УДК 532.5.032, 519.635.8, 519.688

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СТЕКАЮЩЕМ ВЯЗКОМ СЛОЕ[1]

***Шелистов В. С.*[2], *Зайцева А. В.*[3], *Демёхин Е. А.*[4]**

NUMERICAL SIMULATION OF SURFACE TURBULENCE IN A VISCOUS FLOW

Shelistov V. S., Zaitseva A. V., Demekhin E. A.

Mathematical modeling of space-time evolution and transition to the surface turbulence in viscous flowing films are considered. Kapitsa-Shkadov PDE system is used. Small-amplitude natural random disturbances are taken as the boundary conditions at the entrance of the channel; 'soft' boundary conditions which influence on the upstream flow is weak are used at the end of the channel. The applied method which combines advantages of the explicit and implicit finite difference schemes for the first time allows to perform a simulation of a complex three-dimensional wave formation for realistic channel sizes. Main stages of downstream spatial evolution of random disturbances finalizing with surface turbulence are simulated. For the first time qualitative and quantitative characteristics of the phenomenon are described.

Keywords: numerical simulation, compact finite-differential scheme, liquid film, three-dimensional waves, coherent structures, surface turbulence

1. Экспериментальное исследование волновых плёнок жидкости, начавшееся с работ Капицы [1], насчитывает более 60 лет, а теоретическое, начавшееся с работы Шкадова [2], — более 40. Анализ теоретических и экспериментальных результатов за прошедшее время можно найти в обзорной статье Шкадова, Демёхина [3]. Несмотря на обилие работ, ряд теоретических аспектов проблемы остался открытым. Кроме того, в последнее время возобновился практический интерес к плёночной тематике [4]. Нерешённой задачей остаётся прямое численное моделирование гравитационного стекания плёнки при наличии трёхмерной волновой структуры на её поверхности в случае естественного волнообразования. Такая задача, кроме чисто научного интереса, имеет и большое практическое значение, так как является первым шагом к математическому моделированию процессов тепло- и массопереноса и химических реакций на межфазной поверхности. Несмотря на то, что существенно упрощающая вычисления маломодовая галёркинская модель [2], сохраняющая основные черты полной постановки, была обобщена на трёхмерный случай в [5], до настоящего времени отсутствовал численный алгоритм для компьютерного моделирования пространственно-временной эволюции и перехода к поверхностной турбулентности. Основными трудностями, препятствующими моделированию, являются: а) сложная волновая структура межфазной поверхности, резко меняющаяся вниз по каналу и заканчивающаяся стохастическим поведением на конечном этапе пространственного развития; б) большие длина и ширина моделируемого канала, соответствующие применяемым на практике; в) высокий порядок производных по пространственным переменным; г) сильная нелинейность системы в частных производных, описывающей волновой процесс.

Для преодоления этих трудностей в настоящей работе, во-первых, использова-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (05-08-33585, 06-08-96637_р_юг).

[2]Шелистов Владимир Сергеевич, аспирант кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: shelistov_v@mail.ru

[3]Зайцева Анна Вячеславовна, аспирант кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: zav_mf@mail.ru

[4]Демёхин Евгений Афанасьевич, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: edemekhi@gmail.com

лись неявные аппроксимации производных на трёхточечном шаблоне, названные в [6] компактными, в комбинации с полунеявным методом Рунге-Кутта, описанным в [7]. Оба подхода сочетают достоинства явного и неявного конечно-разностных методов и хорошо зарекомендовали себя для расчётов турбулентности в однофазных потоках, таких как течения Пуазейля и Блазиуса. Во-вторых, задачу удалось распараллелить на компьютерах. К преимуществам компактных схем можно отнести: а) высокий порядок аппроксимации, сопровождающийся сравнительно малыми числовыми коэффициентами в ошибке округления, таким образом обеспечивая значительную точность дискретизации; б) малое количество точек сетки в шаблоне схемы, упрощающее формулировку граничных условий и рассмотрение близких к границе точек; в) n-диагональная матрица неявного оператора.

В качестве начального условия выбиралось тривиальное решение, соответствующее безволновому режиму течения. В качестве краевых условий на входе в канал брались естественные случайные возмущения малой амплитуды, которые компьютерно генерировались с помощью датчика квазислучайных чисел; на выходе из канала использовались «мягкие» краевые условия, слабо влияющие на процессы вверх по потоку. В начальные моменты времени возмущения, распространяясь вниз по потоку, вытесняли невозмущённый участок потока за пределы канала.

