УДК 517.929.2

ДОПУСТИМОСТЬ ПАР ПРОСТРАНСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Афанасьева Т. Н.[1]

PAIRS OF SPACES ADMISSIBILITY FOR NONLINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

Afanasyeva T. N.

A pair of spaces admissibility for nonlinear difference equations is studied.

Keywords: nonlinear difference equation, nonlinear difference operator, space of bounded sequences, pairs od spaces admissibility

В настоящей заметке изучается допустимость пар пространств (X, X) относительно нелинейного разностного уравнения

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}(\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varphi}(k, \mathbf{x}_k)) + \mathbf{f}_n, \qquad (1)$$

$$n \geqslant 0,$$

где $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{f}_n$, $\boldsymbol{\varphi}(n, \mathbf{x})$ — векторы из C^m, $\mathbf{A}_{nk}$ — $m \times m$ матрицы с комплексными элементами.

Для изучения этого уравнения необходимо предварительно рассмотреть линейное разностное уравнение

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}\mathbf{x}_k + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0. \qquad (2)$$

Матрица $A = \{\mathbf{A}_{nk}\}$ называется ядром уравнения (2).

Предполагается, что

$$M = \sup_{n \geqslant 1} \sum_{k=0}^{n-1} \|\mathbf{A}_{nk}\| < \infty. \qquad (3)$$

Положим по определению $\sum\limits_{k=i}^{i-1} \mathbf{A}_k = \mathbf{0}$.

Резольвентой ядра A называется матрица $R = \{\mathbf{R}_{nk}\}$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathbf{R}_{nk} = \mathbf{A}_{nk} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \mathbf{A}_{ni}\mathbf{R}_{ik},$$

$$0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Резольвента R является единственным решением уравнения

$$\mathbf{R}_{nk} = \mathbf{A}_{nk} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \mathbf{R}_{ni}\mathbf{A}_{ik}, \qquad (4)$$

$$0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Уравнение (2) всегда имеет единственное решение $x = \{\mathbf{x}_n\}$, представимое в виде [1]

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0. \qquad (5)$$

Определение 1. Пусть F и X — линейные пространства. Пара (F, X) называется допустимой относительно уравнения (1), если при любом свободном члене $f = \{\mathbf{f}_n\} \in F$ решение $x = \{\mathbf{x}_n\} \in X$.

Обозначим через l_2^m линейное пространство векторов из C^m с нормой $\|\mathbf{x}\|_{l_2^m} = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} |x^j|^2}$; M_m — пространство комплексных $m \times m$ матриц $\mathbf{A} = \{a^{ij}\}$ с нормой $\|\mathbf{A}\|_{M_m} = \sqrt{\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{m} |a^{ij}|^2}$; l_∞ — пространство ограниченных последовательностей векторов из C^m с нормой $\|x\|_{l_\infty} = \sup\limits_{n \geqslant 0} \|\mathbf{x}_n\|_{l_2^m}$.

Пусть в линейном разностном уравнении (2) ядро A является вырожденным, т. е. $\mathbf{A}_{nk} = \mathbf{A}_n\mathbf{B}_k$, где $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{B}_k$ — $m \times m$ матрицы

[1]Афанасьева Татьяна Николаевна, старший преподаватель кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Кубанского государственного университета; e-mail: laktanik@rambler.ru

с комплексными элементами. Таким образом, рассматривается уравнение

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_n \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0. \qquad (6)$$

Далее предполагается, что $\prod\limits_{k=i}^{i-1} \mathbf{A}_k = \mathbf{I}$.

Докажем, что резольвента ядра A представима в виде

$$\mathbf{R}_{nk} = \mathbf{A}_n \prod_{i=k+1}^{n-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i) \mathbf{B}_k, \qquad (7)$$

$$0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Действительно, положим $\mathbf{v}_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}_k \mathbf{x}_k$. Тогда

$$\mathbf{v}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}_k \mathbf{A}_k \mathbf{v}_k + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}_k \mathbf{f}_k.$$

Имеем

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{B}_0 \mathbf{f}_0,$$
$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{I} + \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1)\mathbf{v}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{f}_1.$$

