УДК 539.3

БЛОЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПОЛЗНЕВЫХ ЯВЛЕНИЙ[1]

***Бабешко В. А.*[2], *Евдокимова О. В.*[3], *Бабешко О. М.*[4], *Горшкова Е. М.*[5], *Иванов П. Б.*[6], *Рядчиков И. В.*[7], *Плужник А. В.*[8], *Кашков Е. В.*[9]**

THE BLOCK ELEMENTS IN THE LANDSLIDE MODELING PROBLEM

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Gorshkova E. M., Ivanov P. B., Ryadchikov I. V., Pluzhnik A. V., Kashkov E. V.

The issue of using block elements for solving boundary problem of mechanic continuum appearing when modeling block structures of the landslide. It was showed that the landslide block structures can have blocks divided by the contact boundaries which keeps block before moving. The resonances effect on the structures is discussed.

Keywords: block elements, boundary problems, resonances, landslide, block structures.

Оползневые явления относятся к числу грозных природных событий, наносящих совершенно неожиданно серьезный материальный ущерб и зачастую сопровождающихся человеческими жертвами. Эти события нередко происходят и на Черноморском побережье Краснодарского края. На рис. 1 изображен результат оползня на трассе Сочи–Джубга. Моделирование этих событий является сложной и до конца не решенной на сегодняшний день проблемой. Это связано с большим разнообразием оползневых влений, скоротечностью процессов в период активизации созревшего предоползневого состояния и отсутствием точных данных о глубинных процессах в оползнеопасной зоне. На рис. 2 приведена классификация видов оползней.

В настоящей работе показана принципиальная возможность использования метода блочного элемента для моделирования некоторых типов оползневых явлений

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке РФФИ (09-08-00170, 09-08-00171), РФФИ и администрации Краснодарского края (09-01-96500, 09-01-96503, 09-08-96522, 09-08-96527, 09-08-00294, 11-08-96502, 11-08-96503, 11-08-96506, 11-08-96504, 11-08-96522, 11-08-96505) проекта НШ-3765.2010.1, проекта ФЦП 2009-1.5-503-004-006, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН, государственного контракта от 1 сентября 2010 г. № 16.740.11.0135 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

[3]Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[4]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[5]Горшкова Елена Михайловна, старший научный сотрудник НИИ предупреждения геоэкологических катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: gem@kubsu.ru.

[6]Иванов Павел Борисович, исполняющий обязанности заместителя начальника ГУ МЧС по Краснодарскому краю по антитеррористической деятельности; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[7]Рядчиков Игорь Викторович, канд. физ.-мат. наук, ведущий инженер Интернет-Центра Кубанского государственного университета; e-mail: ryadchikov@kubsu.ru.

[8]Плужник Андрей Валерьевич, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: ramblersochi@rambler.ru.

[9]Кашков Евгений Вениаминович, инженер-исследователь Южного научного центра РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru.



Рис. 1

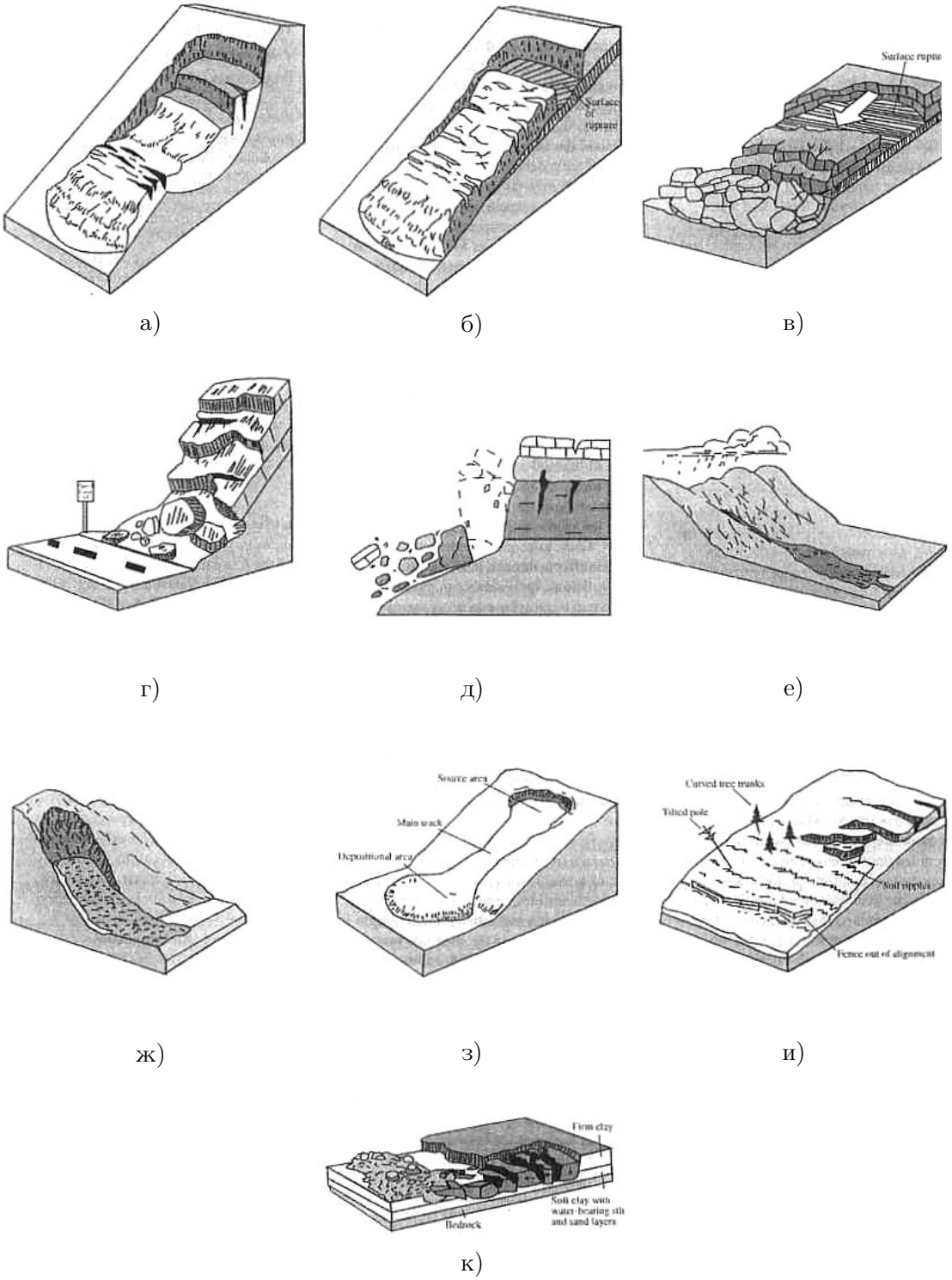
1. Оползни рассматриваются как блочные структуры, состоящие из блочных элементов, границы между которыми начинают появляться по мере изменения свойств среды (рис. 2б, 2в, 2к). Эти границы рассматриваются как вертикальные плоскости, которые в свою очередь подвержены изменениям, старению. В некоторых случаях они имеют форму, близкую к цилиндрической. По мере старения плоскости становятся разнотипными, и среде оказывается все сложнее удерживать блочные элементы в контакте. В результате образуются трещины, распространяющиеся затем по всей плоскости контакта, и блок разрушается. Немаловажную роль в разрушении играет также возможность просачивания грунтовых вод между рельефом основания и оползневыми блоками. Это приводит к уменьшению коэффициента трения между блоками и основаниями. Последнее связано с изменениями коэффициента трения и в случае наклонного основания достаточно легко анализируется методами теоретической механики. Наиболее сложной является проблема, связанная с контактом блоков между собой при наличии стареющей контактной границы, и ей уделено основное внимание. Главными моментами исследования являются математическое описание выбранной модели, построение блочных элементов описанной блочной структуры путем применения топологических методов функциональных и псевдодифференциальных уравнений, построение интегральных уравнений контактных задач.

В связи с тем, что для материалов различных реологий алгоритм метода блочного элемента однотипен, а также благодаря свойству блочных элементов, позволяющим решение одной краевой задачи, разлагать по блочным элементам другой [1], при исследовании ограничимся изучением сравнительно простых блочных элементов скалярной граничной задачи [2–4]. Случаи более сложных реологий исследуются применением аналогичного, но технически более сложного алгоритма векторных граничных задач для блочных элементов [5–8].

2. В основе теории блочных структур и блочного элемента лежат дифференциальный и интегральный методы факторизации, имеющие топологическую основу [5–8]. Их применение в граничных задачах механики деформируемого твердого тела в статическом и динамическом случаях дано в [5–8] и связано с факторизаций матриц-функций, что усложняет изложение материала. Чтобы избежать громоздкого исследования систем дифференциальных уравнений в частных производных, факторизации возникающих матриц-функций, ниже применяется прием разложения решений граничных задач на потенциальную и вихревую составляющие [9].

Следуя указанной работе, взяв дифференциальные уравнения теории упругости в векторной форме

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}+\rho\omega^2\mathbf{u}=0,$$



а) б) в)

г) д) е)

ж) з) и)

к)

Рис. 2. Классификация видов оползней: а — скатывающиеся, б — смещающиеся, в — блоковые, г — камнепадные, д — опрокидывающиеся, е — наносные, ж — лавинные, з — грунтопотоковые, и — ползучие, к — горизонтально распространяющиеся

ищем решение краевой задачи в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\psi.$$

Здесь функция φ дает потенциальную составляющую решения, а компоненты ψ_n $(n = \overline{1,3})$ вектора ψ — вихревую.

Дифференциальное уравнение будет удовлетворяться, если функции находятся из уравнений

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi_n^+ k_2^2\psi_n = 0, \qquad (1)$$

$$n = \overline{1,3},$$

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}.$$

Параметры k_1 и k_2 характеризуют фазовые скорости продольных и поперечных волн в деформируемой среде, которые равны ωk_1^{-1}, ωk_2^{-1} соответственно. Заметим, что переход к нестационарным задачам при решении таких граничных задач, достигается известным применением преобразования Лапласа.

В [2–4] построены блочные элементы для более общих уравнений, включающих также уравнения (1) вида

$$\mathrm{Q}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \Big[A_{11}\partial^2 x_1 + A_{22}\partial^2 x_2 + \\ + A_{33}\partial^2 x_3 + A\Big]\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (2)$$

пирамид. На границах областей ставятся условия Дирихле или Неймана.

Решения граничных задач ищутся в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s$. Вопрос выделения классической составляющей решения детально изложен в работах [5–8].

Используя вышесказанное, рассмотрим случай, когда ставится краевая задача для упругого неограниченного слоя толщины h с рельефной верхней границей, описываемой прямоугольным параллелепипедом, лежащим на плоскости. Очевидно, такая конструкция, рассеченная по верхней границе слоя, распадается на два блока: прямоугольный параллелепипед (шестигранный блок) и слой — простейший двугранный блок. Часть характеристик блочного элемента в форме прямоугольного параллелепипеда для рассматриваемой граничной задачи приведена в [5], где осуществлено касательное расслоение многообразия и введены локальные системы координат, которые используемые ниже в приводимых формулах.

Ради сокращения записи приведем лишь выборочно по одному функциональному и псевдодифференциальному уравнению, а также одно представление решения в прямоугольном параллелепипеде, отсылая для остальных к работе [10]. Аналогично это относится и к слою.

3. Функциональные уравнения для блока ширины a, длины c, высоты b и слоя толщины h соответственно представимы в следующем виде:

– для параллелепипеда

$$K_1\Phi_1 = \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} A_{33}\left(\varphi'_{13} - i\alpha_3^1\varphi_1\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\ + \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} A_{11}\left(\varphi'_{22} + i\alpha_1^1\varphi_2\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1\left(x_1^2 - b\right)\right] dx_1^2 dx_2^2 + \\ + \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} A_{33}\left(\varphi'_{33} + i\alpha_3^1\varphi_3\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b\right] dx_1^3 dx_2^3 - \\ - \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} A_{11}\left(\varphi'_{43} - i\alpha_1^1\varphi_4\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1\left(x_1^4 + b\right)\right] dx_1^4 dx_2^4 + \\ + \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} A_{22}\left(\varphi'_{53} + i\alpha_2^1\varphi_5\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1\left(x_2^5 - b\right)\right] dx_1^5 dx_2^5 + \\ + \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\varphi'_{63} - i\alpha_2^1\varphi_6\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1\left(x_2^6 - b\right)\right] dx_1^6 dx_2^6;$$

– для слоя

$$K_1\Phi_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_{33}\left(\varphi'_{130} - i\alpha_3^1\varphi_{10}\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right] d\eta_1^1 d\eta_2^1 + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_{33}\left(\varphi'_{330} + i\alpha_3^1\varphi_{30}\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 h\right] dx_1^3 dx_2^3,$$

$$K_3\Phi_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{33}\left(\varphi'_{330} - i\alpha^1_3\varphi_{30}\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha^3_1\eta^3_1 + \alpha^3_2\eta^3_2\right] d\eta^3_1 d\eta^3_2 +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{33}\left(\varphi'_{130} + i\alpha^1_3\varphi_{10}\right)\times$$
$$\times \exp i\left[-\alpha^3_1 x^1_1 + \alpha^3_2 x^1_2 - \alpha^3_3 h\right] dx^1_1 dx^1_2.$$

Функциональные уравнения дают эквивалентную формулировку граничных задач, но уже в терминах интегральных преобразований. Они же выявляют нуждающиеся в факторизации функции или матрицы-функции.

Введем операторы преобразования Фурье

$$\mathbf{F}_2(\alpha^k_1, \alpha^k_2)\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x^k_1, x^k_2)\times$$
$$\times \exp i(\alpha^k_1 x^k_1 + \alpha^k_2 x^k_2) dx^k_1 dx^k_2,$$

$$\mathbf{F}^{-1}_2(x^k_1, x^k_2)\Phi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha^k_1, \alpha^k_2)\times$$
$$\times \exp\left[-i(\alpha^k_1 x^k_1 + \alpha^k_2 x^k_2)\right] d\alpha^k_1 d\alpha^k_2,$$

$$\mathbf{F}_3(\alpha^k_1, \alpha^k_2, \alpha^k_3)\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x^k_1, x^k_2, x^k_3)\times$$
$$\times \exp i(\alpha^k_1 x^k_1 + \alpha^k_2 x^k_2 + \alpha^k_3 x^k_3) dx^k_1 dx^k_2 dx^k_3,$$

$$\mathbf{F}^{-1}_3(x^k_1, x^k_2, x^k_3)\Phi =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha^k_1, \alpha^k_2, \alpha^k_2)\times$$
$$\times \exp\left[-i(\alpha^k_1 x^k_1 + \alpha^k_2 x^k_2 + \alpha^k_3 x^k_3)\right] d\alpha^k_1 d\alpha^k_2 d\alpha^k_3,$$
$$k = \overline{1,6}.$$

Выпишем псевдодифференциальные уравнения, являющиеся результатом вычисления формы-вычета Лере. Они описывают все возможные виды граничных условий, которые можно сформулировать для данной системы дифференциальных уравнений граничной задачи. После выбора граничных условий осуществляется переход к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениями для решения граничной задачи. В нашем случае имеем псевдодифференциальные уравнения вида

$$\mathbf{F}^{-1}_2(x^1_1, x^1_2)\left\{\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-c}^{c} A_{33}\left(\varphi'_{13} - i\alpha^1_{3-}\varphi_1\right)\times\right.$$
$$\times \exp i\left[\alpha^1_1\eta^1_1 + \alpha^1_2\eta^1_2\right] d\eta^1_1 d\eta^1_2 +$$
$$+ \int\limits_{-c}^{c}\int\limits_{-b}^{b} A_{11}\left(\varphi'_{22} + i\alpha^1_1\varphi_2\right)\times$$
$$\times \exp i\left[-\alpha^1_1 a + \alpha^1_2 x^2_2 + \alpha^1_{3-}\left(x^2_1 - b\right)\right] dx^2_1 dx^2_2 +$$
$$+ \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-c}^{c} A_{33}\left(\varphi'_{33} + i\alpha^1_{3-}\varphi_3\right)\times$$
$$\times \exp i\left[-\alpha^1_1 x^3_1 + \alpha^1_2 x^3_2 - \alpha^1_{3-} 2b\right] dx^3_1 dx^3_2 -$$
$$- \int\limits_{-c}^{c}\int\limits_{-b}^{b} A_{11}\left(\varphi'_{43} - i\alpha^1_1\varphi_4\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha^1_1 a + \alpha^1_2 x^4_2 - \alpha^1_{3-}\left(x^4_1 + b\right)\right] dx^4_1 dx^4_2 +$$
$$+ \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} A_{22}\left(\varphi'_{53} + i\alpha^1_2\varphi_5\right)\times$$
$$\times \exp i\left[\alpha^1_1 x^5_1 - \alpha^1_2 c + \alpha^1_{3-}\left(x^5_2 - b\right)\right] dx^5_1 dx^5_2 +$$
$$+ \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b} A_{22}\left(\varphi'_{63} - i\alpha^1_2\varphi_6\right)\times$$
$$\left.\times \exp i\Big[-\alpha^1_1 x^6_1 + \alpha^1_2 c + \right.$$
$$\left.\left. + \alpha^1_{3-}\left(x^6_2 - b\right)\Big] dx^6_1 dx^6_2\right\} = 0,$$
$$\left|x^1_1\right| \leqslant a, \quad \left|x^1_2\right| \leqslant c.$$

В приведенных формулах приняты обозначения, введенные в статье [10]. Здесь φ_{m3} обозначает производную в локальной системе координат x^m_1, x^m_2, x^m_3 по переменной x^m_3, φ_m — значение функции в системе x^m_1, x^m_2, x^m_3.

В случае слоя имеем

$$\mathbf{F}^{-1}_2(x^1_1, x^1_2)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{33}\left(\varphi'_{130} - i\alpha^1_{3-}\varphi_{10}\right)\times\right.$$
$$\times \exp i\left[\alpha^1_1\eta^1_1 + \alpha^1_2\eta^1_2\right] d\eta^1_1 d\eta^1_2 +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{33}\left(\varphi'_{330}+i\alpha^1_{3-}\varphi_{30}\right)\times$$

$$\times\exp i\left[-\alpha^1_1x^3_1+\alpha^1_2x^3_2-\alpha^1_{3-}h\right]dx^3_1dx^3_2\Bigg\}=0,$$

$$-\infty\leqslant x^1_1,x^1_2\leqslant\infty,$$

$$\mathbf{F}_2^{-1}(x^3_1,x^3_2)\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{33}\left(\varphi'_{330}-i\alpha^1_{3-}\varphi_{30}\right)\times$$

$$\times\exp i\left[\alpha^3_1\eta^3_1+\alpha^3_2\eta^3_2\right]d\eta^3_1d\eta^3_2+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_{33}\left(\varphi'_{130}+i\alpha^1_{3-}\varphi_{10}\right)\times$$

$$\times\exp i\left[-\alpha^3_1x^1_1+\alpha^3_2x^1_2-\alpha^3_{3-}h\right]dx^1_1dx^1_2\Bigg\}=0,$$

$$-\infty\leqslant x^1_1,x^1_2\leqslant\infty.$$

Нуждающиеся в факторизации функции левой части функциональных уравнений дают характеристические уравнения в локальных системах координат. Они имеют вид

$$K_1(\alpha^m_1,\alpha^m_2,\alpha^m_3)=$$
$$=A_{11}(\alpha^m_1)^2+A_{22}(\alpha^m_2)^2+A_{33}(\alpha^m_3)^2-A,$$
$$m=1,\ 3,$$

$$K_2(\alpha^n_1,\alpha^n_2,\alpha^n_3)=$$
$$=A_{33}(\alpha^n_1)^2+A_{22}(\alpha^n_2)^2+A_{11}(\alpha^n_3)^2-A,$$
$$n=2,\ 4,$$

$$K_3(\alpha^p_1,\alpha^p_2,\alpha^p_3)=$$
$$=A_{11}(\alpha^p_1)^2+A_{33}(\alpha^p_2)^2+A_{22}(\alpha^p_3)^2-A,$$
$$p=5,\ 6.$$

Интересующие нас корневые множества описываются соотношениями

$$\alpha^m_{3-}(\alpha^m_1,\alpha^m_2)=$$
$$=-i\sqrt{A_{33}^{-1}\left[A_{11}(\alpha^m_1)^2+A_{22}(\alpha^m_2)^2-A\right]},$$
$$m=1,\ 3,$$

$$\alpha^n_{3-}(\alpha^n_1,\alpha^n_2)=$$
$$=-i\sqrt{A_{11}^{-1}\left[A_{33}(\alpha^n_1)^2+A_{22}(\alpha^n_2)^2-A\right]},$$
$$n=2,\ 4,$$

$$\alpha^p_{3-}(\alpha^p_1,\alpha^p_2)=$$
$$=-i\sqrt{A_{22}^{-1}\left[A_{11}(\alpha^p_1)^2+A_{33}(\alpha^p_2)^2-A\right]},$$
$$p=5,\ 6.$$

Остальные параметры можно найти в [10].

При исследовании оползневых явлений важное место занимают вопросы резонансов оползнеподобной блочной структуры, которые могут повлиять на расщепление блоков на контактирующие более мелкие.

Система слой-блок обладает резонансами. Резонансные частоты описываются соотношениями.

$$k_2\approx\pi\sqrt{\frac{(n+0,5)^2}{a^2}+\frac{(s+0,5)^2}{(b+h)^2}}<\frac{\pi}{2h},$$
$$n,\ s=0,1,2,\ldots.$$

Резонансных частот тем больше, чем больше размеры блока.

Авторам не известны сведения о таких особенностях предоползневого поведения блочной структуры, когда резонансы могут способствовать расщеплению блоков и инициированию оползня.

4. Имеющиеся примеры оползневых явлений свидетельствуют о возможности возникновения блоков с цилиндрической боковой поверхностью. Ниже приводится пример построения блоков с цилиндрическими поверхностями. В качестве примера построены блочные элементы для внутренней граничной задачи в ограниченном цилиндре Ω_1 радиуса b для дифференциального уравнения Гельмгольца вида (1), но с другим обозначением неизвестной

$$\mathrm{Q}(\partial x_1,\partial x_2,\partial x_3)\psi=$$
$$=\left[\partial^2x_1+\partial^2x_2+\partial^2x_3+k^2\right]\times$$
$$\times\psi(x_1,x_2,x_3)=0. \quad (3)$$

Ниже показано, что псевдодифференциальные уравнения блочного элемента позволяют рассматривать все возможные варианты граничных условий для дифференциального уравнения в частных производных. Как и в предыдущих работах [11] используются

граничные условия как Дирихле, так и Неймана.

В цилиндрической системе координат r, φ, z уравнение (3) для цилиндра имеет вид

$$(\Delta + k_1^2)\psi = 0, \qquad (4)$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$r, \varphi, z \in \Omega_1.$$

Решения граничных задач для уравнения (4) ищутся в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s$. Для исследования этого уравнения дифференциальным методом факторизации введем двойное и тройное преобразование и обращение Фурье–Бесселя в виде

$$\mathbf{B}_3(\theta, p, \sigma)u = \int_{c_1}^{c_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{b} u(r, \varphi, z)J_p(\theta r)\times$$
$$\times \exp\left[i(p\varphi + \sigma z)\right] r dr d\varphi dz = U(\theta, p, \sigma),$$

$$\mathbf{B}_3^{-1}(r, \varphi, z)U =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} U(\theta, p, \sigma)J_p(\theta r)\times$$
$$\times \exp\left[-i(p\varphi + \sigma z)\right] \theta d\theta d\sigma = u(r, \varphi, z),$$

$$\mathbf{B}_{21}(p, \sigma)u = \int_0^{2\pi}\int_{c_1}^{c_2} u(\varphi, z)J_p(\theta_0 R)\times$$
$$\times \exp\left[i(p\varphi + \sigma z)\right] R dz d\varphi = U(p, \sigma), \quad (5)$$

$$\mathbf{B}_{21}^{-1}(\varphi, z)U = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} U(p, \sigma)J_p(\theta_0 R)\times$$
$$\times \exp\left[\, -i(p\varphi + \sigma z)\,\right] \theta_0 d\sigma = u(\varphi, z),$$

$$\mathbf{B}_{23}(\theta, p)u = \int_0^{2\pi}\int_0^{b} u(r, \varphi)J_p(\theta r)\times$$
$$\times \exp\left[i(p\varphi + \sigma_0 z_s)\right] r dr d\varphi = U(\theta, p),$$

$$\mathbf{B}_{23}^{-1}(r, \varphi)U = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} U(r, p)J_p(\theta r)\times$$
$$\times \exp\left[-i(p\varphi + \sigma_0 z_s)\right] \theta d\theta = u(r, \varphi),$$

$$\mathbf{B}_1(r, p, z)u =$$
$$= \int_0^{2\pi} u(r, \varphi, z)\exp(ip\varphi)d\varphi = U_p(r, z),$$

$$\mathbf{B}_1^{-1}(r, \varphi, z)U_p(r, z) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-\infty}^{\infty} U_p(r, z)\exp(-ip\varphi) = u(r, \varphi, z),$$

$$\mathbf{F}_1(\sigma)u = \int_{c_1}^{c_2} u(z)b\exp i\sigma z dz = U(\sigma),$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(z)U = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\sigma)b\exp(-i\sigma z)d\sigma = u(z),$$

$$\mathbf{F}_2(\theta)u = \int_0^{b} u(r)J_p(\theta r)r dr = U(\theta),$$

$$\mathbf{F}_2^{-1}(r)U(\theta) = \int_0^{\infty}\sum_{p=-\infty}^{\infty} U(\theta)J_p(\theta r)\theta d\theta = u(r).$$

Здесь $J_p^(r)$ — функция Бесселя порядка p.

Применяя к уравнению (4) преобразования (5), построим внешнюю форму [11], которая в цилиндрической системе координат принимает вид

$$\omega = g\left[r\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - \theta J_p'(\theta b)J_p^{-1}(\theta b)\psi\right)d\varphi\wedge dz - \right.$$
$$- \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - ip\psi\right)dr\wedge dz +$$
$$\left. + r\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - i\sigma\psi\right)dr\wedge d\varphi\right], \quad (6)$$

$$g(r, \varphi, z) = J_p(\theta r)\exp\left[i(p\varphi + \sigma z)\right].$$

Осуществив переход к функциональному уравнению, получим его в форме

$$K(\theta, \sigma)\Psi(\theta, p, \sigma) = \int_{\partial\Omega_1}\omega,$$
$$K(\theta, \sigma) = (\theta^2 + \sigma^2 - k_1^2). \qquad (7)$$

Представим границу области в виде

$$\partial\Omega_1 = \partial\Omega_{10} \cup \partial\Omega_{20},$$

где $\partial\Omega_{10}$ представляет боковую цилиндрическую часть границы $\partial\Omega_1$, а $\partial\Omega_{20}$ — торцевую, состоящую из двух частей: $\partial\Omega_{21}$ — торец $z = c_1$ и $\partial\Omega_{22}$ — торец $z = c_2$ Введем значения решения на границах области, обозначив через ψ_r, ψ_{z1}, ψ_{z2} — значения функции ψ на границах $\partial\Omega_{10}$, $\partial\Omega_{21}$ и $\partial\Omega_{22}$ соответственно.

Применяя традиционный алгоритм вывода псевдодифференциальных уравнений, связанный с построением касательного расслоения границы [1, 11], введем криволинейные локальные системы координат на каждой границе $\partial\Omega_\nu$. Требование автоморфизма [1] приводит к следующим псевдодифференциальным уравнениям:

$$\mathbf{F}_1^{-1}(z)P_1(\theta_1, \sigma, b, c_1, c_2) = 0,$$

$$z \in [c_1, c_2], \quad \theta_1 = i\sqrt{\sigma^2 - k_1^2},$$

$$\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_1(\theta, \sigma_-, b, c_1, c_2)\exp[-i\sigma_- c_1] = 0,$$

$$r \in [0, b], \quad \sigma_\pm = \pm i\sqrt{\theta^2 - k_1^2},$$

$$\mathbf{F}_2^{-1}(r)P_1(\theta, \sigma_+, b, c_1, c_2)\exp[-i\sigma_+ c_2] = 0,$$

$$r \in [0, b],$$

Здесь

$$P_1(\theta, \sigma, b, c_1, c_2) =$$
$$= \int_{c_1}^{c_2} \left[J_p(\theta b)\frac{\partial \Psi_{rp}}{\partial r} - \theta J_p'(\theta b)\Psi_{rp} \right] \times$$
$$\times\, b\exp(i\sigma z)dz +$$
$$+ \int_0^b J_p(\theta r)\left[\frac{\partial \Psi_{1p}}{\partial z} - i\sigma\Psi_{1p}\right] \times$$
$$\times\, r\exp(i\sigma c_1)dr +$$
$$+ \int_0^b J_p(\theta r)\left[\frac{\partial \Psi_{2p}}{\partial z} - i\sigma\Psi_{2p}\right] \times$$
$$\times\, r\exp(i\sigma c_2)dr,$$

$$\Psi_{\nu p} = \mathbf{B}_1(r, p, z)\psi_\nu.$$

Полученные псевдодифференциальные уравнения позволяют формировать интегральные уравнения для всех возможных вариантов граничных задач, которые можно построить для дифференциального уравнения (4). Решение этих интегральных или интегродифференциальных уравнений дает решение псевдодифференциальных уравнений.

Представление решения, получающееся после обращения псевдодифференциальных уравнений, дается соотношением

$$\psi(r, \varphi, z) = \mathbf{B}_3^{-1}(r, \varphi, z)K^{-1}(\theta, \sigma)\int\limits_{\partial\Omega_1} \omega.$$

Метод блочного элемента позволяет охватить исследованием блочные структуры как с плоскими, так и цилиндрическими и сферическими границами, а также и более сложные, формируемые в предоползневой стадии. метод дает возможность изучить последствия различных воздействий на такие структуры с целью штатного инициирования оползневых явлений.

Литература

1. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // ДАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 623–625.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О проблеме блочных структур академика М. А. Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. № 4. С. 480–485.
3. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427. № 2. С. 183–186.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О пирамидальном блочном элементе // ДАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 30–34.
5. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Интегральный метод факторизации в смешанных задачах для анизотропных сред // ДАН. 2009. Т. 426. № 4. С. 471–475.
6. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и нано структурах // ДАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 596-599.
7. *Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.* О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418. № 3. С. 321–323.
8. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Павлова А. В.* Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424. № 1. С. 36–39.

9. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* О методе блочного элемента // Известия РАН. Механика твердого тела. 2010. № 3. С. 173–181.
10. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* О блочных элементах в слоистых средах с рельефной границей // ДАН. 2010. Т. 435. № 1. С. 29–34.
11. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Блочные элементы со сферической границей // ДАН. 2010. Т. 434. № 5. С. 616–619.

Ключевые слова: блочные элементы, граничные задачи, резонансы, оползни, блочные структуры.

Статья поступила 28 сентября 2011 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону
© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Горшкова Е. М., Иванов П. Б., Рядчиков И. В., Плужник А. В., Кашков Е. В., 2011