УДК 512.542

О НЕРАЗРЕШИМЫХ M_1-ГРУППАХ ЗАДАННОГО ПОРЯДКА

Титов Г. Н.[1]

ON NON-SOLVABLE M_1-GROUPS OF GIVEN ORDER

Titov G. N.

The article considers finite groups with generally semi-modular lattice of subgroups from below (M_1-groups). Existence of non-solvable M_1-groups of all divisible sixty orders is proved. The structure of non-solvable M_1-groups of small orders is studied.

Keywords: group, solvable, lattice, semi-modular

Рассматриваются только конечные группы. Обозначения и определения из теории решеток и теории групп, необходимые для изложения материала, можно найти в [1–9]. Решетка подгрупп группы G далее обозначена через $L(G)$.

Если при $X, Y \in L(G)$ имеем $X < Y$ и при этом не существует $Z \in L(G)$ такого, что $X < Z < Y$, то говорят, что X подчинен Y.

Решетку $L(G)$ называют нижней полумодулярной, если для любых $X, Y \in L(G)$ из того, что Y подчинен $\langle X; Y\rangle$, следует, что $X \cap Y$ подчинен X.

В [10] показано, что нижняя полумодулярность решетки $L(G)$ равносильна выполнению для всех $X, Y \in L(G)$ неравенства

$$d(X : X \cap Y) \leqslant d(\langle X; Y\rangle : Y),$$

где $d(U : V)$ — наибольшая из длин цепей от подгруппы V до содержащей ее подгруппы U группы G. Группы с нижней полумодулярной решеткой подгрупп хорошо изучены [11].

Представляет определенный интерес вопрос изучения строения группы G, у которой решетка подгрупп удовлетворяет более общему условию, чем условие нижней полумодулярности, — для любых $X, Y \in L(G)$ выполняется неравенство

$$d(X : X \cap Y) \leqslant d(\langle X; Y\rangle : Y) + 1. \qquad (1)$$

Группу G, у которой решетка подгрупп нижняя полумодулярная, в соответствии с [10] назовем M_0-группой, а группу G, у которой для любых подгрупп X и Y выполняется неравенство (1), — M_1-группой.

Известно [12], что неразрешимая M_1-группа должна содержать секцию, изоморфную знакопеременной группе A_5 подстановок пятой степени, порядок которой равен 60. Откуда следует, что порядок любой неразрешимой M_1-группы кратен 60. Оказывается, что имеет место в некотором смысле обратная теорема.

Теорема 1. Для любого натурального числа m, кратного 60, существует неразрешимая M_1-группа порядка m.

Также в статье доказывается

Теорема 2. Любая неразрешимая непростая группа, порядка 60p, где p — простое число, является M_1-группой.

Из теоремы 2 следует, что неразрешимые M_1-группы, порядка менее 168, с точностью до изоморфизма исчерпываются списком: A_5 (знакопеременная группа подстановок), S_5 (симметрическая группа подстановок), $A_5 \times Z_2$ (прямое произведение группы A_5 на циклическую группу второго порядка Z_2) и $SL_2(5)$ (специальная линейная группа матриц).

Для доказательства теорем 1, 2 нам понадобятся утверждения 1–7 и леммы 1–4. Следующие четыре очевидных утверждения будем использовать без ссылок:

– подгруппа и факторгруппа M_1-группы тоже являются M_1-группами [10];

[1]Титов Георгий Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, докторант кафедры высшей алгебры и геометрии Кубанского государственного университета: e-mail: georgii_titov@mail.ru

– при $X \leqslant Y$ или $Y \leqslant X$, где $X, Y \leqslant G$, выполняется неравенство (1), в частности, если для подгрупп $X, Y \leqslant G$ неравенство (1) не выполняется, то X, Y — нетривиальные подгруппы группы $\langle X; Y\rangle$;

– если $d(G:\ 1) \leqslant 3$, то G — M_1-группа;

– для любых $X, Y \leqslant G$ имеем [5]

$$|X \cap Y| \geqslant |X| \cdot |Y| / \langle X; Y\rangle.$$

Утверждение 1. A_5 — M_1-группа.

Доказательство. Максимальные подгруппы группы A_5 порядка 60 известны [2] и с точностью до сопряженности исчерпываются списком: B_1 — подгруппа порядка 12, все подстановки в разложении на независимые циклы которой имеют тот же вид, что и у группы A_4; $B_2 = \langle(12345)\rangle \cdot \langle(13)(45)\rangle$ — подгруппа порядка 10; $B_3 = \langle(123)\rangle \cdot \langle(12)(45)\rangle$ — подгруппа порядка 6. Замечаем, что B_i — M_1-группы, так как $d(B_i : 1) \leqslant 3$ $(i = 1; 2; 3)$.

Пусть X и Y — произвольные нетривиальные подгруппы группы A_5. Если $\langle X; Y\rangle \neq \mathrm{A}_5$, то подгруппа $\langle X; Y\rangle$ содержится в некоторой максимальной подгруппе группы G, сопряженной с одной из M_1-групп B_i, а значит для этих подгрупп X и Y неравенство (1) выполняется.