2. В длинноволновом приближении для больших капиллярных сил и при умеренных числах Рейнольдса система полных уравнений, описывающих трёхмерные волновые процессы в вертикально стекающем вязком слое жидкости, сводится к сильнонелинейной системе уравнений Капицы–Шкадова [5]

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial x}\frac{q^2}{h}+\frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial z}\frac{qp}{h}= =\frac{1}{5\delta}\left[h\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 h+h-\frac{q}{h^2}\right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial x}\frac{qp}{h}+\frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial z}\frac{p^2}{h}= =\frac{1}{5\delta}\left[h\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 h-\frac{p}{h^2}\right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial z}=0, \quad (3)$$

которая существенно проще исходной системы Навье–Стокса и сохраняет её основные свойства. Здесь $q=\int_0^h u\,dy$ — расход в направлении действия силы тяжести x, $p=\int_0^h w\,dy$ — расход жидкости в поперечном направлении z, ∇^2 — оператор Лапласа, действующий на поверхности раздела. Течение описывается одним параметром δ, характеризующим расход жидкости на входе, который выражается через среднерасходное число Рейнольдса $Re=\frac{1}{3}\frac{gh_N^3}{\nu^2}$ и число Капицы $\gamma=\sigma\rho^{-1}\nu^{-4/3}g^{-1/3}$ следующим образом: $\delta=\frac{Re^{11/9}}{3^{7/9}5\gamma^{1/3}}$. Здесь h_N — нуссельтовская безволновая толщина слоя на входе в канал, σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, g — ускорение свободного падения.

Уравнения (1)–(3) дополняются краевыми условиями, моделирующими случайные возмущения на входе в канал:

$$\begin{aligned}&x=0:\\&h=1+\varepsilon\,\mathrm{Re}\{\Phi(t)\Psi(z)\},\\&q=1,\quad p=0;\\&\Phi(t)=\int_0^\infty\hat\Phi(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\simeq\\&\qquad\simeq\sum_{m=1}^{M}|\hat\Phi(\omega_m)|e^{-i\omega_m t+i\theta_m}\Delta\omega,\end{aligned} \quad (4)$$

где интеграл аппроксимирован M частотами, $\omega_m=m\Delta\omega$, $\Delta\omega=\omega_c/M$, ω_c — некоторая частота обрезки, θ_m — фаза комплексной амплитуды $\hat\Phi$, которая задавалась генератором случайных чисел с равномерным распределением на интервале $[0,2\pi]$. Предполагается, что амплитуда $|\hat\Phi(\omega_m)|$ равна нулю выше ω_c и единице — внутри интервала $0<\omega_m\leqslant\omega_c$. ε в (4) — нормировочный малый параметр, который физически характеризует амплитуду шума.

Функция $\Psi(z)$ моделирует неоднородность по поперечной координате:

$$\Psi(z)=\sum_{k=1}^{K}|\hat\Psi(\beta_k)|e^{i\beta_k z+i\varphi_k} \quad (5)$$

и устроена подобно $\Phi(t)$: $\beta_k=k\Delta\beta$, где $\varphi_k\in[0,2\pi]$ — равномерно распределённая случайная функция, $\hat\Psi(\beta_k)=0$ при $\beta_k>\beta_c$, $|\hat\Psi(\beta_k)|=1$ при $0<\beta_k\leqslant\beta_c$.

На конце расчётного канала выбирались «мягкие» краевые условия:

$$x = L: \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad p = 0.$$

На боковых стенках канала, $z = \pm l/2$, принимались условия периодичности, где l может интерпретироваться как ширина канала. В формуле (5) принималось $\Delta\beta = 2\pi/l$. В качестве начальных условий предполагалось, что слой невозмущён, $t = 0$: $h = q = 1$, $p = 0$.

3. Для решения задачи для большой длины канала применялась комбинация метода Галёркина и модификации компактных схем [6]. В предположении периодичности решения по z использовался квазиспектральный метод, основанный на дискретном преобразовании Фурье. Функции представлялись значениями на равномерной сетке в направлении x и коэффициентами Фурье в направлении z.