Предположим, что

$$\mathbf{v}_n = (\mathbf{I} + \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{A}_{n-1})\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{f}_{n-1}.$$

Откуда по индукции получим

$$\mathbf{v}_{n+1} = (\mathbf{I} + \mathbf{B}_n \mathbf{A}_n)\mathbf{v}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{f}_n.$$

Таким образом, имеем линейное неоднородное разностное уравнение

$$\mathbf{v}_n = (\mathbf{I} + \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{A}_{n-1})\mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{f}_{n-1}, \quad (8)$$

$$n \geqslant 1.$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\overline{\mathbf{v}}_0 = \overline{\mathbf{v}}_0,$$
$$\overline{\mathbf{v}}_1 = (\mathbf{I} + \mathbf{B}_0 \mathbf{A}_0)\overline{\mathbf{v}}_0.$$

Предположим,что

$$\overline{\mathbf{v}}_n = \prod_{i=0}^{n-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i)\overline{\mathbf{v}}_0.$$

Отсюда по индукции имеем

$$\overline{\mathbf{v}}_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i)\overline{\mathbf{v}}_0.$$

Так как общее решение соответствующего однородного уравнения равно

$$\overline{\mathbf{v}}_n = \prod_{i=0}^{n-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i)\overline{\mathbf{v}}_0,$$

то (в силу метода вариации произвольной постоянной) решение неоднородного уравнения (8) ищем в виде

$$\mathbf{v}_n = \prod_{i=0}^{n-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i)\mathbf{c}_n,$$

где $\mathbf{c}_n \in C^m$, $n \geqslant 0$ — неизвестные. Из уравнения (8) находим

$$\prod_{i=0}^{n-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i)\mathbf{c}_n =$$
$$= \prod_{i=0}^{n-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i)\mathbf{c}_{n-1} + \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{f}_{n-1},$$

поэтому

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{c}_{n-1} + \prod_{i=0}^{n-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{f}_{n-1}.$$

Отсюда

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c}_1 = (\mathbf{I} + \mathbf{B}_0 \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{B}_0 \mathbf{f}_0.$$

Предположим, что

$$\mathbf{c}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{k} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{B}_k \mathbf{f}_k.$$

По индукции получим

$$\mathbf{c}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=0}^{k} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{B}_k \mathbf{f}_k.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=k+1}^{n-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i) \mathbf{B}_k \mathbf{f}_k$$

и, учитывая $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{v}_n + \mathbf{f}_n$, имеем

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_n \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=k+1}^{n-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i) \mathbf{B}_k \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_n.$$

С другой стороны, справедливо равенство (5). Таким образом, (7) доказано.

Рассмотрим разностное уравнение

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{K}(n,k,\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0,$$

где $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{f}_n$, $\mathbf{K}(n,k,\mathbf{x})$ — векторы из C^m. Предполагается, что $\mathbf{K}(n,k,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Пусть для функции $\mathbf{K}(n,k,\mathbf{x})$ имеет место оценка

$$\|\mathbf{K}(n,k,\mathbf{x})\| \leqslant \|\mathbf{A}_n\|\|\mathbf{B}_k\|\|\mathbf{x}\|,$$

где $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{B}_k$ — $m \times m$ матрицы. Отсюда, в силу теоремы 1 [2], резольвента удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{R}_{nk}\| \leqslant \|\mathbf{A}_n\| \prod_{i=k+1}^{n-1} (\|\mathbf{I}\| + \|\mathbf{B}_i\|\|\mathbf{A}_i\|)\|\mathbf{B}_k\|,$$

$$0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Обозначим через

$$X_{q_0} = \{x \in l_\infty : \exists q : 0 < q \leqslant q_0 < 1 : |\mathbf{x}_n\|_{C^m} \leqslant cq^n, n \geqslant 0\}.$$

Теорема 1. Пусть

$$\|\mathbf{R}_{nk}\|_{M_m} \leqslant c_1 q_1^n, \quad \|\mathbf{f}_n\|_{C^m} \leqslant c_2 q_2^n,$$

где

$$0 < q_i < 1, \quad i = 1,2,$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}(n,\mathbf{x})\|_{C^m} \leqslant a_n\|\mathbf{x}\|_{C^m} + b_n\|\mathbf{x}\|_{C^m}^{1+\beta},$$

$$\beta > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty.$$

Тогда пара (X_{q_0}, X_1) допустима относительно уравнения (1).