Рассмотрим случай, когда $\langle X; Y\rangle = \mathrm{A}_5$. Предположим, что для X и Y выполняется неравенство

$$d(X : X \cap Y) \geqslant d(\langle X; Y\rangle : Y) + 2. \qquad (2)$$

Так как $\langle X; Y\rangle = \mathrm{A}_5$ и $d(\mathrm{A}_5 : Y) \geqslant 1$, то $d(X : X \cap Y) \geqslant 3$. Но $d(\mathrm{A}_5 : 1) = 4$, поэтому $X \cap Y = 1$ и $d(X : 1) = 3$. Откуда следует, что X — максимальная подгруппа группы A_5, сопряженная с B_1, и Y — тоже максимальная подгруппа. Приходим к неравенствам $|X| \geqslant 12$, $|Y| \geqslant 6$, из которых $|X \cap Y| \geqslant |X| \cdot |Y|/60 > 1$, то есть $X \cap Y \neq 1$. Полученное противоречие и доказывает утверждение 1.

Лемма 1. S_5 — M_1-группа.

Доказательство. Максимальные подгруппы группы S_5 с точностью до сопряженности исчерпываются списком: $F_1 = A_5$; $F_2 = St(5)$ — стабилизатор символа 5, то есть подгруппа порядка 24, все подстановки в разложении на независимые циклы которой имеют тот же вид, что и у группы S_4; $F_3 = \langle(12345)\rangle \cdot \langle(2354)\rangle$ — подгруппа, изоморфная группе диэдра D_5 порядка 20; $F_4 = St(4;5) \times \langle(45)\rangle$, где $St(4;5)$ — стабилизатор символов 4 и 5, то есть подгруппа, все подстановки в разложении на независимые циклы которой имеют тот же вид, что и у группы S_3. Замечаем, что по утверждению 1 подгруппа F_1 является M_1-группой, а также в силу $d(F_3 : 1) = d(F_4 : 1) = 3$ подгруппы F_3 и F_4 — M_1-группы.

Покажем, что максимальная подгруппа $F_2 \cong S_4$ — тоже M_1-группа. Предположим противное, то есть в группе S_4 найдутся такие подгруппы X и Y, для которых выполняется неравенство (2). Так как $d(S_4 : 1) = 4$ и из (2) $d(X : X \cap Y) \geqslant 3$, то $X \cap Y = 1$, $d(X : 1) = 3$ и $d(\langle X; Y\rangle : Y) = 1$. Откуда X — максимальная подгруппа группы S_4, а значит $\langle X; Y\rangle = S_4$, и в силу $d(S_4 : Y) = 1$ приходим к выводу, что и Y — тоже максимальная подгруппа. Максимальные подгруппы группы S_4 имеют порядки 12, 8 и 6. Поэтому $|X|, |Y| \geqslant 6$ и $|X \cap Y| \geqslant |X| \cdot |Y|/24 > 1$, что противоречит $X \cap Y = 1$. Это и доказывает, что S_4, следовательно и F_2, — M_1-группы.

Итак, показано, что все максимальные подгруппы группы S_5 являются M_1-группами.

Предположим, что S_5 не является M_1-группой. Тогда в S_5 найдутся нетривиальные подгруппы X и Y, для которых выполняется неравенство (2). Если $\langle X; Y\rangle \neq S_5$, то по доказанному $\langle X; Y\rangle$ лежит в максимальной подгруппе, являющейся M_1-группой, что противоречит выполнимости (2). Поэтому $\langle X; Y\rangle = S_5$ и неравенство (2) примет вид

$$d(X : X \cap Y) \geqslant d(S_5 : Y) + 2. \qquad (3)$$

В силу $d(S_5 : 1) = 5$ из (3) получаем: 1) если $d(S_5 : Y) = 1$, то $3 \leqslant d(X : X \cap Y) \leqslant 4$; 2) если $d(S_5 : Y) \geqslant 2$, то $X \cap Y = 1$ и $d(X : 1) = 4$, а значит, $d(S_5 : Y) = 2$.

Рассмотрим вариант 1). В этом случае Y — максимальная подгруппа, откуда следует $|Y| \in \{60; 24; 20; 12\}$, в частности, $|Y| \geqslant 12$. При $d(X : X \cap Y) = 4$ имеем $X \cap Y = 1$, $d(X : 1) = 4$, то есть X — тоже максимальная подгруппа и $|X| \geqslant 12$. Откуда $|X \cap Y| \geqslant |X| \cdot |Y|/120 > 1$, что противоречит равенству $X \cap Y = 1$. Поэтому в рассматриваемом случае 1) $d(X : X \cap Y) = 3$.

Возможны два подслучая: а) $X \cap Y \neq 1$ и б) $X \cap Y = 1$.

В а) имеем $d(X : 1) = 4$. Поэтому X — максимальная подгруппа, сопряженная к F_1 или F_2. Если $|X| = 60$, то из $|X \cap Y| \geqslant |X| \cdot |Y|/120 = 6$ ввиду $d(X \cap Y : 1) \geqslant 2$ получим $d(X : 1) \geqslant 5$, что приводит к противоречию. В связи с этим X сопряжена с подгруппой $F_2 \cong S_4$ и $|X \cap Y| \geqslant |X| \cdot |Y|/120 > 2$, то есть $|X \cap Y| \geqslant 3$. Так как $d(X \cap Y : 1) \leqslant 1$ и $|X| = 24$, то $|X \cap Y| = 3$. Но в S_4 подгруппа третьего порядка является второй максимальной, а значит приходим к равенству $d(X : X \cap Y) = 2$, которое противоречит рассматриваемому случаю 1).