Устойчивую схему удалось получить только для некомпактных явных пространственных аппроксимаций первого порядка по времени. Применение чисто неявных схем решает проблему устойчивости, но требует значительных затрат машинных ресурсов для реализации. Такой способ часто является невыгодным, поэтому для численного решения уравнений динамики жидкости более привлекательными выглядят полунеявные методы. Эти методы предполагают неявное интегрирование лишь некоторых членов уравнения, к остальным же применяется явный метод. Преимуществом такого подхода является либо значительное устранение жёсткости задачи, либо существенное упрощение обращаемого оператора. Более того, часто бывает достаточно искусственного выделения из исходных уравнений линейных членов, подлежащих неявному интегрированию — в ряде случаев основная жёсткость задачи характеризуется достаточно простым оператором. Поэтому для интегрирования рассматриваемой системы уравнений по времени был использован полунеявный метод Рунге–Кутта третьего порядка, описанный в работе [7].

Суть полунеявного метода заключается в выделении из оператора задачи более простого, содержащего наиболее неустойчивые члены исходного оператора. Выделенный оператор, обращаемый неявно, является параметром метода и может подбираться для каждого шага интегрирования. После каждого шага происходит оценка погрешности и корректировка величины шага. Следует отметить, что в явной части задачи может быть использован исходный оператор, тогда смена неявной части не приводит к модификации остального алгоритма, а влияет лишь на точность итерации метода (и на величину шага). Как следствие, оператор в неявной части должен быть лишь «похож» на ту часть оператора решаемой задачи, которая содержит неустойчивость. С точки зрения простоты обращения оператор должен быть линейным. Удалось установить, что этот оператор может быть получен линеаризацией системы около тривиального решения $h \equiv 1$, $q \equiv 1$, $p \equiv 0$: $h = 1 + \hat{h}$, $q = 1 + \hat{q}$, $p = \hat{p}$. Этот оператор имеет вид

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{6}{5}\frac{\partial}{\partial x}(2\hat{q} - \hat{h}) + \frac{6}{5}\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = \frac{1}{5\delta}\left[\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\hat{h} - \hat{q} + 3\hat{h}\right];$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \frac{6}{5}\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \frac{1}{5\delta}\left[\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2\hat{h} - \hat{p}\right];$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = 0.$$

Все производные $\partial/\partial x$ полученной системы, кроме производной лапласиана, при использовании некомпактных трёхточечных аппроксимаций могут быть представлены в виде трёхдиагональных операторов. Как следствие, для обращения оператора системы можно использовать метод трёхточечной прогонки. Производные лапласиана было решено не включать в оператор, поскольку оператор Лапласа обычно показывает высокую устойчивость в разностных схемах. В итоге, возвращаясь к исходным переменным, получаем следующую систему для неявной части:

$$q + \Delta t\Big[\frac{1}{5\delta}(3h - q - 2) - \frac{12}{5}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{6}{5}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{6}{5}\frac{\partial p}{\partial z}\Big] = \frac{\partial q}{\partial t};$$

$$p + \Delta t\left[\frac{p}{5\delta} - \frac{6}{5}\frac{\partial p}{\partial x}\right] = \frac{\partial p}{\partial t};$$

$$h + \Delta t\left[-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z}\right] = \frac{\partial h}{\partial t},$$

где Δt — шаг интегрирования, а производные по t вычисляются явным методом перед решением данной системы. Оператор, соответствующий этой системе, не является чисто трёхдиагональным из-за сцепленности уравнений. Тем не менее, существует возможность сведения решения этой системы к

Характерные расстояния, на которых реализуются различные волновые режимы

Характеристика интервала	Безразмерная длина	Размерная длина, см (вода)
Линейное поведение	$L_1 = 30 \div 40$	3,5 ÷ 5
Нелинейное насыщение	$L_2 = 40 \div 50$	5 ÷ 6
Зона образования двумерных уединённых волн	$L_3 = 100 \div 300$	10 ÷ 35
Распад двумерных уединённых волн и образование трёхмерных	$L_4 = 500 \div 700$	50 ÷ 85

последовательности решения систем с трёхдиагональными матрицами. Для этого сначала решается уравнение относительно p (в результате чего из остальных уравнений исключаются производные по z), а из уравнения неразрывности (на h) выражается h и подставляется в уравнение на q. В результате получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, которое при использовании центральных трёхточечных аппроксимаций представляется трёхдиагональной матрицей. Функция h находится затем прямым вычислением.

Применённая схема показала хорошую устойчивость и точность. В случае использования нулевого оператора (то есть явной схемы третьего порядка), расчёт прерывался из-за уменьшения шага до величины машинной точности, что согласуется с ранее полученным выводом о неустойчивости явной компактной конечно-разностной аппроксимации системы Капицы–Шкадова. Применение полунеявной схемы позволило преодолеть трудности, связанные с численной неустойчивостью, и провести высокоточные расчёты эволюции трёхмерных возмущений на поверхности тонкой плёнки жидкости. Сопоставление результатов расчётов с результатами, полученными при помощи обычных конечно-разностных схем на примере двумерной задачи [8], показало их количественное соответствие.

4. В проведённых расчётах в качестве рабочей жидкости применялась вода при температуре 20°, при этом $\gamma \simeq 2900$. В расчётах использовались значения амплитуды шума $\varepsilon = 10^{-5} \div 10^{-3}$, эта амплитуда соответствует реальным экспериментам [8]; брались $K = M = 100$.

Максимальная длина моделируемого канала достигала $L = 2500$, что для воды составляло более 2 метров. Число точек по оси x достигало 2048, а число коэффициентов по оси z — 256. При таких длинах на конце канала достигался режим поверхностной турбулентности, причём участок поверхностной турбулентности был достаточно протяжён, чтобы говорить об установлении последнего режима. На указанной ширине канала помещалось несколько трёхмерных когерентных структур, что позволяло допускать слабое влияние стенок на волновой процесс. Модифицированное число Рейнольдса δ менялось в расчётах от 0,05 до 0,5. Среднерасходное число Рейнольдса Re могло в пересчёте достигать порядка 50.

В начальные моменты времени возмущения, распространяясь от входа вниз по потоку, вытесняли невозмущённый участок потока за пределы канала. При $t = T_0 \approx 50 \div 90$ течение полностью статистически устанавливалось. Анализ результатов расчёта начинается с этого времени. Характерные расстояния приведены в таблице. Размерные длины переходов хорошо согласуются с экспериментальными [9].

На длине $x < L_1$ возмущения при заданной начальной амплитуде являются «невидимыми», однако на этом интервале происходит важное явление: наложенный трёхмерный шум вниз по потоку регуляризуется и возмущения становятся квазидвумерными и выходят на волны максимального роста с волновым числом α_m. Реализующиеся волны хорошо описываются линейной теорией максимального роста, что проиллюстрировано на рис. 1. Интересно, что размерное волновое число при малых δ примерно равно 1 см, а при $\delta \approx 0{,}5$ уменьшается до 0,8 см. Форма волны близка к синусоидальной. Рост амплитуды волны вниз по потоку — экспоненциальный. На рис. 2а изображено сечение волн по оси течения $z = 0$ для $\delta = 0{,}46$ и амплитуды шума $\varepsilon = 10^{-5}$. На рис. 2б дана полная поверхность $h(x, z, t)$ вблизи входа. При малом уровне шума трёхмерная составляющая остаётся в латентном состоянии и не видна на рисунке, она разовьётся ниже по течению.

На коротком участке $L_1 < x < L_2$ амплитуда волны насыщается, а форма остаётся синусоидальной. Трёхмерность волны проявляется в лёгкой модуляции в поперечном на-

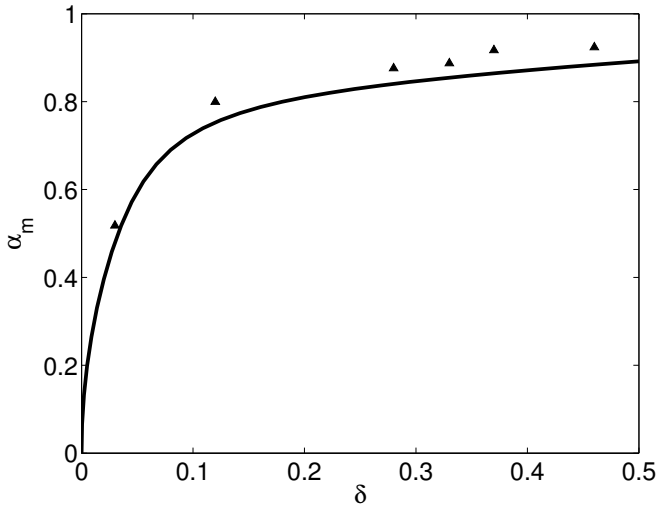


Рис. 1. Сравнение полученной численным моделированием длины волны на входе (треугольники) с теорией максимального роста (сплошная линия)

правлении, которая становится графически различимой.

На участке $L_2 < x < L_3$ происходят двумерные взаимодействия между волнами. Двумерные, близкие к синусоидальным, волны сливаются, образуя волны с бóльшей амплитудой. В свою очередь, волны с бóльшей амплитудой поглощают волны с меньшей амплитудой. В результате этого процесса, описанного в [8], образуются уединённые волны с большой амплитудой. Процесс по-прежнему квазидвумерен.

Наконец, на участке $L_3 < x < L_4$ двумерные уединённые волны, устойчивые к двумерным возмущениям, разрушаются трёхмерными [10]. В результате этого распада образуются устойчивые, сильно сцепленные трёхмерные когерентные структуры [11], слабо взаимодействующие друг с другом. В итоге поверхность слоя оказывается покрытой трёхмерными уединёнными волнами-солитонами (названными в [10] Λ-солитонами) и небольшими фрагментами разрушенных двумерных солитонов (рис. 3). На рис. 3 приведён вид сверху типичного режима поверхностной турбулентности при $\delta = 0{,}2$. Картина, полученная в результате численного моделирования, качественно хорошо соответствует эксперименту [9, 11].

Заключение

В работе разработан численный метод, позволяющий проследить развитие малых начальных случайных возмущений с последующим формированием трёхмерных локализованных структур — Λ-солитонов. Исследованы волновые режимы течения в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Литература

1. *Капица П. Л.* Волновое течение тонких слоёв вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. № 1. С. 3–28.
2. *Шкадов В. Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР, МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
3. *Шкадов В. Я., Демёхин Е. А.* Волновые движения жидкости на вертикальной поверхности (теория для истолкования экспериментов) // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 2 (апрель–июнь). С. 3–65.
4. *Craster R. V., Matar O. M.* Dynamics and stability of thin liquid films // Review of Modern Physics. 2009. V. 81. Pp. 1131–1198.
5. *Демёхин Е. А., Шкадов В. Я.* О трёхмерных нестационарных волнах в стекающей плёнке жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ. 1984. № 5. С. 21–27.
6. *Толстых А. И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
7. *Nikitin N. V.* Third-order-accurate semi-implicit Runge–Kutta scheme for incompressible Navier–Stokes equations // Int. J. Num. Meth. Fluids. 2006. V. 51. Pp. 221–233.
8. *Chang H.-C., Demekhin E. A.* Complex wave dynamics on thin films. Amsterdam: Elsevier. 2002. 402 p.

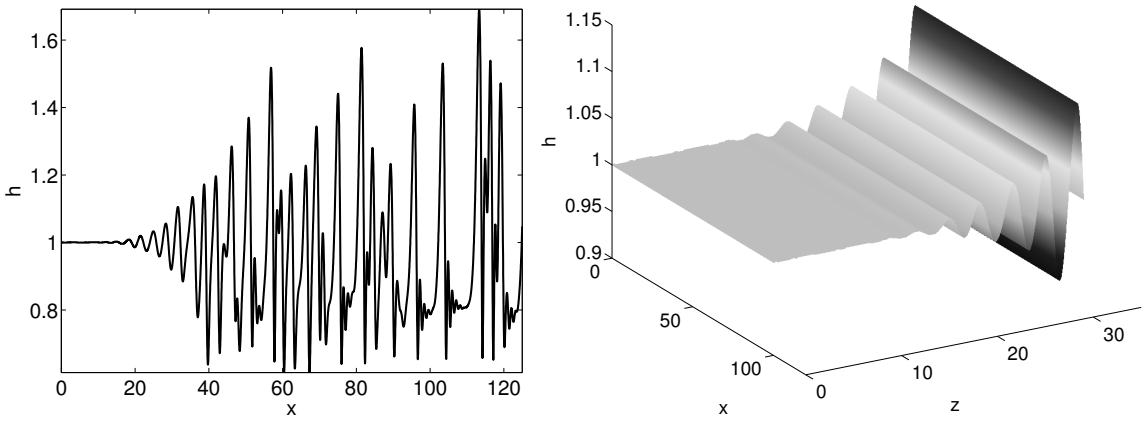


Рис. 2. а) Типичная картина эволюции сечения $z = 0$ поверхности $h(x, z, t)$ при $\delta = 0{,}46$; б) Поверхность $h(x, z, t)$ вблизи от входа

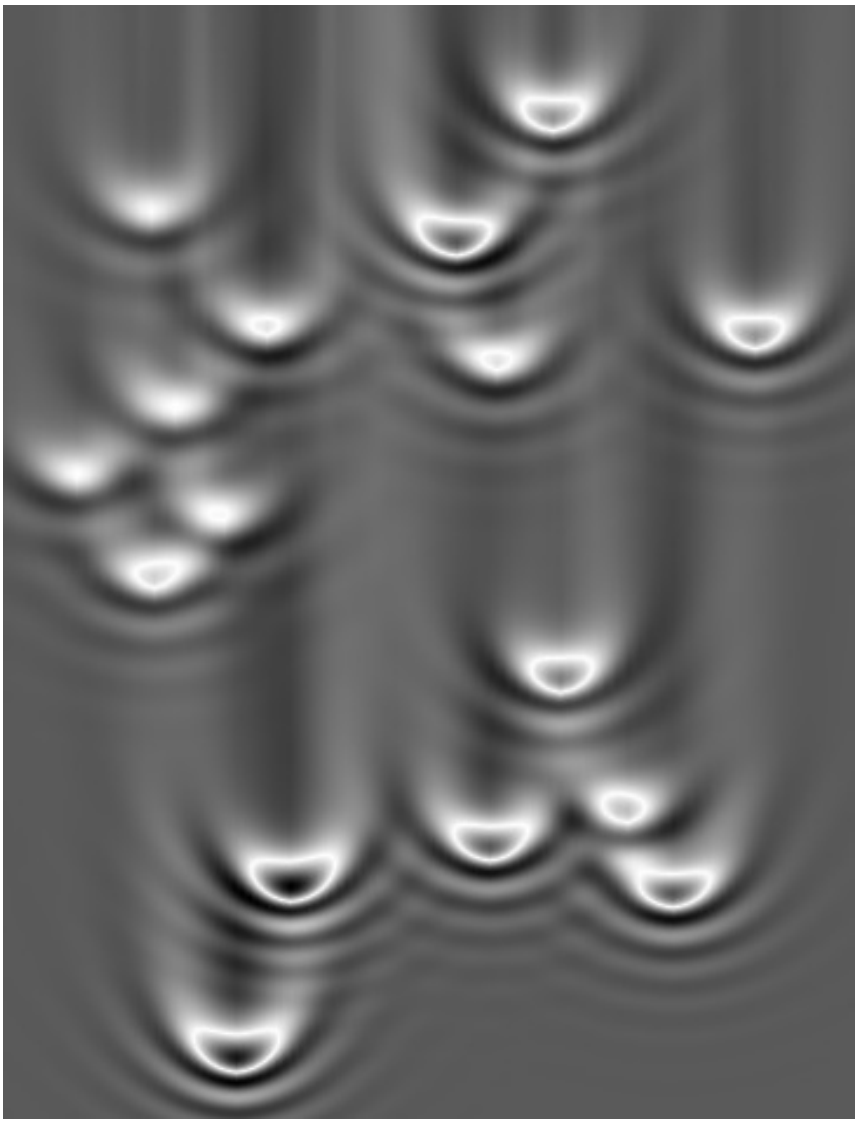


Рис. 3. Численный эксперимент. Фрагмент зоны развитого трёхмерного режима

9. *Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.* Волновое течение плёнок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 256 с.
10. *Демехин Е. Н., Калайдин Е. Н., Шапарь С. М., Шелистов В. С.* Устойчивость трёхмерных солитонов в вертикально стекающих плёнках жидкости // ДАН. 2007. Т. 413. № 2. С. 193–197.
11. *Алексеенко С. В., Антипин В. А., Гузанов В. В., Маркович Д. М., Харламов С. М.* Стационарные уединённые трёхмерные волны на вертикально стекающей жидкой плёнке // ДАН. 2005. Т. 405. № 2. С. 193–195.

Ключевые слова: численное моделирование, компактная разностная схема, плёнка жидкости, трёхмерные волны, когерентные структуры, поверхностная турбулентность

Статья поступила 19 апреля 2011 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Шелистов В. С., Зайцева А. В., Демёхин Е. А., 2011