Доказательство. Разностное уравнение (1)

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}_{nk}(\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k)) + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0.$$

равносильно уравнению

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0.$$

Действительно, применим к уравнению (1) оператор $(I + \widetilde{R})$, где $\widetilde{R}$ — оператор, порожденный резольвентой R ядра A. Получим

$$\mathbf{x}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{A}_{nk} - \mathbf{R}_{nk} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \mathbf{R}_{ni}\mathbf{A}_{ik} \right) \mathbf{x}_k -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{A}_{nk} - \mathbf{R}_{nk} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \mathbf{R}_{ni}\mathbf{A}_{ik} \right) \boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_n, \quad n \geqslant 0.$$

В силу равенства (4), имеем

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{f}_k + \mathbf{f}_n,$$

$$n \geqslant 0.$$

Откуда следует

$$\|\mathbf{x}_n\|_{C^m} \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\boldsymbol{\varphi}(k,\mathbf{x}_k) \right\|_{C^m} +$$

$$+ \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{f}_k \right\|_{C^m} + \|\mathbf{f}_n\|_{C^m}, \quad n \geqslant 0.$$

Оценим сумму

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk}\mathbf{f}_k \right\|_{C^m} + \|\mathbf{f}_n\|_{C^m} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \left(c_1 q_1^n \frac{1}{1-q_2} + q_2^n \right) \leqslant c_3 q_3^n,$$

где

$$c_3 = c_2 \left(c_1 \frac{1}{1-q_2} + 1 \right), \quad q_3 = \max(q_1, q_2).$$

Тогда

$$\|\mathbf{x}_n\|_{C^m} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 q_1^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k\|\mathbf{x}_k\| + b_k\|\mathbf{x}_k\|^{1+\beta} \right) + c_3 q_3^n.$$

Откуда

$$\|\mathbf{x}_n\|_{C^m} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 q_4^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k\|\mathbf{x}_k\| + b_k\|\mathbf{x}_k\|^{1+\beta} \right) + 1 \right),$$

где

$$c_4 = \max(c_1, c_3), \quad q_4 = \max(q_1, q_3).$$

Положим $y_n = \|\mathbf{x}_n\|_{C^m} q_4^{-n}$, отсюда

$$y_n \leqslant c_4 \left(\sum_{k=0}^{n-1} q_4^k \left(a_k y_k + b_k y_k^{1+\beta} q_4^{k\beta} \right) + 1 \right).$$

Так как $0 < q_4 < 1$, то имеем

$$y_n \leqslant c_4 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k y_k + b_k y_k^{1+\beta} \right) + 1 \right).$$

Из неравенства Бернулли [2] следует оценка

$$y_n \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} (1 + c_4 a_k) \times$$
$$\times \left[c_4^{-\beta} - \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_4 b_k}{1 + c_4 a_k} \prod_{i=0}^{k-1} (1 + c_4 a_i)^{\beta} \right]^{-\frac{1}{\beta}}.$$

В силу условий теоремы, сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_4 a_k$. Поэтому бесконечное произведение $\prod\limits_{k=0}^{\infty} (1 + c_4 a_k) < \infty$ [3].

Кроме того, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_4 b_k < \infty$. Отсюда и из неравенства

$$\frac{c_4 b_k}{1 + c_4 a_k} \leqslant c_4 b_k$$

получаем [3]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_4 b_k}{1 + c_4 a_k} < \infty.$$

Следовательно, существует такое число c_5, что $y_n \leqslant c_5$. Откуда

$$\|\mathbf{x}_n\|_{C^m} \leqslant c_5 q_4^n.$$

Таким образом, пара $(X_{q_0},\, X_1)$ допустима относительно уравнения (1). □

Обозначим через

$$X_{\alpha_0} = \{x \in l_\infty : \exists \alpha : \alpha \geqslant \alpha_0 > 1 : \|x_n\|_{C^m} \leqslant \frac{c}{(n+1)^{\alpha}},\ n \geqslant 0\}.$$

Теорема 2. Пусть

$$\|\mathbf{R}_{nk}\|_{M_m} \leqslant \frac{c_1}{(n+1)^{\alpha_1}},$$

$$\|\mathbf{f}_n\|_{C^m} \leqslant \frac{c_2}{(n+1)^{\alpha_2}},$$

где

$$\alpha_i > 1, \quad i = 1,\, 2,$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}(n, \mathbf{x})\|_{C^m} \leqslant a_n \|\mathbf{x}\|_{C^m} + b_n \|\mathbf{x}\|_{C^m}^{1+\beta},$$

$$\beta > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty.$$

Тогда пара $(X_{\alpha_0},\, X_1)$ допустима относительно уравнения (1).

Доказательство. Оценим

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{R}_{nk} \mathbf{f}_k \right\|_{C^m} + \|\mathbf{f}_n\|_{C^m} \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \left(\frac{c_1}{(n+1)^{\alpha_1}} S + \frac{1}{(n+1)^{\alpha_2}} \right) \leqslant \frac{c_3}{(n+1)^{\alpha_3}},$$

где [3]

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\alpha_2}},$$

$$c_3 = c_2(c_1 S + 1), \quad \alpha_3 = \min(\alpha_1, \alpha_2).$$

Тогда

$$\|\mathbf{x}_n\|_{C^m} \leqslant \frac{c_1}{(n+1)^{\alpha_1}} \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k \|\mathbf{x}_k\| + b_k \|\mathbf{x}_k\|^{1+\beta} \right) + \frac{c_3}{(n+1)^{\alpha_3}}.$$

Откуда

$$\|\mathbf{x}_n\|_{C^m} \leqslant \frac{c_4}{(n+1)^{\alpha_4}} \times$$
$$\times \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k \|\mathbf{x}_k\|_{C^m} + b_k \|\mathbf{x}_k\|_{C^m}^{1+\beta} \right) + 1 \right),$$

где

$$c_4 = \max(c_1,\, c_3), \quad \alpha_4 = \min(\alpha_1,\, \alpha_3).$$

Положим $y_n = \|\mathbf{x}_n\|_{C^m} (n+1)^{\alpha_4}$, отсюда

$$y_n \leqslant c_4 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{\alpha_4}} \times \right.$$
$$\left. \times \left(a_k y_k + b_k y_k^{1+\beta} \frac{1}{(k+1)^{\alpha_4 \beta}} \right) + 1 \right).$$

Так как

$$\frac{1}{(k+1)^{\alpha_4}} < 1, \quad \frac{1}{(k+1)^{\alpha_4\beta}} < 1$$

при каждом $0 \leqslant k \leqslant n-1$, то

$$y_n \leqslant c_4 \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k y_k + b_k y_k^{1+\beta} \right) + 1 \right).$$

В силу неравенства Бернулли, получим

$$y_n \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} (1 + c_4 a_k) \times$$

$$\times \left[c_4^{-\beta} - \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_4 b_k}{1 + c_4 a_k} \prod_{i=0}^{k-1} (1 + c_4 a_i)^{\beta} \right]^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Из условий теоремы следует, что

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + c_4 a_k) < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_4 b_k}{1 + c_4 a_k} < \infty.$$

Поэтому найдется такое число c_5, что $y_n \leqslant c_5$. Следовательно,

$$\|\mathbf{x}_n\|_{C^m} \leqslant \frac{c_5}{(n+1)^{\alpha_4}}.$$

Таким образом, пара (X_{α_0}, X_1) допустима относительно уравнения (1). □

Литература

1. *Афанасьева Т. Н., Ойнас И. Л.* О допустимости некоторых пар пространств для разностного уравнения Вольтерра и об устойчивости его решений / Кубанский гос. университет. Краснодар, 2000. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 19.01.00, №94 В20ОО.
2. *Цалюк З. Б.* О некоторых методах получения оценок решений неравенств // Диф. уравнения. 1988. Т. 24. № 2. С. 250–259.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 2. 800 с.

Ключевые слова: нелинейное разностное уравнение, нелинейный разностный оператор, пространство ограниченных последовательностей, допустимость пар пространств

Статья поступила 14 января 2011 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Афанасьева Т. Н., 2011