В б), когда $X \cap Y = 1$, имеем $d(X : 1) = 3$. Если порядок подгруппы X делится на нечетное простое число, то из $d(X : 1) = 3$ следует неравенство $|X| \geqslant 12$, и тогда $|X \cap Y| \geqslant |X| \cdot |Y|/120 > 1$, что противоречит $X \cap Y = 1$. Поэтому $|X| = 8$, а значит, X — силовская 2-подгруппа группы S_5.

Для максимальной подгруппы Y получаем неравенство $|X \cap Y| \geqslant |X| \cdot |Y|/120 > 1$ как только $|Y| \geqslant 20$. Поэтому $|Y| = 12$, то есть $Y \cong F_4$. Не ограничивая общности рассуждений (с точностью до сопряженности), можем считать, что $Y = F_4$. Силовская 2-подгруппа X содержится в максимальной подгруппе, сопряженной к подгруппе $F_2 = St(5)$. Поэтому для некоторого $i \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ имеем $X \leqslant St(i)$.

Рассмотрим подгруппу $Z = Y \cap St(i)$. Ясно, что $|Z| \geqslant 12 \cdot 24/120$, то есть $|Z| \geqslant 3$. Хотя бы одна из подстановок (12) или (45) из Y содержится в $St(i)$, а значит $|Z|$ делится на 2. Откуда $|Z| \geqslant 4$. Но тогда с одной стороны $X \cap Z \leqslant X \cap Y = 1$, а с другой в силу $\langle X; Z\rangle = St(i)$ получаем неравенство $|X \cap Z| \geqslant |X| \cdot |Z|/24 > 1$. Полученное противоречие и завершает рассмотрение случая 1).

Теперь рассмотрим вариант 2). Как было отмечено ранее, в этом случае имеем $X \cap Y = 1$, $d(X : 1) = 4$ и $d(S_5 : Y) = 2$. Тогда X — максимальная подгруппа, сопряженная к F_1 или F_2, в частности, $|X| \geqslant 24$, а Y — неединичная подгруппа, порядок которой не равен простому числу. Откуда $1 = |X \cap Y| \geqslant 24 \cdot |Y|/120$, то есть $|Y| \leqslant 5$ и поэтому $|Y| = 4$.

Пусть P — силовская 2-подгруппа в S_5, содержащая Y. Тогда для подходящего символа $j \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ имеем цепь $Y < P < St(j) < S_5$. Откуда следует $d(S_5 : Y) \geqslant 3$, что противоречит равенству $d(S_5 : Y) = 2$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 1.

Утверждение 2. Пусть N — нормальная подгруппа простого порядка группы G и $U \leqslant V \leqslant G$.

2.1) Если $N \leqslant U$ или $N \cap V = 1$, то $d(V : U) = d(NV : NU)$.

2.2) Если $N \leqslant V$ и $N \cap U = 1$, то $d(V : U) = d(NV : NU) + 1$.

Доказательство.

2.1) Если $N \leqslant U \leqslant V$, то $U = NU$ и $V = NV$. Если же $N \cap V = 1$, имеем решеточный изоморфизм интервалов $L(V : U)$ и $L(NV : NU)$ [5]. В обоих случаях $d(V : U) = d(NV : NU)$.

2.2) Если $N \leqslant V$ и $N \cap U = 1$, то $U < V$. Существует цепь наибольшей длины от U до V вида $U = W_0 < W_1 < \ldots < W_m = V$, где $m = d(V : U)$.

Пусть r — наименьший номер, для которого $N \leqslant W_r$. Тогда имеем нестрогую цепь $NU = NW_0 \leqslant NW_1 \leqslant \ldots \leqslant NW_m = V$, в записи которой знак «$\leqslant$» означает либо равенство, либо подчинение. Согласно 2.1)

$$d(NW_{r-1} : NW_0) = d(W_{r-1} : W_0) = r - 1,$$

$$d(NW_m : NW_r) = d(W_m : W_r) = m - r$$

(в цепи наибольшей длины от U до V для любых $i, j \in \{0; 1; \ldots ; m\}$ при $i \leqslant j$ имеем $d(W_j : W_i) = j - i$). Тогда в силу $NW_{r-1} = W_r$ получим цепь

$$\begin{aligned} &NU = NW_0 < \ldots \\ &\ldots < NW_{r-1} < NW_{r+1} < \ldots < NW_m = V \end{aligned}$$

длины $m - 1$. Поэтому существует проходящая через NU цепь от U до V, наибольшей возможной длины m от U до V. Следовательно $(m - 1)$ — наибольшее число среди длин цепей от NU до $V = NV$, что и доказывает утверждение 2.

Утверждение 3. Пусть N — нормальная подгруппа простого порядка группы G такая, что G/N — M_1-группа. Тогда для любых подгрупп X и Y при выполнении включения $N \leqslant X$ или $N \leqslant Y$ выполняется неравенство (1).

