УДК 539.3, 551.2

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА СУБСТАНЦИЙ ВЫНУЖДЕННЫМ КОНВЕКТИВНЫМ ДВИЖЕНИЕМ СРЕДЫ[1]

Зарецкая М. В.[2]

STUDY OF THE SUBSTANCES TRANSFER VIA FORCED CONVECTIVE MOTION OF THE MEDIUM

Zaretskaya M. V.

Study of the substances transfer via forced convective motion of the medium, arising in the asthenosphere at subduction of lithospheric plates, was held. Boundary-value problem is solved by the method of integral transformations, applying the Fourier transform and Hankel functions in finite limits. Integral representation of solutions is obtained, numerical calculations were performed.

Keywords: lithospheric plate, subduction, asthenosphere, forced convective motion, transport, substance

1. Прогноз землетрясений и оценка сейсмического потенциала геофизической среды территории — сложная многоуровневая проблема, связанная с исследованием напряженности и деформационных процессов в литосферных плитах. Тектонические деформации реализуются путем разнообразных динамических перестроек исходной структуры геологической среды, зависящих не от осредненных полей напряжений, а от концентраторов напряжений, распределение и перестройка которых, в свою очередь, определяются неоднородностями структуры среды, а не ее осредненными свойствами. Неоднородное поле напряжений продуцируется перемещениями системы взаимодействующих тектонических плит и блоков, участвующих в упорядоченной системе разномасштабных и длительных циклов тектонических движений в литосфере в целом и земной коре в частности [1, 2].

Перемещения тектонических блоков осуществляются под воздействием ряда экзогенных и эндогенных факторов, одним из которых являются внутрикоровые и внутримантийные неоднородности. Результаты реконструкции природных напряжений, выполненные Ю. Л. Ребецким [3], показали их существенную роль в формировании напряжений в верхней и средней коре. Давление на нижнее основание литосферной плиты осуществляется в результате воздействия на него более легких фракций, подчиненных определенным закономерностям. Фактически это определяет ведущую роль в этих областях плотностных неоднородностей в сравнении с напряжениями, вызываемыми горизонтальными движениями плит.

Для оценки зон концентрации мантийных неоднородностей на нижнем основании литосферной плиты необходимо исследовать процессы переноса в блочно структурированной астеносфере, которые связаны с конвективным движением.

В геофизической среде конвекция является важнейшим процессом, обусловливающим динамику мантии и земной коры. В мантии Земли развивается сложная химико-плотностная и тепловая конвекция, которая возбуждается эндогенными энергетическими источниками, прежде всего энергией гравитационной дифференциации мантийного вещества с небольшим вкладом радиогенного тепла. Процессы, протекающие в нижней мантии, относятся к категории свободной конвекции.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (НШ-3765.2010.1), РФФИ (11-08-96504), государственного контракта от 1 сентября 2010 г. № 16.740.11.0135 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

[2]Зарецкая Марина Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: zarmv@mail.ru

В работе [4] методом теплофизического моделирования с использованием геологических и геофизических данных определена структура течения в верхней мантии. Показано, что вследствие охлаждения в зоне субдукции в астеносфере под континентом создается горизонтальный градиент температуры, под влиянием которого формируется конвективная ячейка. Под континентом возникает плоское течение протяженностью много большей толщины слоя, нисходящее течение ячейки располагается вблизи зоны субдукции, течение у кровли астеносферного слоя направлено к зоне субдукции, у подошвы — от зоны субдукции. Этот процесс относится к категории вынужденной конвекции.

Перенос субстанций (СБ) горизонтальным плоскопараллельным и свободным конвективным движением среды был рассмотрен в работах [5, 6].

Ниже представлены результаты исследования переноса СБ мантийных неоднородностей вынужденным конвективным движением среды астеносферы при субдукции литосферных плит. Для исследования процессов конвекции в мантии в геологическом масштабе времени может быть принята модель ньютоновской жидкости большой вязкости, где коэффициенты вязкости, температуропроводности, теплового расширения, ускорение свободного падения и плотность считаются неизменными в пределах мантийного слоя [7].

