толщине λ_2 , принимающей значения 1,2; 2 и ∞ для условий опирания слоя *a*).

3.2. Влияние относительного расстояния между штампами на концентрацию напряжений

На рис. 4 приведены графики концентрации напряжений для эллиптических штампов на слое относительной толщины $\lambda_2 = 4$ при $r = 1,5$ и значениях относительного расстояния между штампами $\lambda_1 = \infty$; 2; 1,2 для задачи *a*).

Из анализа графика, приведенного на рис. 4, можно сделать вывод о том, что наличие второго штампа несколько снижает кон-

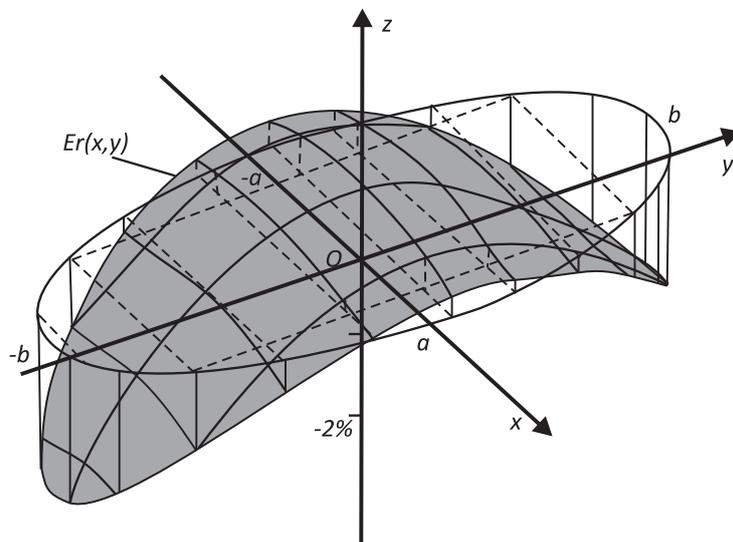


Рис. 1. График невязки интегрального уравнения при $\lambda_1 = 1,5$; $\lambda_2 = 1,5$ и $r = 2$

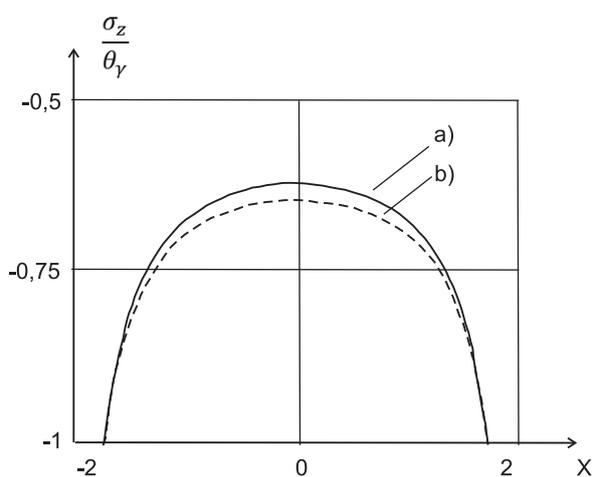


Рис. 2. Графики изменения компоненты σ_z тензора напряжений в зоне контакта на отрезке $-a < x < a$, $y = 0$ при $r = 1,25$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1,25$ для задач а) и б)

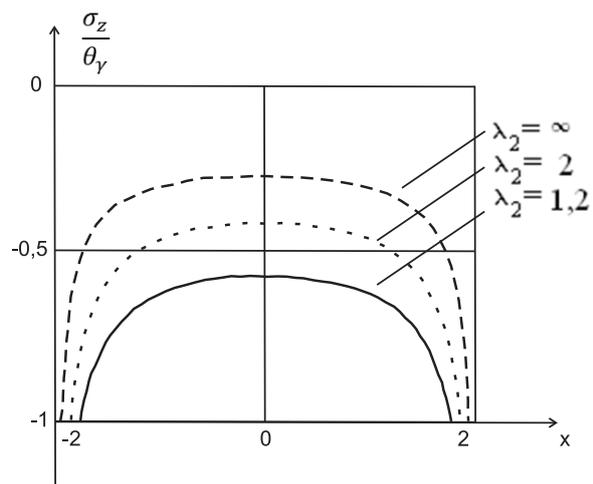


Рис. 3. Кривые изменения контактных напряжений под штампом Ω_1 в сечении $-a < x < a$, $y = 0$ для задачи а), $\lambda_1 = 2$; $r = 1,5$; $\lambda_2 = \infty$; 2; 1,2

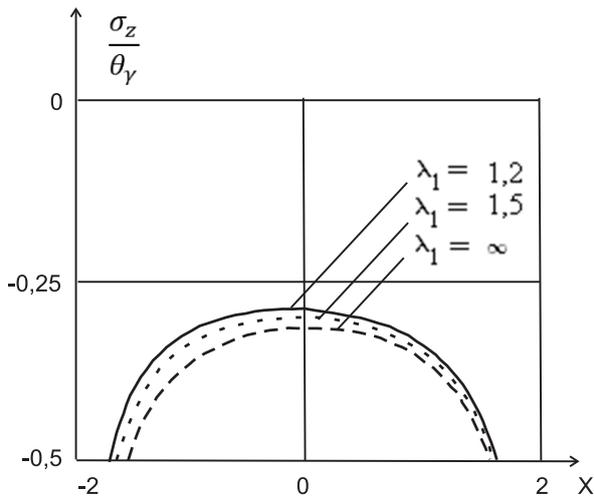


Рис. 4. Кривые изменения компоненты нормальных напряжений под штампом Ω_1 в сечении $y = 0$ при $\lambda_2 = 4$; $r = 1, 5$; $\lambda_1 = \infty$; 2; 1, 2 (задача *a*)

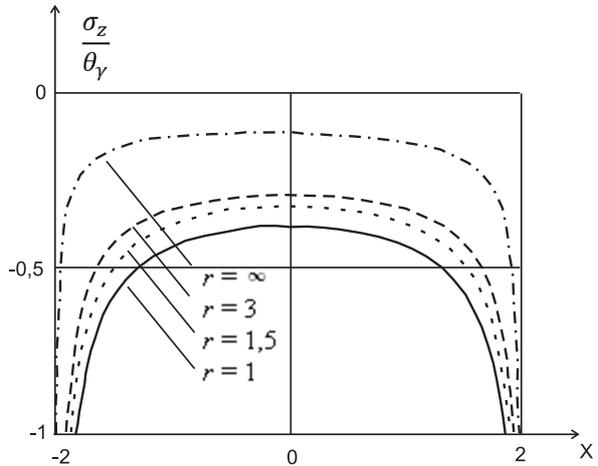


Рис. 5. Влияние отношения размеров области контакта на концентрацию напряжений $r = b/a = 1; 1,5; 3; \infty$

центрацию напряжений под подошвой штампа. При этом, чем ближе находится второй штамп, тем сильнее снижается напряжение под соседствующей с ним частью первого штампа.

3.3. Влияние формы штампов на концентрацию напряжений

Было проведено сравнение решений задач о контакте двух штампов с упругим слоем при различных отношениях полуосей эллипса $r = b/a$ с решениями плоских задач для двух штампов на полосе [7]. На рис. 5 приведены графики напряжений под штампом на оси Ox для штампов с параметрами $r = 1; 1,5; 3; \infty$ (задача *a*). Для случая $r = \infty$ приведен график напряжений для двух плоских штампов на полосе. Относительное расстояние между штампами в данном случае принималось равным $l/a = 4$, относительная толщина слоя (ширина полосы) $h/a = 4$, где $a = 2$. Изменение параметра r обеспечивалось присваиванием переменной b значений 2, 3, 6. Как указывалось выше, невязки интегрального уравнения (1.1) по формуле (3.1) для приведенных здесь асимптотических решений давали значения меньше 5%.

4. Выводы

Математический и численный анализ результатов асимптотического исследования задачи о контакте системы двух плоских

симметричных штампов с упругим слоем показывает:

1) Максимальные по модулю значения невязки интегрального уравнения (3.1) достигаются на границе области контакта и во всех рассмотренных случаях не превышают 5% (рис. 1).

2) Условия контакта нижней грани слоя с жестким основанием (задачи *a*, *b*) не оказывают существенного влияния на концентрацию контактных напряжений (рис. 2).

3) Относительная толщина слоя существенно влияет на величину сжимающих контактных напряжений под штампами. В частности, уменьшение относительной толщины слоя при фиксированных значениях прочих параметров приводит к увеличению концентрации контактных напряжений, при этом взаимное влияние штампов нивелируется (рис. 3).

4) Относительное расстояние между штампами оказывает влияние на концентрацию контактных напряжений под ними. Близко расположенным штампам при равных значениях других параметров соответствует более слабая концентрация напряжений, при этом эффект «разгрузки» более явно наблюдается в ближней части зоны контакта (рис. 4).

5) Вытянутой форме штампов вдоль оси симметрии соответствует более слабая концентрация напряжений в зоне контакта (рис. 5), причем, случай полосовых штампов можно трактовать как предельный при $b/a \rightarrow \infty$. Это позволяет использовать из-

вестное решение плоского аналога рассматриваемой здесь задачи [7] в качестве асимптотической оценки решения пространственной задачи «снизу».

Следует отметить, что аналогичные выводы были сделаны ранее при исследовании задач теории трещин [8], при этом наблюдались обратные по знаку эффекты.

Литература

1. *Галлин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
2. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Соболь Б. В.* Контакт двух плоских симметричных штампов с упругим основанием // Численные и аналитические методы решения задач строительной механики и теории упругости. Ростов-на-Дону: РИСИ, 1995. С. 240–244.
4. *Андрейкив А. Е.* Вдавливание в упругое полупространство системы штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. №2. С. 125–131.
5. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
6. *Александров В. М., Ромалис Б. Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.
7. *Александров В. М., Кучеров В. А.* Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. №4. С. 110–123.
8. *Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболь Б. В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. 224 с.

Ключевые слова: слой, штамп, сингулярное интегральное уравнение, асимптотическое разложение, концентрация контактных напряжений

Статья поступила 17 марта 2011 г.

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону

© Соболь Б. В., Пешхоев И. М., 2011