Доказательство. Интервалы $L(G : N)$ и $L(G/N : 1)$ изоморфны [5]. Поэтому для любых подгрупп X и Y группы G выполняется неравенство

$$d(NX : NX \cap NY) \leqslant d(\langle NX; NY\rangle : NY) + 1.$$

При $N \leqslant X$ или $N \leqslant Y$ имеем

$$NX \cap NY = N(X \cap Y), \quad \langle NX; NY\rangle = \langle X; Y\rangle.$$

Если $N \leqslant X$ и $N \cap Y = 1$, то по 2.2

$$d(NX : NX \cap NY) = d(X : X \cap Y) - 1,$$

$$d(\langle NX; NY\rangle : NY) = d(\langle X; Y\rangle : Y) - 1,$$

а если $N \leqslant Y$, то по 2.1

$$d(\langle NX; NY\rangle : NY) = d(\langle X; Y\rangle : Y),$$

$$d(NX : NX \cap NY) = d(X : X \cap Y).$$

В обоих случаях получаем неравенство (1) и утверждение 3 доказано.

Лемма 2. $SL_2(5)$ — M_1-группа.

Доказательство. Для группы $G = SL_2(5)$ известно [2], что центр $Z(G)$ группы G имеет вид $Z(G) = \langle z\rangle$, где $z = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, и $G/Z(G) \cong A_5$. Если $v = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ — элемент второго порядка, где $a, b, c, d \in GF(5)$, то имеем равенства:

$$ad - bc = 1, \quad a^2 + bc = d^2 + bc = 1,$$

$$(a + d)b = (a + d)c = 0.$$

Возможны случаи: а) $b = 0$; б) $a = -d$. В случае а) $a^2 = d^2 = 1$, то есть $a, d \in \{1; 4\}$. Из $ad - bc = 1$ имеем $a = d$, откуда $c = 0$ и $v = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, где $a \in \{1; 4\}$. Так как $v \neq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, то $v = z$. В случае б) из $ad - bc = 1$ следует $-a^2 - bc = 1$, что противоречит равенству $a^2 + bc = 1$.

Таким образом, только элемент z является элементом второго порядка группы G. Следовательно, любая подгруппа четного порядка содержит z.

Пусть X и Y — произвольные нетривиальные подгруппы группы G. Если хотя бы одна из этих подгрупп имеет четный порядок, то она содержит $\langle z\rangle$ и ввиду того, что $G/Z \cong A_5$ — M_1-группа, по утверждению 3 получим выполнимость неравенства (1). Если обе подгруппы имеют нечетный порядок, то в силу $X \cap \langle z\rangle = 1$ подгруппа X изоморфна подгруппе нечетного порядка группы $G/Z \cong A_5$. Откуда следует $|X| \in \{3; 5\}$, то есть $d(X : X \cap Y) \leqslant 1$. Поэтому для Xи Y опять выполняется неравенство (1), что и доказывает лемму 2.

Лемма 3. Пусть $G_1 = A_4 \times R_1$ и $G_2 = A_5 \times R_2$, где R_1 и R_2 — циклические группы порядка n $(n \in \mathrm{N})$. Тогда G_1 и G_2 — M_1-группы.

Для доказательства леммы 3 нам понадобятся следующие утверждения.

Утверждение 4. Всякая сверхразрешимая (разрешимая) максимальная подгруппа группы $G_1(G_2)$ содержит подгруппу $R_1(R_2)$.

Доказательство. Если K_i $(i = 1; 2)$ — такая сверхразрешимая (разрешимая) максимальная подгруппа группы G_i, которая не содержит R_i, то $G_i = K_iR_i$. Тогда с учетом $Z(G_i) = R_i$ из сверхразрешимости (разрешимости) группы K_iR_i/R_i следует сверхразрешимость (разрешимость) группы G_i. Получили противоречие, которое и доказывает утверждение 4.

Утверждение 5. Всякая несверхразрешимая (неразрешимая) подгруппа группы $G_1(G_2)$ содержит коммутант группы, то есть подгруппу $V(A_5)$, где $V = \{e; (12)(34); (13)(24); (14)(23)\}$.

Доказательство. В силу $G_1 = A_4 \times R_1$ имеем $[G_1; G_1] = [A_4; A_4] = V$, а в силу $G_2 = A_5 \times R_2$ имеем $[G_2; G_2] = [A_5; A_5] = A_5$.

Пусть $H_1(H_2)$ — несверхразрешимая (неразрешимая) подгруппа группы $G_1(G_2)$. Тогда факторгруппа H_iR_i/R_i не является сверхразрешимой при $i = 1$ и не является разрешимой при $i = 2$. В силу $H_iR_i/R_i \leqslant G_i/R_i$ и $G_1/R_1 \cong A_4$, $G_2/R_2 \cong A_5$ получаем $H_iR_i/R_i = G_i/R_i$, то есть $H_iR_i = G_i$. Откуда $[G_i; G_i] = [H_i; H_i] \leqslant H_i$ $(i = 1; 2)$. Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. Разрешимая несверхразрешимая подгруппа группы G_i, пересекающаяся с R_i по единичной подгруппе, изоморфна группе A_4 $(i = 1; 2)$. Неразрешимая подгруппа группы G_2, пересекающаяся с R_2 по единичной подгруппе, совпадает с A_5.