2. Воспользуемся уравнениями переноса СБ в цилиндрической системе координат r, φ, z

$$-\frac{\partial C}{\partial t}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C}{\partial\varphi^2}\right]+ \\ +\nu\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}-v_r\frac{\partial C}{\partial r}-v_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial\varphi}- \\ -v_z\frac{\partial C}{\partial z}-\sigma C=-f. \quad (1)$$

Здесь $C\,(r,\varphi,z,t)$ — концентрация СБ в точке в момент времени t; μ, ν — коэффициенты турбулентной диффузии среды, ν соответствует диффузии в направлении z; σ — коэффициент поглощения СБ; $\mathbf{v}=(v_r,v_\varphi,v_z)$ — вектор скорости в цилиндрических координатах; f — функция, описывающая источник СБ.

Наряду с (1) выполняется уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial\,(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

Для постановки граничных условий считаем, что с цилиндрической поверхности находящейся в конвективном движении области астеносферы происходит приток субстанции

$$\frac{\partial C}{\partial r}+hC=g(\varphi,z),\quad r=R, \quad (2) \\ -\infty\leqslant z\leqslant\infty,$$

где $g(\varphi,z)$ — функция, задающая концентрацию мантийных неоднородностей на цилиндрической поверхности ячейки; h — коэффициент, характеризующий эффективность обмена СБ между ячейкой и окружающей средой; R — радиус.

Начальные условия имеют вид

$$C=0 \text{ при } t=0. \quad (3)$$

Для определения скоростей движения среды воспользуемся уравнениями движения вязкой жидкости в форме Навье–Стокса в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)v_r-\frac{v_\varphi^2}{r}= \\ =-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta v_r-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right),$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)v_\varphi+\frac{v_rv_\varphi}{r}= \\ =-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\left(\Delta v_\varphi-\frac{v_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right), \quad (4) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)v_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta v_z,$$

где

$$(\mathbf{v}\nabla)f=v_r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}+v_z\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Рассматриваемый случай движения позволяет получить решения уравнений Навье–Стокса [8].

Из симметрии очевидно, что

$$v_z=0,\quad v_r=0, \\ v_\varphi=v(r),\quad p=p(r). \quad (5)$$

Система (4) сводится к двум уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{dp}{dr}=\rho\frac{v^2}{r},\\ \frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r^2}=0,\end{gathered}\tag{6}$$

имеющим решение

$$p=\rho c_\varphi\frac{r^2}{2}+c_p,\tag{7}$$

$$v_\varphi=v(r)=\frac{V_{\text{суб.}}}{R}r=c_\varphi r,\tag{8}$$

где $V_{\text{суб.}}$ — скорость субдукции литосферной плиты.

Внесем полученные значения для скоростей (5) и (8) в уравнение (1)

$$-\frac{\partial C}{\partial t}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 C}{\partial\varphi^2}\right]+ \\ +\nu\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}-c_\varphi\frac{\partial C}{\partial\varphi}-\sigma C=0.\tag{9}$$

В (9) учитываем, что внутренних источников мантийных неоднородностей не существует, то есть $f\equiv 0$.

Решение уравнения (9) можно получить методом интегральных преобразований, последовательно исключая переменные [9].

Прямое и обратное преобразования Фурье имеют вид

$$\bar{\mathrm{C}}(r,\varphi,\xi,t)= \\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{C}(r,\varphi,z,t)\exp(i\xi z)dz,\tag{10}$$

$$\mathrm{C}(r,\varphi,z,t)= \\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{\mathrm{C}}(r,\varphi,\xi,t)\exp(-i\xi z)d\xi.\tag{11}$$

Применив к (9) преобразование Фурье (10), исключим переменную z

$$-\frac{\partial\bar{C}}{\partial t}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\bar{C}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\bar{C}}{\partial\varphi^2}\right]- \\ -\nu\xi^2\bar{\mathrm{C}}-c_\varphi\frac{\partial\bar{C}}{\partial\varphi}-\sigma\bar{C}=0.\tag{12}$$

Воспользовавшись периодичностью функции $\bar{\mathrm{C}}(r,\varphi,\xi,t)$

$$\bar{\mathrm{C}}(r,\varphi,\xi,t)=\bar{\mathrm{C}}(r,\varphi+2\pi,\xi,t),$$

с помощью комплексного преобразования

$$\bar{\bar{C}}(r,n,\xi,t)= \\ =\int\limits_{-\pi}^{\pi}\bar{C}(r,\varphi,\xi,t)\exp(-in\varphi)d\varphi\tag{13}$$

исключаем из (12) переменную φ

$$-\frac{\partial\bar{\bar{C}}}{\partial t}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\bar{\bar{C}}}{\partial r}\right)-\frac{n^2}{r^2}\bar{\bar{C}}\right]- \\ -\nu\xi^2\bar{\bar{\mathrm{C}}}+inc_\varphi\bar{\bar{C}}-\sigma\bar{\bar{C}}=0.\tag{14}$$

Обратное преобразование для (13) имеет вид

$$\bar{C}(r,\varphi,\xi,t)= \\ =\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\bar{\bar{C}}(r,n,\xi,t)\exp(in\varphi).\tag{15}$$

Далее для исключения оператора

$$L(f)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{n^2}{r^2}\right)f$$

относительно функции $\bar{\bar{\mathrm{C}}}$ воспользуемся результатами работ [9, 10].

В работе [9] предложены прямое и обратное преобразования Ханкеля с конечными пределами, которые могут применяться при решении краевых задач для систем, обладающих аксиальной симметрией

$$\bar{f}(\zeta_i)=\mathbf{J}_\mu(f)=\int\limits_0^a xf(x)J_\mu(x\zeta_i)dx,\tag{16}$$

где $J_\mu(x\zeta_i)$ — функция Бесселя первого рода порядка μ.

Вид обратного преобразования зависит от типа граничных условий.

Если на границе задано условие первого рода

$$f=f(a)=q,\ \text{при } x=a,$$

где q — некоторая заданная функция, то в каждой точке непрерывности $f(x)$ на интервале $(0,a)$

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_i\bar{f}(\zeta_i)\frac{J_\mu(x\zeta_i)}{\left[J'_\mu(a\zeta_i)\right]^2},\tag{17}$$

сумма берется по всем положительным корням уравнения

$$J_\mu(a\zeta_i)=0.\tag{18}$$

В этом случае [10]

$$\mathbf{J}_\mu\left[\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}-\frac{\mu^2}{x^2}f\right]= \\ = a\zeta_i f(a)J_{\mu+1}(a\zeta_i)-\zeta_i^2\bar{f}(\zeta). \quad (19)$$

При $f(a)=0$,

$$\mathbf{J}_\mu\left[\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}-\frac{\mu^2}{x^2}f\right]=-\zeta_i^2\bar{f}(\zeta).$$

Если на границе задано граничное условие вида

$$\frac{df}{dx}+hf=q \text{ при } x=a,$$

где q — заданная функция, то в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ интервала $(0,a)$,

$$f(x)=\frac{2}{a^2}\sum_i\frac{\zeta_i^2\bar{f}(\zeta_i)}{h^2+(\zeta_i^2-\frac{\mu^2}{a^2})}\frac{J_\mu(x\zeta_i)}{[J_\mu(a\zeta_i)]^2}, \quad (20)$$

сумма берется по всем положительным корням уравнения

$$\zeta_i J'_\mu(a\zeta_i)+hJ_\mu(a\zeta_i)=0.$$

Трансформанта Ханкеля имеет вид [10]

$$\mathbf{J}_\mu\left[\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}-\frac{\mu^2}{x^2}f\right]= \\ = aJ_\mu(a\zeta_i)\left[\frac{df}{dx}+hf\right]\Bigg|_{x=a}\zeta_i^2\bar{f}(\zeta_i). \quad (21)$$

Если

$$\frac{df}{dx}+hf=0 \text{ при } x=a,$$

то выражение (21) принимает вид

$$\mathbf{J}_\mu\left[\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}-\frac{\mu^2}{x^2}f\right]=-\zeta_i^2\bar{f}(\zeta_i). \quad (22)$$

Применим к уравнению (14) интегральное преобразование Ханкеля (16)

$$-\frac{d\tilde{C}}{dt}+\mu(-\zeta^2)\tilde{C}-\nu\xi^2\tilde{C}+inc_\varphi\tilde{C}-\sigma\tilde{C}= \\ = RJ_n(R\zeta_i)G(n,\xi), \quad (23)$$

где

$$\tilde{C}(\zeta_i,n,\xi,t)=\mathbf{J}_n(\bar{\bar{C}})= \\ =\int\limits_0^a r\bar{\bar{C}}(r,n,\xi,t)J_n(r\zeta_i)dr,$$

$$G(n,\xi)= \\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\varphi,z)\exp(i\xi z)\exp(-in\varphi)dzd\varphi.$$

Перепишем (23) в виде

$$\frac{d\tilde{C}}{dt}+(\mu\zeta_i^2+\nu\xi^2+\sigma-inc_\varphi)\tilde{C}= \\ =-RJ_n(R\zeta_i)G. \quad (24)$$

Полученное уравнение с учетом начальных условий (3) имеет решение

$$\tilde{C}=-\frac{RJ_n(R\zeta_i)G(n,\xi)}{\mu\zeta_i^2+\nu\xi^2+\sigma-inc_\varphi}\times \\ \times\Big[1-\exp\big(-(\mu\zeta_i^2+\nu\xi^2+ \\ +\sigma-inc_\varphi)t\big)\Big]. \quad (25)$$

Решение исходной краевой задачи (9), (2) получаем, применив к (25) последовательно обратные преобразования (17), (15), (11):

$$\bar{\bar{C}}=2G(n,\xi)\times \\ \times\sum_i\frac{\zeta_i^2}{\left[R^2h^2+(R^2\zeta_i^2-n^2)\right]}\frac{J_n(r\zeta_i)}{J_n(R\zeta_i)}\times \\ \times\left[\frac{\left[\exp\left(-(\mu\zeta_i^2+\nu\xi^2+\sigma-inc_\varphi)t\right)-1\right]}{\mu\zeta_i^2+\nu\xi^2+\sigma-inc_\varphi}\right],$$

$$\bar{C}(r,\varphi,\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\Bigg\{2G(n,\xi)\times \\ \times\sum_i\frac{\zeta_i^2}{\left[R^2h^2+(R^2\zeta_i^2-n^2)\right]}\frac{J_n(r\zeta_i)}{J_n(R\zeta_i)}\times \\ \times\left[\frac{\left[\exp\left(-(\mu\zeta_i^2+\nu\xi^2+\sigma-inc_\varphi)t\right)-1\right]}{\mu\zeta_i^2+\nu\xi^2+\sigma-inc_\varphi}\right]\Bigg\}\times \\ \times\exp(in\varphi),$$

$$\mathrm{C}(r,\varphi,z,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg\{\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}G(n,\xi)\times \\ \times\Bigg\{\sum_i\frac{\zeta_i^2}{\left[R^2h^2+(R^2\zeta_i^2-n^2)\right]}\frac{J_n(r\zeta_i)}{J_n(R\zeta_i)}\times$$

$$\times \left[\frac{\left[\exp\left(-(\mu\zeta_i^2 + \nu\xi^2 + \sigma - inc_\varphi)t\right) - 1\right]}{\mu\zeta_i^2 + \nu\xi^2 + \sigma - inc_\varphi} \right] \Bigg\} \times$$

$$\times \exp(in\varphi) \Bigg\} \exp(-i\xi z) d\xi. \quad (26)$$

Здесь ζ_i — корень трансцендентного уравнения

$$\zeta_i J_n'(R\zeta_i) + hJ_n(R\zeta_i) = 0.$$

3. Численные расчеты выполнялись для литосферной плиты, скорость субдукции которой 2 см/год, а мощность астеносферного слоя — 30 км.

Физические и механические характеристики литосферы, астеносферы и мантии [12]: плотность вещества литосферы — $3{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3; плотность вещества мантии — $3{,}1 \cdot 10^3$ кг/м^3; вязкость вещества астеносферы — $4 \cdot 10^{19}$ Па·с; скорость мантийных течений — $\sim 1 \cdot 10^{-9}$ м/с; коэффициент турбулентной диффузии во всех направлениях принимается равным $\sim 6{,}3 \cdot 10^{-12}$ м^2/с.

Расчеты показали, что распределение мантийных неоднородностей по сечению цилиндрической конвектирующей ячейки и глубина проникновения зависят как от значения концентрации на границе, так и от коэффициента турбулентной диффузии. В частности, при граничном значении $1{,}5 \cdot 10^{-11}$ кг/м^3 максимальное значение концентрации $8{,}4 \cdot 10^{-13}$ кг/м^3, глубина проникновения — 2 км. При граничном значении $3{,}0 \cdot 10^{-10}$ кг/м^3 максимальное значение концентрации $6{,}12 \cdot 10^{-11}$ кг/м^3, глубина проникновения — 7 км.

Если значение концентрации на границе сохраняется и равно $3{,}0 \cdot 10^{-10}$ кг/м^3, а коэффициент турбулентной диффузии уменьшается на порядок, максимальное значение концентрации $1{,}05 \cdot 10^{-11}$ кг/м^3, глубина проникновения — 4 км.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании переноса субстанций вынужденным конвективным движением среды для иных природных и техногенных процессов, в том числе в инженерно-технических приложениях.

Литература

1. *Родионов В. Н., Сизов И. А., Цветков В. М.* Основы геомеханики. М.: Недра, 1986. 301 с.
2. *Садовский М. А., Писаренко В. Ф.* Сейсмический процесс в блоковой среде. М.: Наука, 1991. 96 с.
3. *Ребецкий Ю. Л.* Новые данные о природных напряжениях в области подготовки сильного землетрясения. Модель очага землетрясения // Геофизический журнал. 2007. Т. 29. №6. С. 92–110.
4. *Кирдяшкин А. А., Добрецов Н. Л., Кирдяшкин А. Г.* Экспериментальное моделирование влияния субдукции на пространственную структуру конвективных течений в астеносфере под континентом // ДАН. 2002. Т. 384. №5. С. 682–686.
5. *Бабешко О. М., Зарецкая М. В.* О моделировании переноса субстанции плюмов в плоскопараллельно движущейся среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №4. С. 21–24.
6. *Бабешко В. А., Зарецкая М. В., Рядчиков И. В.* К вопросу моделирования процессов переноса в экологии, сейсмологии и их приложения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. №3. С. 20–25.
7. *Лобковский Л. И., Котелкин В. Д.* Термохимическая модель конвекции в мантии и ее геодинамические следствия // Осадочные бассейны: методика изучения, строение и эволюция. М.: Научный мир, 2004. С. 432–442.
8. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
9. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985. 480 с.
10. *Зарецкая М. В.* Влияние внутренней активности земли на напряженно-деформированное состояние литосферных плит: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Краснодар, 2010. 278 с.
11. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 668 с.
12. *Теркотт Д., Шуберт Дж.* Геодинамика. Геологические приложения физики сплошных сред. М.: Мир, 1985. Ч. 1: 375 с. Ч. 2: 360 с.

Ключевые слова: литосферная плита, субдукция, астеносфера, вынужденное конвективное движение, перенос, субстанция

Статья поступила 10 мая 2011 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар