

УДК 539.3

## ДЕМПФИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЗАШУНТИРОВАННЫМИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СТРУКТУРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ<sup>1</sup>

*Матвеевко В. П.<sup>2</sup>, Клигман Е. П.<sup>3</sup>, Юрлов М. А.<sup>4</sup>, Юрлова Н. А.<sup>5</sup>*

DAMPING OF MECHANICAL VIBRATIONS BY SHUNT PIEZOELECTRIC STRUCTURAL ELEMENTS

Matveenko V. P., Kligman E. P., Yurlov M. A., Yurlova N. A.

Incorporation of piezoelectric elements into a structure opens new possibilities for adjusting and controlling the dynamic characteristics of the system. For practical implementation of the discussed variant it is offered to fix piezo-elements to the surface of the structure and to monitor its dynamic characteristics by adjusting the external shunt electric RLC-circuits. The dynamic characteristics of the system are defined in the framework of the variational formulation of the eigenvalue problem. The real part of the obtained complex frequencies represents the natural vibration frequency and the imaginary part corresponds to the damping coefficient. The produced damping effect is presented in a series of experiments, in which the external electrical circuits were used for passive damping of the longitudinal vibrations of a piezoceramic rod plated along half of its length.

Keywords: electroelasticity, spectral problems, external electric circuits, numerical methods, the piezoelectric effect, experiment

### Введение

Диссипативные свойства конструкции могут быть определены из решения спектральной задачи теории электровязкоупругости. Для ряда конструкционных материалов спектральная задача теории электровязкоупругости может быть представлена в форме с комплексными динамическими модулями, являющимися аналогами дифференциальных и интегральных операторов в физических соотношениях [1–4], и комплексными сопротивлениями внешних электрических RLC-цепей.

В этой постановке найденные комплексные собственные значения будут определять частоты собственных колебаний и показа-

тели демпфирования. Комплексные частоты и формы собственных колебаний зависят не только от конструктивных и технологических особенностей оболочечных систем, но и от типа и способа электрического соединения пьезоэлементов конструкции (RLC-параметров). Целенаправленное изменение этих параметров позволит оптимизировать динамические характеристики (резонансные частоты, формы собственных колебаний и показатели демпфирования) системы.

Пьезоэлектрический эффект обеспечивает преобразование части энергии механических колебаний в энергию электрических колебаний, которая может быть просто рассеяна через шунтирующую цепь, представля-

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ-7529.2010.1) и Программы Президиума РАН (09-П-1-1010).

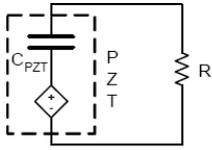
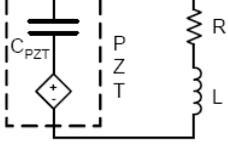
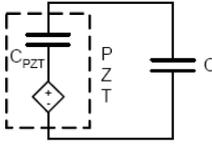
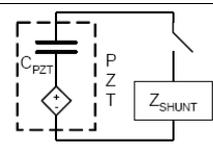
<sup>2</sup>Матвеевко Валерий Павлович, академик РАН, д-р техн. наук, директор Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН, г. Пермь; e-mail: mvpr@icmm.ru

<sup>3</sup>Клигман Евгений Петрович, канд. техн. наук, старший научный сотрудник отдела связанных проблем механики деформируемого твердого тела Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН; e-mail: kligman@icmm.ru

<sup>4</sup>Юрлов Максим Александрович, инженер-исследователь отдела связанных проблем механики деформируемого твердого тела Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН; e-mail: yurlovm@icmm.ru

<sup>5</sup>Юрлова Наталия Алексеевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела связанных проблем механики деформируемого твердого тела Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН; e-mail: yurlova@icmm.ru

## Шунтирующие цепи (по [9])

Резистивные	Резонансные	Емкостные	Переключаемые
			
Цепь ведет себя аналогично системе с вязкоупругим демпфированием	Цепь ведет себя аналогично классическому динамическому демпферу	Цепь изменяет жесткость пьезоэлектрического элемента	Самая важная особенность этой цепи — приспособление поведения цепи в ответ на любое изменение в системе

ющую собой механизм пассивного демпфирования. Поэтому, применяя соответствующие электрические цепи, можно демпфировать механические колебания системы [5].

Так как пьезоэлементы обладают внутренней ёмкостью, применение шунтирующих цепей для диссипации энергии является самым простым способом достижения этой цели. Элементарным шунтом является резистор, включенный между электродами пьезоэлемента. Несмотря на первое упоминание в работе [6], авторство концепции демпфирования колебаний с помощью пьезоэлектриков и внешних электрических цепей отдано Nagood и von Flotow [7], которые продемонстрировали, что последовательная LR-цепь может существенно снизить колебания единичной моды [8].

Среди шунтирующих цепей особого внимания заслуживают резонансные цепи. Обычно в их состав входят катушка индуктивности и сопротивление. Эти цепи позволяют настраиваться на любую демпфируемую частоту. Кроме того, модификации топологии цепи делают возможным одновременное демпфирование нескольких мод колебаний. С механической точки зрения система в целом (пьезоэлемент и резонансная шунтирующая цепь) подобна динамическому демпферу.

Детальный обзор возможностей шунтирования пьезоэлектрических материалов электрическими цепями при демпфировании колебаний приведен в работе [9], в которой обсуждаются четыре обычно используемых типа шунтирующих цепей (таблица). Здесь сокращение PZT (lead-zirconate-titanate) относится к пьезоэлектрическому

элементу,  $C_{PZT}$  — внутренняя емкость пьезоэлектрического участка.

Если электрическая цепь содержит источники электроэнергии, то она является активной цепью, и, соответственно, схема управления является активной. Если нет источников внешней электрической энергии, то цепь и система управления определяются как пассивные. Данная работа будет касаться последнего типа управления колебаниями.

## 1. Математическая постановка задачи о собственных колебаниях

Количественная оценка диссипативных свойств конструкций обычно основывается на результатах решения двух задач. Первая из них связана с рассмотрением свободных колебаний. При этом диссипация системы проявляется в затухании колебаний, а скорость затухания количественно оценивает диссипативные свойства системы. Вторая задача связана с рассмотрением вынужденных установившихся колебаний. При этом диссипативные свойства системы проявляются в ограничении резонансных амплитуд. Поэтому построение математической модели и создание соответствующих алгоритмов численной реализации позволит не только оценивать демпфирующие свойства системы, но и эффективно решать проблему оптимизации динамических характеристик smart-конструкций на основе пьезоэлектрических материалов. При этом среди динамических характеристик особый интерес составляют параметры, определяющие демпфирующие свойства системы.

Поиск методами численного моделирования оптимальных по демпфирующим свой-

ствам конструкций связан с большим объемом вычислений. С одной стороны, необходимо исследовать в заданном диапазоне влияние параметров на демпфирующие свойства системы, с другой стороны, требуется для каждой комбинации этих параметров проанализировать поведение исследуемого объекта в определенном спектре динамических воздействий. При рассмотрении свободных колебаний это связано с необходимостью решения динамических задач при различных начальных условиях, а в задаче о вынужденных колебаниях — с построением решений при различных вариантах нагружения в заданном частотном диапазоне возмущающих воздействий.

Альтернативой описанным подходам, в том числе для решения задач оптимизации, предлагается постановка задачи о собственных колебаниях системы, позволяющая оценить демпфирующие свойства вне зависимости от внешних силовых, кинематических и других факторов. При этом собственные частоты являются комплексными величинами. Их действительная часть представляет собой частоту, а мнимая часть — показатель демпфирования (скорость затухания) собственных колебаний.

При исследовании динамического поведения smart-конструкций рассматривается электровязкоупругая задача для кусочно-однородного тела, состоящего из упругих или вязкоупругих элементов, занимающих объем  $V_1$ , и электроупругих (пьезоэлектрических) элементов, занимающих объем  $V_2$ . Пьезоэлектрические элементы через электродированную поверхность могут быть соединены внешней цепью, состоящей из сопротивлений, ёмкостей и индуктивностей.

Вариационное уравнение движения тела, состоящего из упругого и пьезоэлектрических элементов, может быть получено на основе соотношений линейной теории упругости и квазистатических уравнений Максвелла [10–12]

$$\int_{V_1} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) dV - \int_{\Omega_\sigma} \delta u_i P_i d\Omega - \int_{\Omega_{el}} q_e \delta \varphi d\Omega = 0, \quad (1.1)$$

где  $D, E$  — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля;  $\sigma^{ij}$  — контравариантные компоненты симметричного тензора напряжений Эйлера (Коши),  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i})$  — ковариантные компоненты тензора линейных деформаций (точкой с запятой в формулах обозначена ковариантная производная);  $u$  — вектор перемещений,  $P$  — вектор нагрузок;  $\Omega_{el}$  — поверхность, ограничивающая пьезоэлектрический элемент;  $q_e$  и  $\varphi$  — поверхностная плотность зарядов и электрический потенциал, соответственно.

Для изотермических процессов в линейных электроупругих средах справедливы следующие физические соотношения:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ — для } V_1, \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ijk} E_k \\ D_k &= \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} + e_{ki} E_i \end{aligned} \right\} \text{ — для } V_2, \quad (1.3)$$

где  $C_{ijkl}$  — тензор упругих констант,  $\beta_{ijk}$  и  $e_{ki}$  — тензоры пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов.

Если элемент тела  $V_1$  обладает вязкоупругими свойствами, то тензор упругих констант  $C_{ijkl}$  должен быть заменен соответствующим вязкоупругим оператором  $C_{ijkl}^*$ . В случае же колебательного характера движения с частотой  $\omega$  вместо вязкоупругого оператора  $C_{ijkl}^*$  можно использовать комплексный аналог динамической жесткости  $C_{ijkl}^*(\omega) = C_{ijkl}^R(\omega) + iC_{ijkl}^I(\omega)$ . Отношение мнимой части комплексного модуля к действительной имеет смысл тангенса потерь.

В задачах электроупругости граничные условия можно разделить на две группы: механические и электрические.

Рассмотрим механические граничные условия. Если пьезоэлектрическая среда занимает объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $\Omega$ , то механические граничные условия сводятся к обычным граничным соотношениям теории упругости

$$\sigma^{ij} n_j = t^i \text{ на } \Omega_\sigma \text{ и } u_i = U_i \text{ на } \Omega_u. \quad (1.4)$$

Формулировка физически реализуемых электрических граничных условий зависит от способа передачи электрической энергии пьезоэлектрическому телу. Как подведение, так и снятие энергии с деформируемого пьезоэлектрического тела, осуществляются с помощью электродных покрытий, нанесенных на части поверхности тела. Предполагается, что они являются тонкими идеальными проводниками с пренебрежимо малой массой. Наличие покрытия токопроводящим слоем

(электродирование) поверхности  $\Omega_{el}$  делает ее эквипотенциальной

$$\int_{\Omega_{el}} \delta\varphi q_e d\Omega = \delta\varphi \int_{\Omega_{el}} q_e d\Omega = Q_{el}. \quad (1.5)$$

Здесь  $Q_{el}$  — суммарный заряд на электроде.

Конкретный вид граничных условий по электрической компоненте вектора состояния требует рассмотрения внешней электрической цепи и источников энергии. В качестве модельных источников электрической энергии используются широко применяемые в электротехнике генераторы напряжения и тока. Генератор напряжения обеспечивает заданный потенциал на электроде, а генератор тока задает подводимый ток.

1) На части поверхности  $\Omega_1$  (электродированной) задан потенциал электрического поля  $\varphi_0$ , а на неэлектродированной части поверхности  $\Omega_2$  — свободный заряд плотностью  $q_0$ . В этом случае  $\varphi = \varphi_0$  на  $\Omega_1$  и  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = q_0$  на  $\Omega_2$ .

2) Если колебания пьезоэлектрического тела возбуждаются электрическим полем с заданной разностью потенциалов, то на электродах  $\Omega_1^\pm$ , покрывающие тело, подается значение потенциала  $\varphi_0 = \pm V_0(t)$  (рис. 1).

3) При нагружении пьезоэлектрического тела генератором тока с заданным значением тока  $I_0(t)$  разность потенциалов на электродах заранее неизвестна. В этом случае из условия непрерывности тока в цепи, включая пьезоэлектрическое тело, вытекает интегральное условие для вектора электрической индукции.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{el}} q_e d\Omega = \int_{\Omega_{el}} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} d\Omega = -I_0(t). \quad (1.6)$$

Это интегральное условие нельзя непосредственно использовать как граничное условие. Поэтому в рассмотрение необходимо ввести неизвестное заранее значение потенциалов на электродах  $\varphi|_{\Omega_1^\pm} = \pm V(t)$ . Далее задача решается так же, как в случае задания граничных условий в виде разности потенциалов на электродах  $\Omega_1^\pm$ . После определения всех компонент сопряженного поля на основе уравнений электроупругости и интегрального условия (1.6) определяется неизвестная величина  $V(t)$ .

4) На пассивных электродах должно выполняться условие

$$Q_{el} = \int_{\Omega_{el}} q_e d\Omega = \int_{\Omega_{el}} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0.$$

Здесь  $Q_{el}$  — заряд на электроде.

5) Для случаев, когда пьезоэлементы используются в качестве генераторов электрической энергии, предполагается, что деформирование пьезокерамического тела осуществляется механическим путем, а нанесенные на части его поверхности электроды  $\Omega_1^+$  и  $\Omega_1^-$  служат для снятия электрической энергии (рис. 2).

При этом энергия, которая потребляется во внешней электрической цепи, замыкающей электроды, может быть представлена потерями на элементе с комплексной проводимостью  $Y = Y_1 + iY_2$  (величина, обратная сопротивлению).

В этом случае неизвестными являются как значение разности потенциалов на электродах  $V(t)$ , так и ток в цепи  $I(t)$ . Чтобы получить электрическое граничное условие для рассматриваемой задачи, необходимо воспользоваться законом Ома для внешней цепи  $I(t) = Y \cdot V(t)$ . Тогда

$$\int_{\Omega_1} \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} d\Omega = -YV(t) \quad (1.7)$$

Здесь интеграл берется по поверхности одного из электродов и описывает ток через пьезоэлектрический элемент. Процесс построения решения граничных задач в этом случае состоит в задании на электродных покрытиях неизвестной разности электрических потенциалов  $V(t)$ . Если при этих граничных условиях найдено решение, то неизвестное значение разности потенциалов  $V(t)$  определяется из равенства (1.7).

6) Из граничного условия (1.7) следуют два важных предельных случая.

а) для разомкнутой цепи ( $Y = 0$ ) имеет место равенство  $\int_{\Omega} \dot{D}_n d\Omega = 0$ ;

б) если электроды замкнуты ( $Y = \infty$ ), то из условия ограниченности тока смещения следует  $\varphi^+ - \varphi^- = 0$  (разность потенциалов между замкнутыми электродами).

Рассмотрим вариант электрических граничных условий, когда одна часть электродированной поверхности пьезоэлемента  $\Omega_m^{el}$  соединена с точкой нулевого потенциала последовательной  $RLC$ -цепью, а на другой части  $\Omega_k^{el}$  задан нулевой потенциал. В этом случае потенциал на незаземленном электроде будет

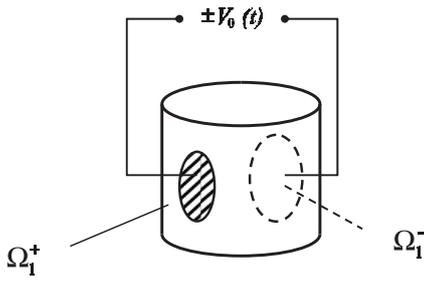


Рис. 1. Схема приложения электрического потенциала

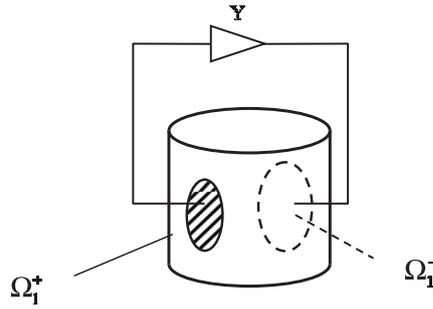


Рис. 2. Схема снятия электрической энергии

вычисляться по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \frac{Q_m}{C} + RI_m + LI\dot{m} = \\ &= \frac{Q_m}{C} + R\dot{Q}_m + L\ddot{Q}_m, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\varphi_m$  и  $Q_m = \int_{\Omega_m^{el}} q_e d\Omega$  — электрический потенциал и суммарный заряд на  $\Omega_m^{el}$ ,  $I_m = \dot{Q}_m$  — ток в проводнике,  $R$  — активное сопротивление;  $C$  — ёмкость;  $L$  — индуктивность. Тогда интеграл по поверхности  $\Omega_m^{el}$  в (1.1) будет определять электрические граничные условия для пьезоэлектрических участков

$$\int_{\Omega_m^{el}} q_e \delta\varphi d\Omega = -\delta\varphi_m Q_m. \quad (1.9)$$

В уравнении (1.9) учтено, что электродированная поверхность  $\Omega_m^{el}$  — эквипотенциальна, а цепь является внешним элементом по отношению к исследуемой системе (смена знака перед интегралом). В этой постановке система уравнений, данная уравнением (1.1), при отсутствии внешней нагрузки ( $X^i = \dot{t}^i = 0$ ) является однородной и может быть сформулирована как задача на собственные значения

$$\begin{aligned} &\int_{V_1} (\sigma^{ij} \delta\varepsilon_{ij} + \rho \ddot{u}^i \delta u_i) dV + \\ &+ \int_{V_2} (\sigma^{ij} \delta\varepsilon_{ij} - D^i \delta E_i + \rho \ddot{u}^i \delta u_i) dV + \\ &+ \delta\varphi_m Q_m = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В этом случае система уравнений (1.10), (1.2), (1.9) допускает квазигармоническое ре-

шение, описываемое временной функцией

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \bar{u}_i e^{i\psi t} = \tilde{u}_i(t) e^{i\omega t}, \\ \varepsilon_{ij}(t) &= \bar{\varepsilon}_{ij} e^{i\psi t} = \tilde{\varepsilon}_{ij}(t) e^{i\omega t}, \\ \varphi_m(t) &= \bar{\varphi}_m e^{i\psi t} = \tilde{\varphi}_m(t) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Здесь  $\psi = \omega + i\eta$  — комплексная собственная частота колебаний  $\tilde{u}_i(t) = \bar{u}_i e^{-\eta t}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t) = \bar{\varepsilon}_{ij} e^{-\eta t}$ ,  $\tilde{\varphi}_m(t) = \bar{\varphi}_m e^{-\eta t}$  — медленно меняющиеся функции времени,  $\bar{u}_i$  — комплексная мгновенная амплитуда колебаний. Найденные комплексные собственные частоты определяют резонансные частоты  $\text{Re}(\psi) = \omega$  системы и ее показатели демпфирования  $\text{Im}(\psi) = \eta$ . Комплексные мгновенные амплитуды колебаний определяют формы и фазы колебаний. В этом случае уравнение (1.10) может быть разрешено относительно суммарного заряда

$$Q_m(t) = \frac{\bar{\varphi}_m e^{i\psi t}}{C^{-1} - \psi^2 L + i\psi R} \quad (1.11)$$

После очевидных преобразований получаем вариационное уравнение на собственные значения (черту над переменной опускаем).

$$\begin{aligned} &\int_{V_2} \left( \delta\varepsilon_{ij} \left( C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ijk} E_k \right) - \right. \\ &\left. - \delta E_k \left( \beta^{ijk} \varepsilon_{ij} + e^{ki} E_i \right) - \psi^2 \rho \delta u^i u_i \right) dV + \\ &+ \int_{V_1} \left( \delta\varepsilon_{ij} C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \psi^2 \rho \delta u^i u_i \right) dV + \\ &+ \frac{\varphi_m \delta\varphi_m}{C^{-1} - L\psi^2 + i\psi R} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким образом, для пьезоэлектрического тела получено вариационное уравнение квазигармонических колебаний, содержащее диссипативные слагаемые, обусловленные потерей энергии во внешних электрических цепях

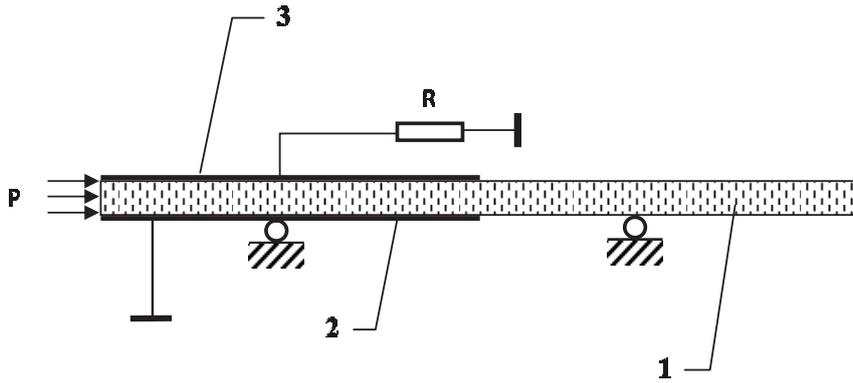


Рис. 3. Расчетная схема

с сопротивлением  $R$ . Индуктивность внешнего контура  $L$  и ёмкость  $C$  выступают в качестве своеобразных аналогов механической массы и жесткости, с помощью которых можно управлять собственными частотами колебаний.

Для параллельной  $RLC$ -цепи протекающий через нее ток равен сумме токов, протекающих через ее элементы

$$I_m = I_m^R + I_m^L + I_m^C = \frac{\varphi_m}{R} + C\dot{\varphi}_m + \frac{\int \varphi_m dt}{L}. \quad (1.13)$$

Учитывая квазигармонический характер рассматриваемого процесса, получим

$$I_m = \bar{\varphi}_m \left( \frac{1}{R} + i\psi C - \frac{i}{L\psi} \right) e^{i\psi t}.$$

Выполнив в последнем уравнении интегрирование по времени, получаем суммарный заряд на электроде

$$Q_m = \bar{\varphi}_m \left( C - \frac{i}{\psi R} - \frac{1}{L\psi^2} \right) e^{i\psi t}. \quad (1.14)$$

После преобразований, аналогичных выполненным для последовательной  $RLC$ -цепи, получаем вариационное уравнение на собственные значения (черту над переменной опускаем) для параллельных внешних электрических цепей:

$$\int_{V_2} \left( \delta \varepsilon_{ij} \left( C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ijk} E_k \right) - \delta E_k \left( \beta^{ijk} \varepsilon_{ij} + e^{ki} E_i \right) - \psi^2 \rho \delta u^i u_i \right) dV + \int_{V_1} \left( \delta \varepsilon_{ij} C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \psi^2 \rho \delta u^i u_i \right) dV + \varphi_m \delta \varphi_m \left( C - \frac{i}{\psi R} - \frac{1}{L\psi^2} \right) = 0. \quad (1.15)$$

При отсутствии в  $RLC$ -цепях тех или иных элементов в уравнениях (1.12) и (1.15) должны быть опущены соответствующие слагаемые. Более сложные цепи могут быть синтезированы комбинацией уравнений (1.12) и (1.15).

## 2. Численное исследование динамических свойств конструкции

Для оценки работоспособности предложенного алгоритма была решена следующая тестовая задача.

В шарнирно опертом пьезокерамическом (PZT-4) стержне 1 (рис. 3) прямоугольного сечения с поперечной поляризацией с помощью гармонической силы, действующей на торец, возбуждаются продольные колебания по второй моде. При этом на электродах 2 (заземленный электрод) и 3 (активный электрод), расположенных на боковой поверхности, возникает разность электрических потенциалов. Для дополнительного гашения механических колебаний электрод 3 соединен с резистором  $R$ , на котором происходит диссипация электрической энергии в виде джоулева тепла.

Изменяя сопротивление резистора  $R$ , можно добиться наибольшего гашения колебаний. Уровень амплитуды механических

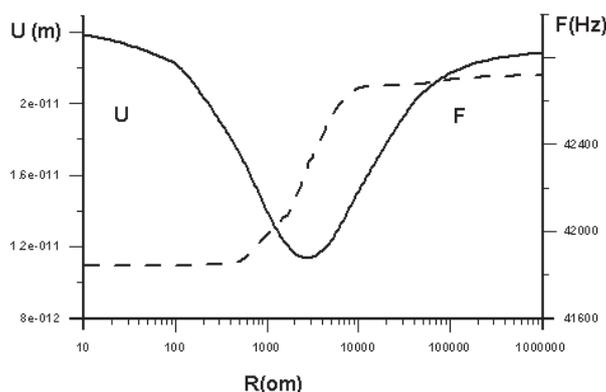


Рис. 4. Зависимость амплитуды и частоты колебаний от сопротивления  $R$

колебаний определяется через перемещения, возникающие на свободном конце стержня. Был получен график зависимости амплитуды и частоты колебаний от сопротивления  $R$  (рис. 4).

Из графика видно, что сопротивление в 2700 Ом является оптимальным, т.е. при этом значении происходит максимальное гашение колебаний.

### 3. Описание эксперимента

Для подтверждения эффекта демпфирования механических колебаний с помощью пьезоэлементов и внешних электрических цепей был проведен эксперимент, схема которого приведена на рис. 5.

Пьезокерамический стержень 1 прямоугольного сечения с поперечной поляризацией установлен на жестких подставках (рис. 6). Стержень электродирован наполовину по его длине. С помощью пьезоэлемента 2 возбуждаются продольные колебания, при этом на электродах 3, расположенных на боковых поверхностях, возникает разность электрических потенциалов. Для гашения механических колебаний к электродам 3 подключается электрическая цепь, на которой происходит диссипация электрической энергии в виде тепла. Уровень амплитуды механических колебаний определяется опосредованно через электрический потенциал  $U_1$ , возникающий на свободном конце стержня.

Эксперимент проводился на двух стержнях. На первом стержне рассматривались подробно различные конфигурации электрической цепи диссипации. На втором стержне проводился ряд экспериментов, подтверждающих выводы, полученные на первом

стержне. Внешняя электрическая цепь настраивалась на максимальное гашение второй моды колебаний. Вторая мода колебаний для первого стержня равна 41,21 кГц, для второго — 47,22 кГц.

Для гашения колебаний рассматривалось два типа электрических цепей: резистивная и резистивно-индуктивная. Изменяя сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$ , можно добиться наибольшего гашения колебаний.

В качестве резистивной цепи использовались последовательно соединенные переменные резисторы (рис. 7), что позволило подстраивать сопротивление в достаточно широком диапазоне. Испытуемый стержень при присоединении к нему гиратора и переменных сопротивлений представлен на рис. 7.

Так как катушка индуктивности громоздка, плохо варьируема, неудобна в работе и, как правило, имеет большой размер, её для компактности и удобства заменяют гиратором (рис. 7). Использование схемы гиратора позволяет реализовать большую индуктивность в небольшом по размерам, легком и недорогом корпусе. Гиратор представляет собой электрическую цепь, которая осуществляет инвертацию импеданса. Основная функция гиратора состоит в том, чтобы, используя напряжение на конденсаторе, заставить напряжение и ток на входе схемы вести себя подобно напряжению и току в катушке индуктивности.

Электрическая схема гиратора представлена на рис. 8.

Импеданс такой индуктивной цепи вычисляется по формуле

$$Z = \left( C_4 \frac{R_1 R_3}{R_2} \right) R_5,$$

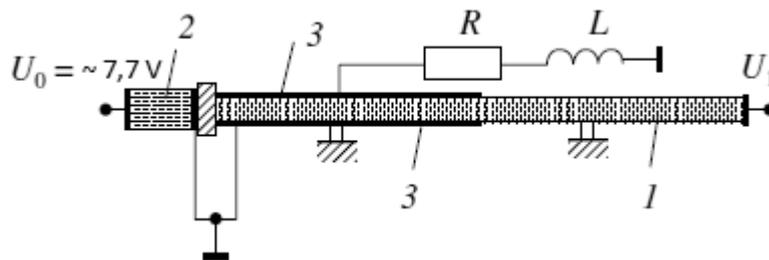


Рис. 5. Схема эксперимента

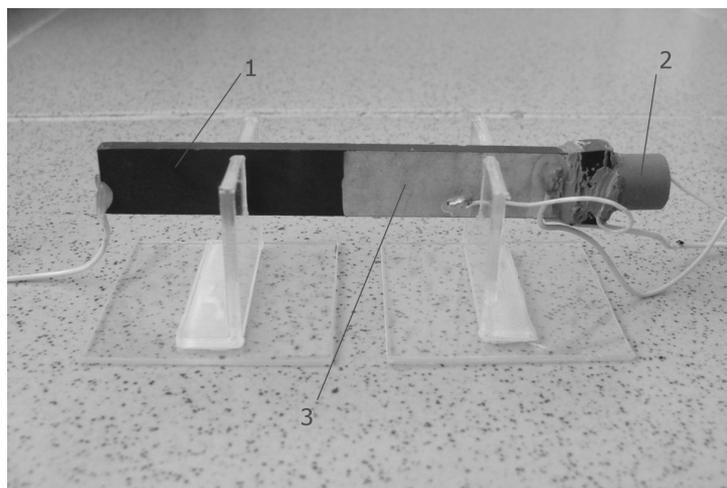


Рис. 6. Фото рассматриваемого стержня

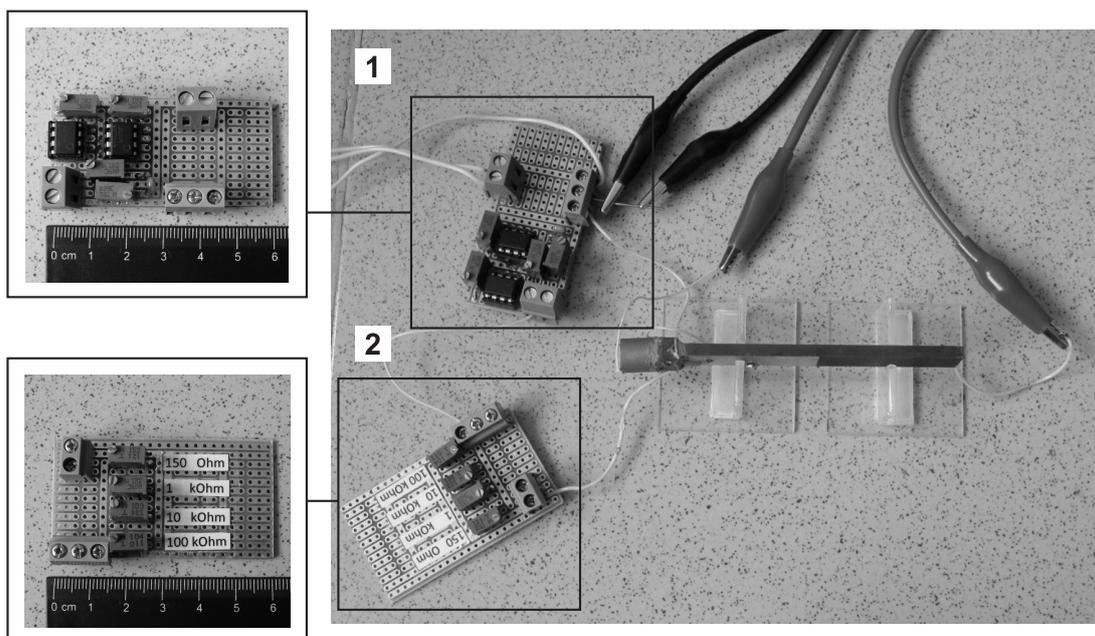


Рис. 7. Вид испытуемого стержня; 1 — последовательно соединенные переменные резисторы; 2 — гиратор

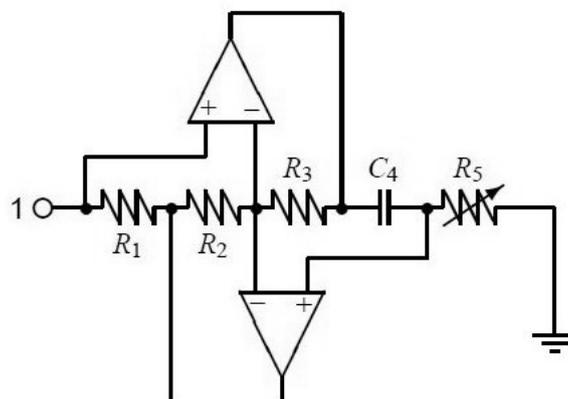


Рис. 8. Электрическая схема гиратора

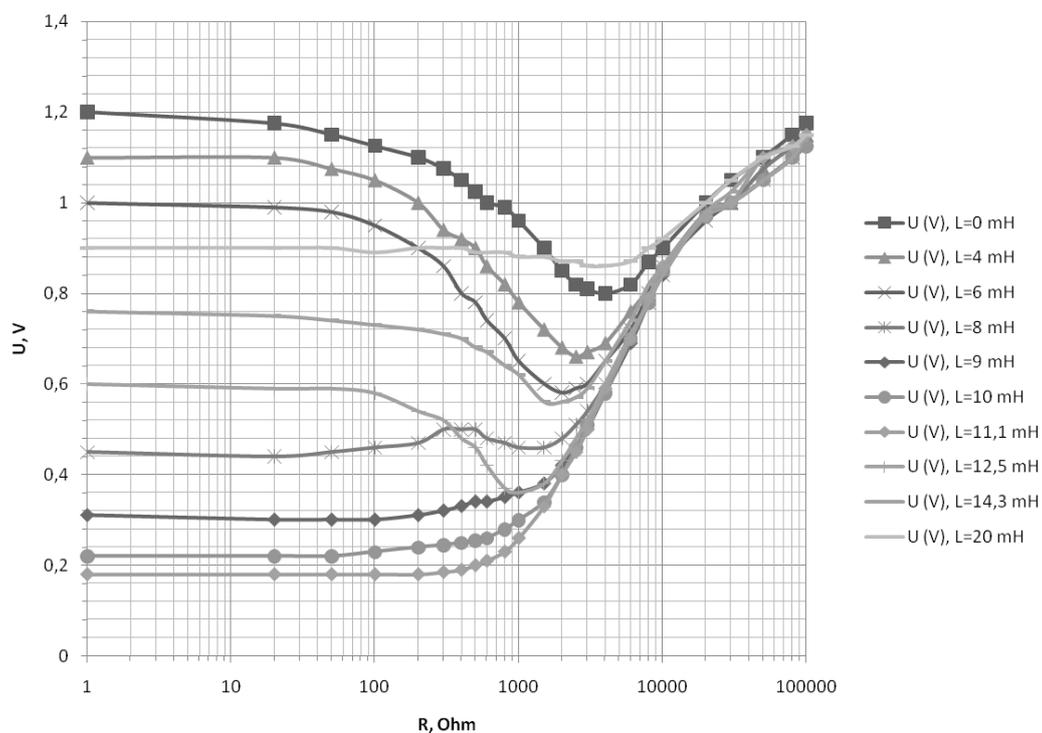


Рис. 9. Зависимости напряжения на конце пьезокерамического стержня №1 от активного сопротивления внешней цепи при фиксированных индуктивностях

где  $C_4$  — конденсатор (ёмкость),  $R_1, R_2, R_3$  — сопротивления,  $R_5$  — переменное сопротивление.

При помощи переменного сопротивления  $R_5$  индуктивность гиратора может варьироваться в широком диапазоне. В качестве операционных усилителей использовались стандартные прецизионные усилители OP07CP.

Синусоидальный сигнал подается на пьезоэлемент 2 (рис. 5) генератором частот GFG-8216A, электрический потенциал  $U_1$  измеряется при помощи милливольтметра ВЗ-38Б, предназначенного для измерения среднеквадратичного значения переменного напряжения синусоидальной формы. Предел допускаемой основной погрешности милливольтметра равен  $\pm 2,5\%$ . Рабочий диапазон — от 45 Гц до 1 МГц включительно.

#### 4. Экспериментальное исследование динамических свойств конструкции

На рис. 9 для первого стержня построено семейство кривых зависимости напряжения на конце пьезокерамического стержня от активного сопротивления внешней цепи при фиксированном значении индуктивности.

На рис. 10 приведены зависимости напряжения на конце первого стержня от частоты при индуктивности 10 мГн. На рис. 11 представлены те же кривые при резистивном гашении колебаний.

Семейство кривых зависимости напряжения на конце пьезокерамического стержня от активного сопротивления внешней цепи при фиксированных значениях индуктивности для второго стержня приведено на рис. 12.

Рис. 13 иллюстрирует зависимости напряжения на конце первого стержня от частоты при индуктивности 4 мГн.

Как видно из представленных графиков:

1) демпфирование колебаний только резистивной цепью не является оптимальным, причем, при  $R = 0$  или  $R = \infty$  наличие внешней электрической цепи не влияет на колебания системы, и дополнительного демпфирования колебаний не происходит;

2) при наличии только резистивной цепи максимальное гашение колебаний при  $R = 4$  кОм составляет 30 %;

3) при увеличении индуктивной составляющей во внешней электрической цепи до 11 мГн демпфирование продольных колебаний стержня увеличивается, но дальнейшее увеличение значения индуктивности приво-

дит к снижению степени демпфирования колебаний;

4) максимальное демпфирование продольных колебаний стержня составляет 85 % при индуктивности, равной 11 мГн, и сопротивлении 200 Ом;

5) в резистивно-индуктивной внешней электрической цепи при сопротивлении до 1 кОм определяющую роль в демпфировании колебаний играет индуктивность, но при значении сопротивления более 1 кОм влияние индуктивности начинает ослабевать;

6) при индуктивно-резистивной внешней электрической цепи частота резонанса при низкоомном сопротивлении начинает сдвигаться.

В том случае, когда достигается максимальное демпфирование колебаний, механическая энергия практически полностью преобразуется в электрическую энергию колебаний LC-контура и рассеивается в виде электромагнитного излучения и джоулевого тепла. При этом собственная частота LC-контура совпадает с соответствующей частотой механического резонанса стержневой системы.

#### Заключение

Проведено несколько серий экспериментов с пьезокерамическими стержнями, из которых видно, что оптимальное демпфирование колебаний достигается при наличии внешней индуктивно-резистивной цепи гашения. При этом стоит учитывать тот факт, что чрезмерное увеличение сопротивления или индуктивности может ухудшать способность внешней электрической цепи демпфировать колебания конструкции.

Выполненные численные и экспериментальные исследования подтверждают высокую эффективность и универсальность разработанного подхода к решению связанной электромеханической задачи демпфирования нежелательных колебательных процессов в механических системах, содержащих пьезоэлементы и внешние электрические RLC-цепи.

#### Литература

1. *Matveyenko V. P., Kligman E. P.* Natural Vibration Problem of Viscoelastic Solids as Applied to Optimization of Dissipative Properties of Constructions // Journal of Vibration and Control. 1997. Vol. 3. P. 87–102.

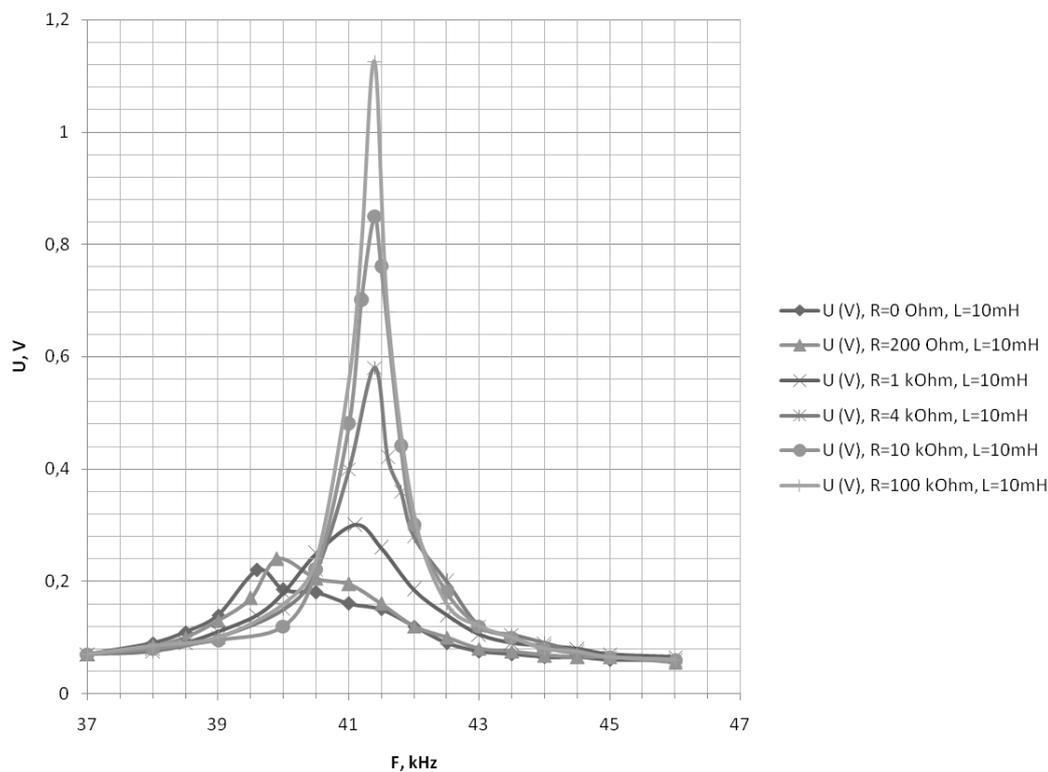


Рис. 10. Зависимости напряжения на конце стержня №1 от частоты индуктивности 10 МГц

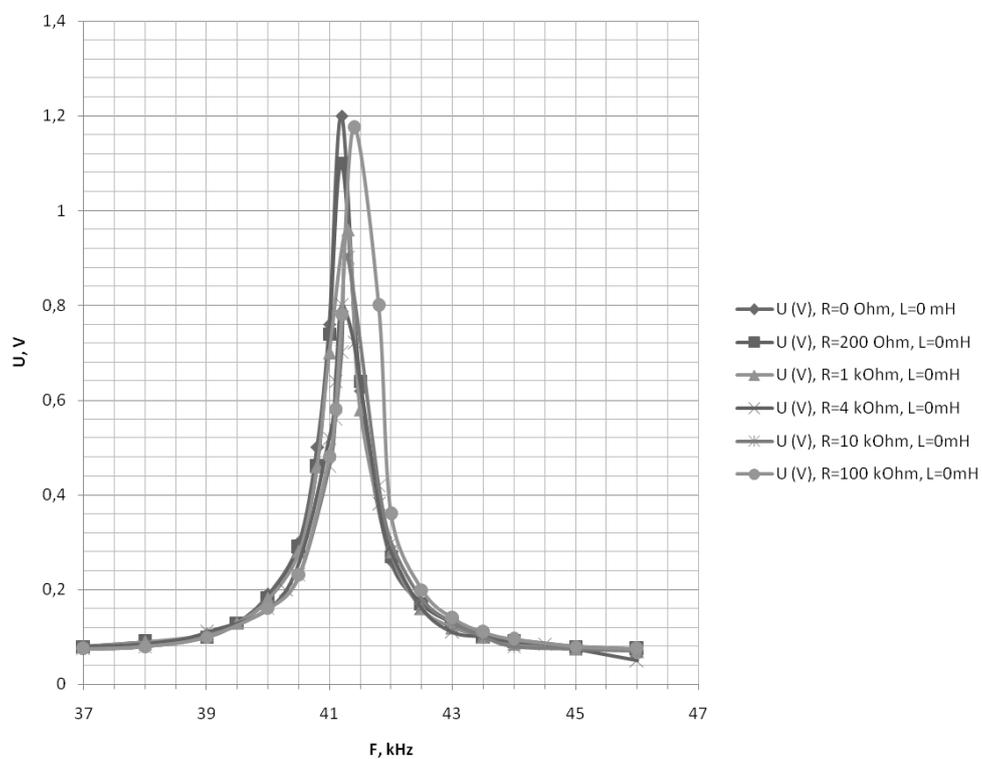


Рис. 11. Зависимости напряжения на конце стержня №1 от частоты при резистивном гашении колебаний

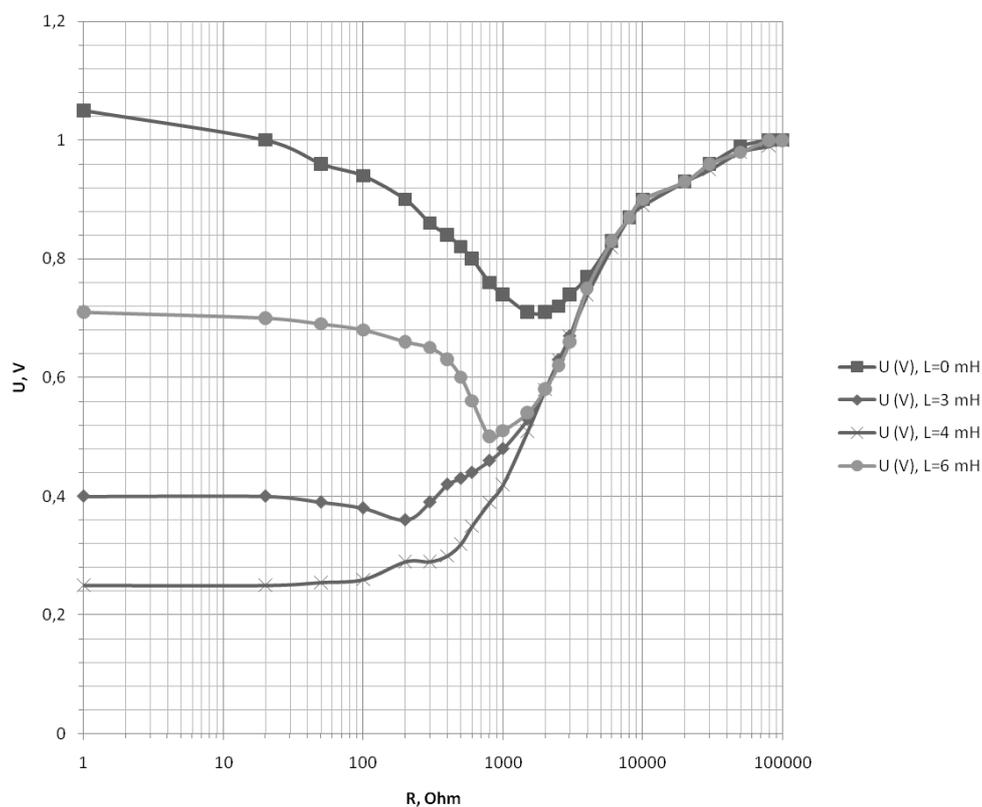


Рис. 12. Зависимости напряжения на конце пьезокерамического стержня №2 от активного сопротивления внешней цепи при фиксированных значениях индуктивности

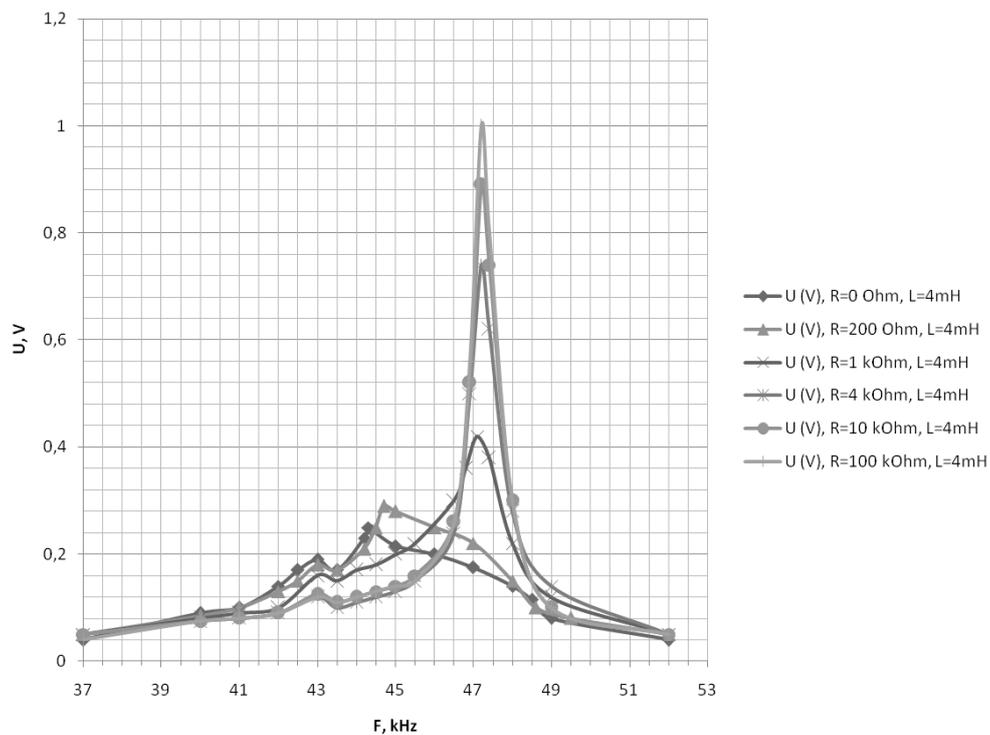


Рис. 13. Зависимости напряжения на конце стержня №2 от частоты при индуктивности 4 мГн

2. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. Машиностроение. М.: Наука, 1980. 376 с.
3. *Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С.* Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 304 с.
4. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
5. *Lee H.-J., Saravanos D.* Layerwise finite elements for smart piezoceramic composite plates in thermal environments // NASA TM-106990 AIAA-96-1277. 1996. 48 p.
6. *Forward R. L.* Electronic damping of vibrations in optical structures // Journal of Applied Optics. 1979. Vol. 18. No. 5. P. 690–697.
7. *Hagood N. W., Von Flotow A.* Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // Journal of Sound and Vibration. 1991. Vol. 146. No. 2. P. 243–268.
8. *Reza Moheimani S. O., Fleming Andrew J.* Piezoelectric transducers for vibration control and damping. Springer, 2006. 272 p.
9. *Lesieutre G. A.* Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials // The Shock and Vibration Digest. 1998. May. P. 30–33.
10. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
11. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. М.: Мир, 1988. 448 с.
12. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Электротермовязкоупругость. Киев.: Наук. думка, 1988. 319 с.

Ключевые слова: электроупругость, спектральные задачи, внешние электрические цепи, численные методы, пьезоэлектрический эффект, эксперимент

---

Статья поступила 10 мая 2011 г.

Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, г. Пермь

© Матвеев В. П., Клигман Е. П., Юрлов М. А., Юрлова Н. А., 2011