Доказательство. Пусть H_i — разрешимая несверхразрешимая подгруппа группы G_i $(i = 1; 2)$. Так как факторгруппа H_iR_i/R_i тоже является разрешимой несверхразрешимой и вложима в группу G_i/R_i, изоморфную A_4 или A_5, то с учетом описания максимальных подгрупп группы A_5 получим $H_iR_i/R_i \cong A_4$. Если $H_i \cap R_i = 1$, то $H_iR_i/R_i \cong H_i$, а значит $H_i \cong A_4$ $(i = 1; 2)$, что и доказывает первую часть утверждения 6.

Теперь пусть H — неразрешимая подгруппа в G_2, имеющая единичное пересечение с R_2. По утверждению 5 $H \geqslant A_5$, а значит $G_2 = A_5 \times R_2 = H \times R_2$ и $H = A_5$. Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. Несверхразрешимая подгруппа группы G_2 в пересечении с A_5 содержит нециклическую подгруппу.

Доказательство. Если H — несверхразрешимая подгруппа, то ее коммутант $[H; H]$ не является циклической группой. Из $R_2 \cong G_2/A_5 \geqslant HA_5/A_5$ и $HA_5/A_5 \cong H/(H \cap A_5)$ [5] следует коммутативность $H/(H \cap A_5)$. Поэтому $H \cap A_5$ содержит нециклическую подгруппу $[H; H]$. Утверждение 7 доказано.

Доказательство леммы 3. Докажем, что G_1 — M_1-группа. Предположим, что среди групп вида $A_4 \times Z_m (m \in N)$ существуют не M_1-группы и G_1 имеет наименьший порядок среди таких групп. Если $n = 1$, то $G_1 = A_4$ — M_1-группа и доказывать нечего. Поэтому полагаем $n > 1$. В G_1 найдутся нетривиальные подгруппы X и Y, для которых выполняется (2).

Пусть N — подгруппа простого порядка из R_1. Ясно, что $G_1/N \cong A_4 \times Z_m (m = n/|N|)$, а значит G_1/N — M_1-группа. Из 3 следует $X \cap N = Y \cap N = 1$. В силу произвольности выбора N в R_1 получаем $X \cap R_1 = Y \cap R_1 = 1$.

Допустим, что X — несверхразрешимая подгруппа. Согласно утверждению 6 $X \cong A_4$. При $d(X : X \cap Y) \leqslant 2$ неравенство (2) не выполняется, следовательно $d(X : X \cap Y) \geqslant 3$, то есть $X \cap Y = 1$. Согласно 5 X содержит коммутант группы G_1, поэтому X — нормальная подгруппа. Откуда $\langle X; Y\rangle = XY$ и $G_1 = X \times R_1$. Так как $X \cap Y = 1$, то Y изоморфна подгруппе циклической группы R_1.

С другой стороны, $Y \cap R_1 = 1$ и поэтому Y изоморфна подгруппе группы A_4. Следовательно, $|Y| \in \{2; 3\}$. Тогда в R_1 найдется подгруппа K порядка 2 или 3, для которой $XY = X \times K$. В силу $Y < Y \times K < XY$ имеем $d(\langle X; Y\rangle : Y) \geqslant 2$, а значит $d(X : X \cap Y) = 3 \leqslant d(\langle X; Y\rangle : Y) + 2$, что противоречит (2).

Теперь пусть X — сверхразрешимая подгруппа группы G_1. Из $X \cap R_1 = 1$ следует что X изоморфна подгруппе из A_4, поэтому X изоморфна одной из групп: $Z_2, Z_3, Z_2 \times Z_2$. Откуда имеем $d(X : X \cap Y) \leqslant 2$, что противоречит (2).

Итак, показано, что G_1 — M_1-группа. Докажем, что G_2 — тоже M_1-группа.

Предполагаем, что среди групп вида $A_5 \times Z_m (m \in N)$ существуют не M_1-группы, и полагаем, что G_2 имеет наименьший порядок среди таких групп. Выберем в G_2 нетривиальные подгруппы X и Y, для которых выполняется неравенство (2). Согласно утверждению 1 A_5 — M_1-группа, поэтому $R_2 \neq 1$.

Пусть N — произвольная подгруппа простого порядка из R_2. Согласно выбору G_2 факторгруппа G_1/N — M_1-группа. Откуда в силу утверждения 3 $X \cap N = Y \cap N = 1$ и поэтому $X \cap R_2 = Y \cap R_2 = 1$.

Покажем, что все собственные подгруппы группы G_2 являются M_1-группами.

Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G_2. Если M неразрешима, то по утверждению 5 она содержит A_5, а значит представима в виде $M = A_5 \times (M \cap R_2)$ [8]. Так как $\mathrm{M} \cap R_2$ — циклическая группа порядка меньше n, то согласно выбору G_2 подгруппа M является M_1-группой.

Теперь пусть M — разрешимая группа. Тогда по утверждению 4 она содержит R_2 и поэтому $M = (M \cap \mathrm{A}_5) \times R_2$. Ясно, что $M \cap A_5$ максимальна в A_5. Следовательно, $M \cap A_5$ изоморфна одной из групп: A_4, S_3 или D_5 (группа диэдра десятого порядка). Если $M \cap A_5 \cong A_4$, то $M \cong G_1$ и по доказанному в первой части леммы 3 M — M_1-группа. Если $M \cong S_3 \times R_2$ или $M \cong D_5 \times R_2$, то M — сверхразрешимая группа и в ней можно построить главный ряд $1 = W_0 < W_1 < \ldots < W_k = M \quad (k \geqslant 2)$, в котором индекс централизатора любого фактора W_{i+1}/W_i в группе M/W_i делит простое число $(i = 0; 1; \ldots; k-1)$. По критерию Джонса [11] группа M имеет нижнюю полумодулярную решетку подгрупп и следовательно является M_1-группой. Мы доказали, что все максимальные, а значит и все подгруппы группы G_2 являются M_1-группами.

Далее, если $\langle X; Y\rangle$ — собственная подгруппа группы G_2, то по доказанному она M_1-группа, что противоречит выполнимости неравенства (2). Поэтому $\langle X; Y\rangle = G_2$ и неравенство (2) примет вид

$$d(X : X \cap Y) \geqslant d(G_2 : Y) + 2. \qquad (4)$$

Рассмотрим случай, когда X — неразрешимая подгруппа. По утверждению 6 в виду $X \cap R_2 = 1$ имеем $X = A_5$. Тогда $G_2 = \langle X; Y\rangle = A_5 Y$.

Из (4) следует $d(X : X \cap Y) \geqslant 3$, $d(X : 1) = d(A_5 : 1) = 4$ и, так как для любой подгруппы $H \leqslant A_5$ из условия $d(A_5 : H) \geqslant 3$ следует $|H| \in \{1; 2\}$, то $|X \cap Y| \in \{1; 2\}$. Далее, $R_2 \cong A_5 Y/A_5$, то есть $R_2 \cong Y/(X \cap Y)$.

Из цикличности группы $Y/(X \cap Y)$ и $|X \cap Y| \in \{1; 2\}$ получаем коммутативность Y.

Так как $Y \cong Y R_2/R_2 \leqslant G_2/R_2$, то абелева группа Y изоморфно вкладывается в A_5. Поэтому Y изоморфна одной из групп: $Z_2, Z_3, Z_2 \times Z_2, Z_5$. Если $|Y| \in \{2; 4\}$, то Y строго содержится в некоторой силовской 2-подгруппе группы G_2, а та в свою очередь строго содержится в собственной подгруппе группы G_2, изоморфной $A_4 \times Z_n$. Откуда $d(G_2 : Y) \geqslant 3$ и по (4)

$d(A_5 : A_5 \cap Y) = d(X : X \cap Y) \geqslant 5$, что невозможно. Следовательно $|Y| \in \{3; 5\}$, в частности, $X \cap Y = 1$.

Так как $|G_2| = |XY| = |X||Y| = |A_5||R_2|$, то $|Y| = |R_2|$.

Пусть $K = Y \times R_2$. В силу $G_2 = A_5 \times R_2$ имеем $K = (K \cap A_5) \times R_2$. Подгруппа $K \cap A_5$ имеет порядок 2 или 3, поэтому найдется собственная подгруппа P в A_5, для которой $K \cap A_5 < P < A_5$. Откуда следует, что $Y < K < R_2 \times P < G_2$, то есть $d(G_2 : Y) \geqslant 3$, что в силу (4) опять приводит к ложному неравенству $d(A_5 : A_5 \cap Y) \geqslant 5$. Это завершает рассмотрение случая, когда X — неразрешимая подгруппа.

Рассмотрим случай, когда X — разрешимая несверхразрешимая подгруппа. Следуя 6, в силу $X \cap R_2 = 1$ имеем $X \cong A_4$. Так как из (4) следует, что $d(X : X \cap Y) \geqslant 3$, то $X \cap Y = 1$, $d(X : 1) = 3$ и $d(G_2 : Y) = 1$, то есть Y — максимальная подгруппа группы G_2.

По утверждению 4 с учетом $Y \cap R_2 = 1$ максимальная подгруппа Y является неразрешимой, а значит, согласно 6 $Y = A_5$. Но когда X — несверхразрешимая подгруппа, то по утверждению 7 она имеет нециклическое пересечение с $Y = A_5$. Пришли к противоречию.

Рассмотрим последний случай, когда X — неединичная сверхразрешимая подгруппа. Из $X \cap R_2 = 1$ и $G_2 = A_5 \times R_2$ следует, что сверхразрешимая группа X изоморфна подгруппе группы A_5. Поэтому X изоморфна одной из групп: Z_2, Z_3, $Z_2 \times Z_2$, Z_5, S_3, D_5. Наибольшая длина цепи от единичной подгруппы до каждой из этих групп не более двух, то есть $d(X : 1) \leqslant 2$, что противоречит (4). Полученное противоречие окончательно завершает доказательство леммы 3.

Лемма 4. Неразрешимая непростая группа порядка 60p, где p — простое число, изоморфна одной из групп: $A_5 \times Z_p$ (p $\geqslant 2$), S_5 (p $= 2$) или $SL_2(5)$ (p $= 2$).

Доказательство. Пусть G — неразрешимая непростая группа порядка 60p. В G найдется нетривиальная нормальная подгруппа N. Если главный ряд группы G имеет длину более двух, то порядок каждого фактора этого ряда в разложении на простые множители имеет не более трех сомножителей. Поэтому все факторы ряда и сама группа G разрешимы, что приводит к противоречию. Следовательно, ряд $1 < N < G$ является главным рядом группы G. Один из факторов ряда $N/1$ или G/N имеет некоторый простой порядок q, а другой изоморфен некоторой неабелевой простой группе F порядка $60p/q$.

Предположим, что группа F не изоморфна группе A_5. В списке Диксона [4] следующие две простые неабелевы группы после A_5 имеют порядки 168 и 360. Ясно, что 168 не делит 60p. Поэтому $|F| \geqslant 360$ и $p \geqslant 6q$. Откуда следует, что $p \geqslant 13$ и $|F|$ не делится на куб простого числа. Тогда $|F|$ делится на 12 [7] и $|F| = 12p$.

Если нормализатор H силовской p-подгруппы P группы F совпадет с P, то по теореме Бернсайда [7] F не будет простой группой. Поэтому $P < H < F$и тогда индекс H в F не более шести. Следовательно, по теореме 12.2.1 [5] группа F изоморфна подгруппе симметрической группы S_6, порядок которой равен 720. Откуда $12p$ делит 720 и не меньше 360, то есть p делит 60 и $p \geqslant 30$. Таких простых чисел p не существует. Полученное противоречие означает, что $F \cong A_5$ и $q =$ p.

Рассмотрим случай, когда $N \cong A_5$. Из нормальности N в G следует нормальность централизатора C подгруппы N в G, причем факторгруппа G/C изоморфна подгруппе группы автоморфизмов группы A_5 [3]. Так как $Aut\ A_5 \cong S_5$, то G/C изоморфна подгруппе группы S_5.

Из нормальности Cи простоты нормальной неабелевой подгруппы N в G следует существование подгруппы вида $N \times C$. Если $C = 1$, то в силу $|G| = 60$p имеем $G \cong G/C$, то есть $|G/C| \geqslant 60$ и поэтому $G \cong S_5$. Если же $C \neq 1$, то $N \times C = G$, где $C \cong Z_p$, а значит $G \cong A_5 \times Z_p$. Таким образом, уже получены две группы из списка в формулировке леммы 4.

Теперь рассмотрим случай, когда в G не существует нормальной подгруппы, изоморфной группе A_5. Тогда $|N| = p$ и $G/N \cong A_5$.

Пусть $C(N)$ — централизатор N в G. Известно, что $Aut\ N$ — циклическая группа порядка $p - 1$ [3]. Так как факторгруппа $G/C(N)$ изоморфно вкладывается в $Aut\ N$, то из $G/N \cong A_5$ следует, что $C(N)/N = G/N$, то есть $N \leqslant Z(G)$.

Покажем, что N лежит в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$. Предполагая противное, найдем максимальную подгруппу M в G, для которой $G = N \times M$. Но тогда $M \cong A_5$, что противоречит отсутствию в G нормальной подгруппы, изоморфной A_5. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем $N \leqslant Z(G) \cap \Phi(G)$.

Покажем, что р = 2. Если р $\geqslant$ 7, то N — силовская р-подгруппа группы G, что согласно теореме Шура 20.2.6 [5] противоречит $N \leqslant \Phi(G)$. Если р = 3 или р = 5, то выберем в G подгруппу Н такую, что $H/N \cong S_3$ или $H/N \cong D_5$.

Силовская р-подгруппа P группы Нимеет порядок p^2, нормальна в Н и является силовской р-подгруппой самой группы G. Если N дополняема в P, то по теореме Гашюца [9] N дополняема в G, что противоречит $N \leqslant \Phi(G)$. Поэтому P — циклическая группа порядка p^2. Но H/N сопряжением индуцирует автоморфизм второго порядка группы P/N, следовательно Н тоже индуцирует нетождественный автоморфизм группы P, а значит ввиду $|H/P| = 2 \neq p$ и ее подгруппы N. Последнее противоречит $N \leqslant Z(G)$.

Итак, в рассматриваемом случае показано, что G — группа порядка 120, N — нормальная подгруппа порядка 2, $G/N \cong A_5$ и $N \leqslant Z(G) \cap \Phi(G)$.

Осталось показать, что G изоморфна группе $SL_2(5)$. Известно [6], что

$$SL_2(5) \cong \langle x, y | x^5 = 1,\\ y^2 = (xy)^3 = (x^4yx^3y)^2\rangle. \tag{5}$$

Дальнейшие рассуждения посвящены отысканию двух порождающих элементов группы G, которые удовлетворяют равенствам в (5).

Покажем, что группа G содержит единственный элемент второго порядка.

Пусть $N = \langle z\rangle$. Силовская 2-подгруппа P группы G имеет порядок 8 и содержит N. Как уже ранее отмечалось, подгруппа N не дополняема в группе P. Группы 8-го порядка изучены [3]. Имеют недополняемую подгруппу из них следующие :

$$P_1 = \langle a | a^8 = 1\rangle;$$

$$P_2 = \langle a, b | a^4 = b^2 = 1, ab = ba\rangle;$$

$$P_2 = \langle a, b | a^4 = b^2 = 1, ab = ba^3\rangle;$$

$$P_4 = \langle a, b | a^4 = 1, a^2 = b^2, ab = ba^3\rangle.$$

В каждой из этих групп недополняемой является подгруппа $\langle a^2\rangle$, поэтому при $P = P_i$ имеем $N = \langle a^2\rangle$ $(i = 1; 2; 3; 4)$.

В факторгруппе G/N выберем подгруппу K/N, изоморфную A_4, которая содержит P/N. Ясно, что P нормальна в K и K содержит подгруппу Q порядка 3, для которой $K = PQ$ и $P \cap Q = 1$. Централизатор P/N в K/N совпадает с P/N, поэтому централизатор $C(P)$ подгруппы P в K не содержит Q. Следовательно, $|K/C(P)|$ делится на три. Но $K/C(P)$ изоморфно вкладывается в $Aut\ P$ и порядок только одной из групп $Aut\ P_i$ делится на три — группы $Aut\ P_4$ [3]. Поэтому $P = P_4$ и тогда P содержит единственный элемент второго порядка $z = a^2$.

Так как все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены к P, то они содержат z, являющийся единственным элементом второго порядка в каждой из них. Это и доказывает, что группа G имеет только один элемент второго порядка z.

Теперь заметим, что для всякого элемента $g \in G$ такого, что порядок элемента gN факторгруппы G/N равен четному числу $2k$, выполняется равенство $g^{2k} = z$. Действительно, в противном случае в силу $g^{2k} \in N$ получим $g^{2k} = 1$, откуда $|g^k| = 2$ и $g^k = z$, то есть $|gN| = k$ и приходим к противоречию.

Пусть $\varphi : G/N \to A_5$ — изоморфизм. В G найдется такой элемент u, что $\varphi(uN) = (135)$. Так как u лежит в абелевой подгруппе $\langle u\rangle N$ шестого порядка, то есть в циклической группе, то, не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что $|u| = 6$ и $u^3 = z$.

В группе G также найдется элемент v такой, что $\varphi(vN) = (12345)$. Так как группа $\langle v\rangle N$ разлагается в прямое произведение подгрупп второго и пятого порядков, то можно считать, что $|v| = 5$. Легко проверяется, что $\varphi(v^4uN) = (23)(45)$ и $\varphi(v^3uv^2uN) = (13)(25)$, то есть порядки элементов v^4uN и v^3uv^2uN группы G/N равны 2. По ранее замеченному $(v^4u)^2 = (v^3uv^2u)^2 = z$.

Далее, $G = \langle u, v, N\rangle = \langle u, v\rangle$ в силу $N \leqslant \Phi(G)$. Полагаем $x = v$, $y = v^4u$. Тогда $G = \langle x, y\rangle$ и элементы x, y группы G удовлетворят равенствам $x^5 = 1$, $y^2 = (xy)^3 = (x^4yx^3y)^2$ из (5). Это означает, что G является гомоморфным образом группы $SL_2(5)$ и, так как $|G| = |SL_2(5)|$, то окончательно получаем $G \cong SL_2(5)$. Лемма 4 доказана полностью.

Доказательство теоремы 1. Пусть m — натуральное число, делящееся на 60. Тогда существует группа вида $G = A_5 \times Z_n$, где $n = m/60$. По лемме 3 G является M_1-группой порядка m. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 4, если G — неразрешимая непростая группа порядка 60р, где р — простое число, то она изоморфна одной из групп, S_5, $SL_2(5)$ или $A_5 \times Z_p$ (р $\geqslant 2$). Согласно леммам 1–3 каждая из этих групп является M_1-группой, что и доказывает теорему 2.

Заметим, что если порядок неразрешимой группы меньше 168, то она изоморфна либо простой группе A_5, либо одной из непростых групп S_5, $SL_2(5)$ и $A_5 \times Z_2$, являющихся по доказанному M_1-группами. Таким образом, получен полный список неразрешимых M_1-групп порядка менее 168.

В заключение отметим, что из формулировки теоремы 2 никакое из словосочетаний «неразрешимая», «непростая» или «р — простое число» удалить нельзя, так как существуют не M_1-группы вида: разрешимая непростая группа $\langle a, b | a^{13} = b^{12} = 1, ab = ba^2 \rangle \times Z_5$ порядка $60 \cdot 13$; неразрешимая простая группа $PSL_2(11)$ порядка $60 \cdot 11$; неразрешимая непростая группа $PSL_2(11) \times Z_2$ порядка $60 \cdot 22$.

Литература

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
2. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968. 112 с.
3. *Горчаков Ю. М.* Теория групп. Тверь: ТГУ, 1998. 112 с.
4. *Dickson L. E.* Linear groups with an exposition of the Galois field theory. Leipzig. 1901. 312 p.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. СПб.: Лань, 2009. 288 с.
6. *Коксетер Г. С., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980. 240 с.
7. *Холл М.* Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 468 с.
8. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
9. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
10. *Титов Г. Н.* О разрешимости обобщенно полумодулярных конечных групп // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. № 1. С. 66–69.
11. *Судзуки М.* Строение группы и строение структуры ее подгрупп. М.: ИЛ, 1960. 158 с.
12. *Титов Г. Н.* Разрешимость конечных групп, решетка подгрупп которых удовлетворяет некоторым обобщенным условиям полумодулярности // Чебышевский сборник. Алгебра и теория чисел: современные проблемы: Труды 7-й Международной конференции. Тула: Изд-во ТГПУ, 2010. Т. 11. Вып. 1 (33). С. 114.

Ключевые слова: группа, разрешимая, решетка, полумодулярная

Статья поступила 10 мая 2011 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар