УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ЗАДАЧИ О РЕКОНСТРУКЦИИ ТРЕЩИНЫ В ВЯЗКОУПРУГОМ СЛОЕ[1]

Ватульян А. О.[2]***, Лапина П. А.***[3]

ASYMPTOTIC METHOD APPLICATION FOR ANALYSIS OF THE CRACK STRUCTURING IN A VISCOELASTIC LAYER PROBLEM

Vatulyan A. O., Lapina P. A.

This paper presents an asymptotic method application in the problem of identification of the rectilinear small sized crack in the viscoelastic layer. Formulas for calculation of the wave field in the layer based on the boundary integral equations method and its discrete version (i.e. method of boundary elements) and also asymptotic formulas for amplitudes of oscillations are obtained. The paper proposes an identification method of the crack parameters via set amplitudes of displacements on a part of the upper border. The computing experiments conducted on the reconstruction model made it possible to determine borders of applicability of the proposed method.

Keywords: viscoelastic, identification, cracks.

Введение

В настоящее время достаточно подробно исследованы задачи расчета волновых полей, а также задачи идентификации внутренних канонических дефектов, расположенных на стыке областей, вертикальных или горизонтальных трещин в слое или полупространстве. Задачи о построении полей смещений в конечных телах с внутренними трещиноподобными дефектами произвольной конфигурации основаны либо на конечноэлементных либо на граничноэлементных технологиях. Задачи идентификации таких дефектов менее изучены, при этом в большинстве работ решение таких задач получено с помощью минимизации функционала невязки [1]. Увеличение количества определяющих трещину параметров ведет к увеличению размерности пространства поиска, однако даже оценочная информация о параметрах трещины может значительно упростить процедуру ее идентификации.

Следует отметить, что в подавляющем большинстве исследований, посвященных идентификации трещин, рассматриваются упругие тела. Ряд конструкционных материалов обладает более сложными механическими свойствами по сравнению с моделью изотропного упругого тела, например, анизотропией и реологией, которые в значительной степени усложняют процедуру реконструкции [2–5]. Подход, развиваемый в данной работе применительно к идентификации дефекта в вязкоупругой ортотропной слоистой среде, актуален для исследования композиционных материалов, в которых трещины являются характерными дефектами.

В работе развит асимптотический метод расчета волновых полей для трещины малого относительного размера, расположенной в вязкоупругом ортотропном слое, что значительно упрощает процедуру решения как прямой, так и обратной задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу идентификации внутренней трещины малого размера в ортотропном вязкоупругом слое по заданным полям

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы, госконтракт № П596) и РФФИ (10-01-00194).

[2]Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@aaanet.ru.

[3]Лапина Полина Анатольевна, аспирантка кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: polina_azarova86@mail.ru.

смещений на части верхней границы в случае антиплоских колебаний.

Будем рассматривать установившиеся сдвиговые колебания слоя толщины h, занимающего в пространстве область V, нижняя грань S_1 которого жестко защемлена, а верхняя S_2 свободна от напряжений за исключением области приложения нагрузки $S_{20} \subset S_2$. В слое находится внутренняя туннельная трещина, ось которой совпадает с осью x_2. В этом случае ненулевой компонентой вектора перемещений является компонента $u_2 = u_2(x_1, x_3)$.

Трещина представлена как математический разрез в области V с берегами $S_0^{\pm}$, на которых компонента поля перемещений терпит разрыв: $\chi_2 = u_2|_{S_0^+} - u_2|_{S_0^-}$. Действие трещины на основе теории дислокаций [6] заменяется действием фиктивной массовой силы с носителем на трещине, зависящей от функции раскрытия трещины. Считаем, что берега трещины не взаимодействуют друг с другом во время колебаний и свободны от напряжений.

Вязкоупругие свойства учтены на основе принципа соответствия в рамках концепции комплексных модулей [7]. В случае стационарных гармонических колебаний такой подход позволяет получить решение задачи о колебаниях вязкоупругих тел путем решения соответствующей упругой задачи, если упругие константы материала заменить комплексными модулями, представляющими собой комплексные функции частоты колебаний.

Для установившегося режима колебаний будем считать, что нагрузка имеет вид $p_2(x,t) = p_2(x)e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота колебаний, компонента вектора перемещений отыскивается в виде $u_2(x,t) = u_2(x)e^{-i\omega t}$. В рамках концепции комплексных модулей после отделения временного множителя краевая задача принимает вид:

$$\sigma_{2j,j} + \rho\omega^2 u_2 + f_2 = 0, \quad j = 1,3, \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered}\sigma_{21} = C^*_{2121}(i\omega)u_{2,1}, \\ \sigma_{23} = C^*_{2323}(i\omega)u_{2,3},\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}u_2|_{S_1} = 0; \\ \sigma_{23}|_{S_{20}} = p_2; \quad \sigma_{23}|_{S_2 \setminus S_{20}} = 0,\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\sigma_{2j} n_j^{\pm}\Big|_{S_0^{\pm}} = 0, \quad j = 1,3. \tag{1.4}$$

где ρ — плотность среды, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, удовлетворяющие закону Гука в вязкоупругом случае, $C^*_{ijkl}(i\omega)$ — компоненты тензора комплексных модулей, $n_j^{\pm}$ — компоненты единичных векторов внешних нормалей к поверхностям $S_0^{\pm}$.

Фиктивная массовая сила имеет следующий вид:

$$f_2 = -[C^*_{2121}(i\omega)n_1^+\chi_{2,1}\delta(\zeta) + \\ + C^*_{2323}(i\omega)n_3^+\chi_{2,3}\delta(\zeta)],$$

где $\delta(\zeta)$ — дельта-функция Дирака, а ζ — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности S_0^+.

Задача идентификации трещины в слое состоит в определении ее местоположения и геометрии по полям перемещений, измеренным на части верхней границы слоя $S_{21} \subset S_2$

$$u_2(x) = g(x), \quad x \in S_{21}. \tag{1.5}$$

2. Модель динамического поведения вязкоупругих тел

Удобным математическим аппаратом описания вязкоупругих свойств в условиях малых деформаций являются линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами (линейные дифференциальные модели). В теории систем уравнение динамического поведения какого-либо конкретного объекта исследования для небольшого интервала времен (в один десятичный порядок) моделируется дифференциальным оператором первого порядка. Соотношение вида $En\dot{\varepsilon} + H\varepsilon = n\dot{\sigma} + \sigma$ описывает так называемую модель стандартного вязкоупругого тела с длительным модулем H, мгновенным модулем E $(E > H)$ и временем релаксации n [7].

Для этого соотношения комплексный модуль имеет вид

$$C^*(i\omega) = \frac{-Eni\omega + H}{-ni\omega + 1}.$$

Такая форма используется для описания комплексных модулей упругости при растяжении, сдвиге, объемном деформировании. В области больших и малых частот вязкоупругий материал ведет себя почти как упругий, поскольку

$$\lim_{\omega\to 0} C^*(i\omega) = H, \quad \lim_{\omega\to\infty} C^*(i\omega) = E.$$

Вещественная часть комплексного модуля монотонно возрастает, а мнимая — имеет экстремум при $\omega = 1/n$. Поскольку мнимая часть характеризует затухание в среде, это

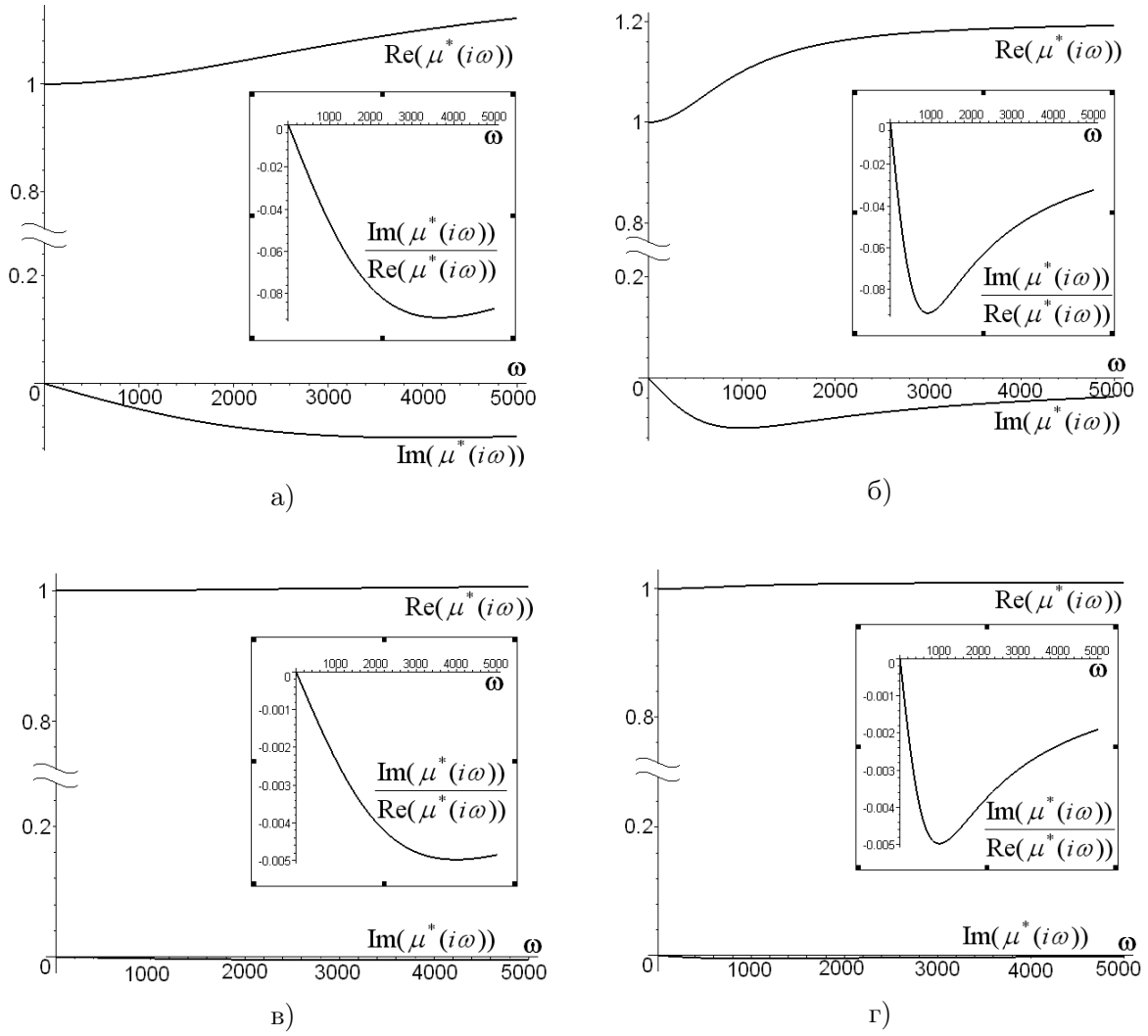


Рис. 1. а) $E = 1{,}2 \cdot 10^9$ Па, $H = 1{,}0 \cdot 10^9$, $n = 0{,}00025$ с; б) $E = 1{,}2 \cdot 10^9$ Па, $H = 1{,}0 \cdot 10^9$, $n = 0{,}001$ с; в) $E = 1{,}01 \cdot 10^9$ Па, $H = 1{,}0 \cdot 10^9$, $n = 0{,}00025$ с; г) $E = 1{,}01 \cdot 10^9$ Па, $H = 1{,}0 \cdot 10^9$, $n = 0{,}001$ с

означает, что на частотах, близких по величине к значению n^{-1}, затухание колебаний наиболее значительно.

Для численного анализа рассмотрен модельный изотропный вязкоупругий материал, со следующими свойствами: модуль Юнга задается комплексным модулем, коэффициент Пуассона считается вещественной константой $\nu = 0{,}3$, плотность материала $\rho = 1\,200$ кг/м^3, толщина слоя $h = 1$ м.

Расчеты проводились для нескольких типов материалов: вязкоупругий материал с малым затуханием (примерно 0,5 %), вязкоупругий материал с затуханием (примерно 10 %), упругий материал. На рис. 1 приведены обезразмеренные комплексные модули и тангенсы углов потерь для разных характеристик вязкоупругих материалов.

3. Решение прямой задачи

В [8] представлен способ решения прямой задачи для вязкоупругого слоя с трещиной произвольного размера, использующий метод граничных интегральных уравнений. Интегральные представления для волновых полей в слое построены на основе функций Грина для слоя и формул Сомильяны [9].

В случае сосредоточенной нагрузки, приложенной на верхней границе слоя в точке с горизонтальной координатой «$-L$» ($p_2(x_1) = p_2\delta(x_1 + L)$) поле имеет следующий вид

$$u_2(\xi) = u_2^{\text{эт}}(\xi) + \int\limits_{S_0^+} k(x,\xi)\chi_2(x)dS_x, \quad (3.1)$$

$$\xi \in V,$$

$$u_2^{\text{эт}}(\xi) = \frac{p_2}{2\pi C^*_{2323}(i\omega)} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(\lambda\xi_3)}{\lambda \operatorname{ch}(\lambda h)} e^{-i\alpha_1(\xi_1+L_1)} d\alpha_1, \quad (3.2)$$

где $u_2^{\text{эт}}(\xi)$ — эталонное поле, то есть поле в среде без дефекта от действия заданной нагрузки, а интегральное слагаемое — отраженное поле, то есть поле, создаваемое дефектом.

Здесь

$$k(x,\xi) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha_1(\xi_1-x_1)} [\frac{g_1}{\lambda} e^{-\lambda|\xi_3-x_3|} + \\ + (g_3 e^{-\lambda(h-x_3)} \operatorname{sh}(\lambda\xi_3) - g_2 e^{-\lambda x_3} \operatorname{ch}(\lambda(h-\xi_3))) \times \\ \times \lambda \operatorname{ch}(\lambda h)^{-1}] d\alpha_1,$$

$$g_1 = i\nu^* \alpha_1 n_1^+ + n_3^+ \lambda \operatorname{sign}(\xi_3 - x_3),$$

$$g_2 = i\nu^* \alpha_1 n_1^+ - n_3^+ \lambda, \quad g_3 = i\nu^* \alpha_1 n_1^+ + n_3^+ \lambda,$$

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{C^*_{2323}(i\omega)}, \quad \lambda^2 = \alpha_1^2 - k^2,$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) > 0, \quad \nu^* = \frac{C^*_{1212}(i\omega)}{C^*_{2323}(i\omega)}.$$

Для нахождения неизвестной функции раскрытия трещины формулируется ГИУ. Устремляя в (3.1) точку ξ к точке на трещине $\xi \to y \in S_0^+$ и учитывая условия отсутствия напряжений на трещине (1.4), имеем

$$\int\limits_{S_0^+} K(x,y)\chi_2(x) dS_x = F(y), \quad y \in S_0^+. \quad (3.3)$$

Отметим, что $K(x,y)$ является интегральным оператором, ядро которого содержит гиперсингулярную особенность и соответствующий интеграл понимается в смысле конечного значения по Адамару.

4. Асимптотический подход

В [10] представлен асимптотический метод определения параметров трещины в упругом случае. Ниже на основе принципа соответствия решается аналогичная вязкоупругая задача, имеющая свою специфику.

При исследовании задачи о колебаниях слоя толщины h с трещиной характерной длины l введем два безразмерных параметра $\varepsilon_1 = l/h$, $\varepsilon_2 = \omega h/c$ (c — характерная скорость волн в среде). В области изменения параметра $\varepsilon_1 \ll 1$ (случай трещин малых относительных размеров) возможно значительное упрощение процедуры решения как прямой, так и обратной задачи.

Исследование дисперсионного множества позволяет получить информацию о характере распространяющихся волн в слое [11]. Проанализируем знаменатель в представлении (3.2). Уравнение $\operatorname{ch}(\lambda h) = 0$ имеет аналитическое решение

$$\alpha_m = \pm\beta_m,$$

$$\beta_m = \frac{\sqrt{k^2 - (\beta_m^0)^2}}{\sqrt{i\nu^*\omega}}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$\operatorname{Im}\beta_m > 0, \quad \beta_m^0 = \frac{\pi}{h}\left(m - \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, в упругом случае при фиксированной частоте решение дисперсионного уравнения дает конечное число вещественных корней и счетное множество чисто мнимых. Вещественным корням соответствуют бегущие волны, а мнимым — неоднородные с экспоненциально затухающей амплитудой, причем бегущие волны существуют только в области изменения параметра $\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_*$, где ε_* характеризует критическую частоту. На рис. 2 представлено дисперсионное множество в упругом случае.

В вязкоупругом случае корни дисперсионного уравнения смещаются в комплексную плоскость и каждая волна является затухающей. Однако в вязкоупругой среде наблюдаются волны, амплитуды которых слабо затухают (соответствуют бегущим волнам в упругом случае), и волны, амплитуды которых убывают очень быстро (их вклад в волновое поле незначителен, так же как и экспоненциально затухающих в упругом случае). Значение аналог критической частоты (т.е. значение частоты, до которой все волны являются неоднородными) нельзя получить аналитически, а только численно из анализа поведения дисперсионных кривых.

На рис. 3 представлены дисперсионные множества для различных вязкоупругих материалов. Отметим поведение дисперсионных кривых при больших частотах. Так, в случае приведенной выше модели вязкоупругого изотропного материала

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{2(1+\nu)\rho}{E}} \left(\omega + i\frac{1}{2}\frac{E-H}{En}\right),$$

$$\omega \to \infty, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

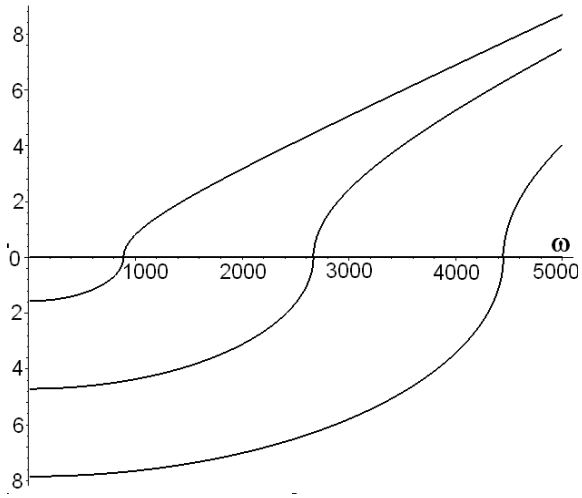
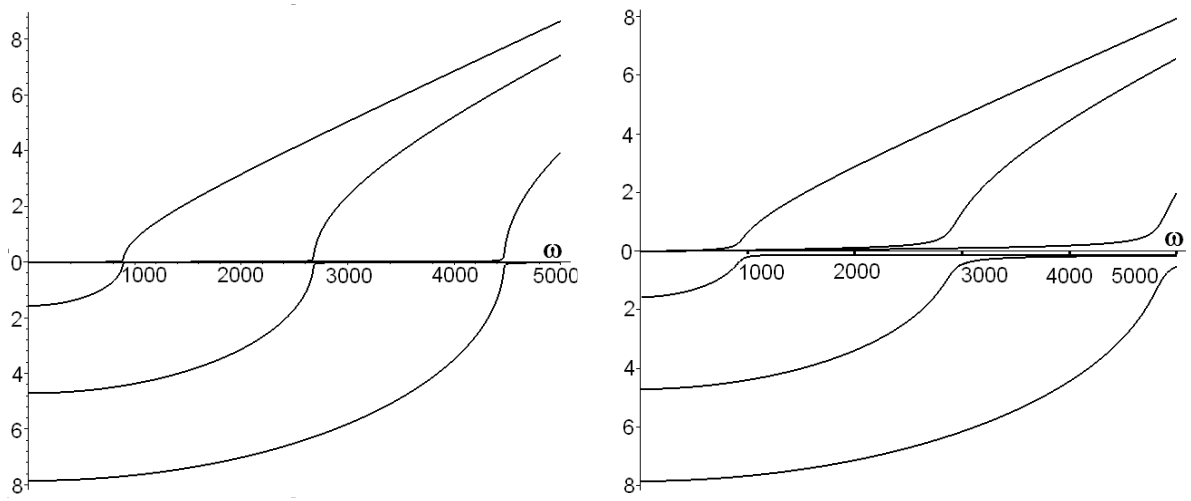


Рис. 2. Упругий материал с модулем упругости, равным $H = 1{,}0 \cdot 10^9$ Па



а) б)

Рис. 3. а) $E = 1{,}01 \cdot 10^9$ Па, $H = 1{,}0 \cdot 10^9$, $n = 0{,}001$ с; б) $E = 1{,}01 \cdot 10^9$ Па, $H = 1{,}0 \cdot 10^9$, $n = 0{,}001$ с

Это означает, что вещественная часть растет пропорционально частоте колебаний, а мнимая часть каждой дисперсионной кривой стремится к постоянной величине, значение которой зависит от характеристик вязкоупругого материала.

Введем параметры прямолинейной трещины следующим образом: трещина имеет длину $2l_0$, составляет с положительным направлением оси x_1 угол θ, центр трещины расположен на расстоянии d_0 от нижней границы слоя и на расстоянии L от точки приложения нагрузки до вертикальной прямой, проходящей через центр трещины.

Исследуя асимптотику ядра и правой части ГИУ в предположении малости линейного размера дефекта, отметим, что главный член разложения порождает гиперсингулярное интегральное уравнение с постоянной правой частью

$$\int_{-1}^{1} \frac{\chi_*(t)}{(t-\tau)^2} dt = q_0, \quad \tau \in [-1, 1], \tag{4.1}$$

$$\chi_*(t) = l_0^{-1} \chi(x(t)),$$

$$q_0 = -\frac{2\pi p_0}{h\sqrt{i\nu^*\omega}} F_0(\theta, d_0, L),$$

$$p_0 = \frac{p_2}{iC^*_{2323}\omega},$$

$$F_0(L, d_0, \theta) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} [\gamma_{1n}(d_0, \theta) + i\gamma_{2n}(d_0, \theta)] e^{i\beta_n L},$$

$$\gamma_{1n}(d_0,\theta) = -\sin\theta\sin(\beta_n^0 d_0),$$
$$\gamma_{2n}(d_0,\theta) = -r_n\cos\theta\cos(\beta_n^0 d_0),$$
$$r_n = \frac{\beta_n^0}{i\nu^*\omega\beta_n}.$$

Интегральное уравнение (4.1) имеет следующее аналитическое решение в классе ограниченных функций [12] и [13]:

$$\chi_*(t) = \sqrt{1-t^2}W_0, \quad W_0 = -q_0/\pi. \quad (4.2)$$

Отметим, что $W_0 = W_0(\theta, d_0, L)$.

Определив таким образом функцию раскрытия, вычислим волновое поле в любой точке слоя. Так для поля перемещений на верхней границе в дальней зоне справа от дефекта ($x_1 > 0$) имеем представление

$$u_2(x_1,h) = u_2^{\text{эт}}(x_1,h) + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{i\beta_n x_1}, \quad (4.3)$$

$$A_n = -(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2h}l_0^2 W_0(\theta,d_0,L)\times \times[\gamma_{1n}(d_0,\theta) - i\gamma_{2n}(d_0,\theta)], \quad (4.4)$$

которое можно записать в виде

$$u_2(x_1,h) = = u_2^{\text{эт}}(x_1,h) + \sum_{n=1}^{N} A_n^0 e^{-\operatorname{Im}(\beta_n)x_1}, \quad (4.5)$$

где N – количество неоднородных волн, а $A_n^0 = A_n e^{i\operatorname{Re}(\beta_n)x_1}$ — их затухающие амплитуды. Начиная с номера $N+1$, функции $e^{-\operatorname{Im}(\beta_n)x_1}$ очень быстро затухают и соответствующие слагаемые дают незначительный вклад в поле перемещений.

Будем считать, что положение точек съема данных известно, тогда, зная амплитуды A_n^0, можно вычислить и значения A_n (в упругом случае $A_n^0 = A_n$). Далее A_n будем также называть амплитудами.

Нетрудно установить, что характерной особенностью величины A_n является пропорциональность квадрату длины трещины при любом количестве волн в слое. A_n представляет собой квадратичную форму относительно $\sin\theta$ и $\cos\theta$

$$A_n = R_n^* l_0^2[a_{11n}(d_0,L)\sin^2\theta + 2a_{12n}(d_0,L)\sin\theta\cos\theta + a_{22n}(d_0,L)\cos^2\theta].$$

Коэффициенты в этих представлениях для случаев одной и двух волн в слое имеют следующий вид:

если $N = 1$,

$$R_1^* = -\frac{\pi}{h^2\sqrt{\nu}}p_0,$$
$$a_{111}(d_0,L) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_1 L},$$
$$a_{121}(d_0,L) = 0,$$
$$a_{221}(d_0,L) = \left(\frac{\pi}{2h\nu\beta_1}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_1 L},$$

если $N = 2$,

$$R_1^* = -\frac{\pi}{h^2\sqrt{\nu}}p_0, \quad R_2^* = \frac{\pi}{h^2\sqrt{\nu}}p_0,$$

$$a_{111}(d_0,L) = \sin\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)\times \times\left(\sin\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_1 L} - \sin\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_2 L}\right),$$

$$a_{121}(d_0,L) = = i\left(\frac{\pi}{2h\nu\beta_1}\cos\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right) - - \frac{3\pi}{2h\nu\beta_2}\sin\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right)\right)e^{i\beta_2 L},$$

$$a_{221}(d_0,L) = \frac{1}{\beta_1}\cos\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)\left(\frac{\pi}{2h\nu}\right)^2\times \times\left(\frac{1}{\beta_1}\cos\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_1 L} - \frac{3}{\beta_2}\cos\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_2 L}\right),$$

$$a_{112}(d_0,L) = \sin\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right)\times \times\left(\sin\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_1 L} - \sin\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_2 L}\right),$$

$$a_{122}(d_0,L) = = i\left(\frac{\pi}{2h\nu\beta_1}\cos\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right) - - \frac{3\pi}{2h\nu\beta_2}\sin\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right)\right)e^{i\beta_1 L},$$

$$a_{222}(d_0,L)=\frac{3}{\beta_2}\cos\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)\left(\frac{\pi}{2h\nu}\right)^2\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\beta_1}\cos\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_1 L}-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{\beta_2}\cos\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right)e^{i\beta_2 L}\right).$$

Решение задачи восстановления параметров трещины l_0, d_0, θ, L строится на основе дополнительной информации (1.5) при помощи решения прямой задачи. В качестве дополнительной информации заданы амплитуды первых двух волн поля перемещения верхней границы на частоте ω_1: $A_1^*(\omega_1)$,$A_2^*(\omega_1)$. На основании выражений для амплитуд удается поэтапно определять искомые параметры трещины.

На первом этапе находится параметр d_0 из отношения амплитуд первой и второй волн, обозначаемой как

$$\mu_1+i\mu_2=-\frac{A_1^*(\omega_1)}{A_2^*(\omega_1)}.$$

Подставляя выражения для амплитуд, получаем однородную систему двух уравнений, линейную относительно $\sin\theta$, $\cos\theta$:

$$\begin{cases} c_{11}(d_0)\sin\theta+c_{12}(d_0)\cos\theta=0,\\ c_{21}(d_0)\sin\theta+c_{22}(d_0)\cos\theta=0,\end{cases}$$

$$c_{11}(d_0)=-\sin\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)+\mu_1\sin\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right),$$

$$c_{12}(d_0)=-\operatorname{Im}(r_1)\cos\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)+$$
$$+\mu_1\operatorname{Im}(r_2)\cos\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right)+$$
$$+\mu_2\operatorname{Re}(r_2)\cos\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right),$$

$$c_{21}(d_0)=\mu_2\sin\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right),$$

$$c_{22}(d_0)=\operatorname{Re}(r_1)\cos\left(\frac{\pi}{2h}d_0\right)-$$
$$-\mu_1\operatorname{Re}(r_2)\cos\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right)+$$
$$+\mu_2\operatorname{Im}(r_2)\cos\left(\frac{3\pi}{2h}d_0\right).$$

В отличие от упругого случая, в котором параметры r_n являются вещественными числами в рассматриваемом диапазоне частот (т.е. где имеется две бегущие волны), в вязкоупругом случае эти параметры являются комплексными при любых частотах.

Из условия совместности системы получим квадратное уравнение относительно $\cos\left(\frac{\pi}{h}d_0\right)$ с вещественными коэффициентами

$$4a\cos^2\left(\frac{\pi}{h}d_0\right)-2b\cos\left(\frac{\pi}{h}d_0\right)+c-a=0, \quad (4.6)$$

где

$$a=(\mu_1^2+\mu_2^2)\operatorname{Re}(r_2),$$

$$b=\mu_1\operatorname{Re}(r_1)+\mu_1\operatorname{Re}(r_2)-$$
$$-\mu_2\operatorname{Im}(r_2)+\mu_2\operatorname{Im}(r_1),$$

$$c=\operatorname{Re}(r_1)-\mu_1\operatorname{Re}(r_1)+\mu_1\operatorname{Re}(r_2)-$$
$$-\mu_2\operatorname{Im}(r_2)-\mu_2\operatorname{Im}(r_1).$$

Для нахождения d_0 имеется несколько возможных вариантов. Если выполняется условие $(3a+c)^2-4b^2<0$, существует единственное решение. Если же указанное условие не выполняется, то возможно наличие двух решений. В этом случае необходимо рассмотреть другую частоту ω_2, проделать аналогичные вычисления и выбрать общее решение.

На втором этапе определяется угол наклона трещины θ, $0\leqslant\theta<\pi$. На основе найденного значения d_0 угол наклона трещины можно определить из уравнения

$$tg\theta=-\frac{c_{12}\left(\frac{\pi}{h}d_0\right)}{c_{11}\left(\frac{\pi}{h}d_0\right)}. \quad (4.7)$$

На третьем этапе определяется расстояние L. Величина L входит в выражение для W_0, и для определения этого параметра необходимо произвести два измерения амплитуд при разном положении источника. В первом случае нагрузка прикладывается на расстоянии L_1 от оси трещины (соответствующие амплитуды обозначим как $A_1^*(L_1)$, $A_2^*(L_1)$). Во втором случае — на расстоянии L_2 от оси трещины (соответствующие амплитуды — $A_1^*(L_2)$, $A_2^*(L_2)$). При этом указанные расстояния отличаются друг от друга на известную величину L_0: $L_2=L_1-L_0$.

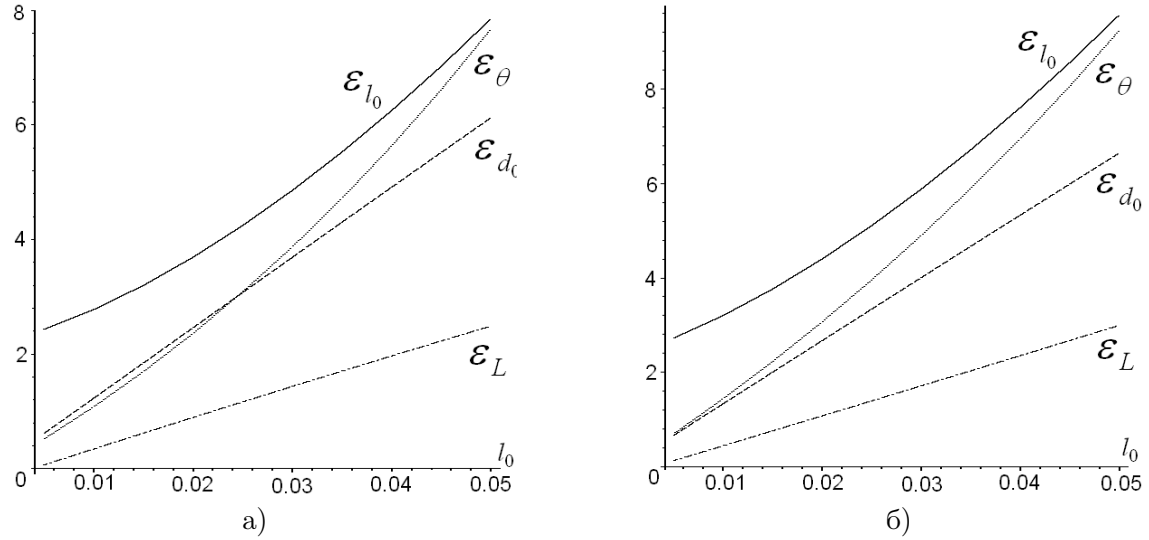


Рис. 4. а) $E = 1{,}2 \cdot 10^9$ Па, $H = 1{,}0 \cdot 10^9$, $n = 0{,}00025$ с; б) Упругий материал с модулем упругости, равным $H = 1{,}0 \cdot 10^9$

Найдя отношение $\frac{A_1^*(L_1)}{A_1^*(L_2)}$, получим уравнение для определения L_1

$$e^{i(\beta_1-\beta_2)L_1} = \frac{\gamma_{12}+i\gamma_{22}}{\gamma_{11}+i\gamma_{21}} \times \times \frac{A_1^*(L_1)e^{-i\beta_2 L_0} - A_1^*(L_2)}{A_1^*(L_1)e^{-i\beta_1 L_0} - A_1^*(L_2)}. \quad (4.8)$$

Для однозначного определения L_1 необходимо знать амплитуды при другой частоте.

На последнем этапе происходит определение длины трещины l_0, например, из одного из выражений для амплитуд

$$l_0^2 = -A_1^*(\omega_1)\left(\frac{\pi}{2h}W_0(\theta, d_0, L)[\gamma_{11}(d_0,\theta) - - i\gamma_{21}(d_0,\theta)]\right)^{-1}. \quad (4.9)$$

5. Численные результаты

Проведен ряд вычислительных экспериментов. На рис. 4 представлены относительные погрешности восстановления параметров трещины при точных данных $l_0 \in [0{,}005h\,,\, 0{,}05h]$, $d_0 = 0{,}3h$, $\theta = 30°$, $L = 2h$ для разных материалов в зависимости от разных полудлин трещины.

Как и следовало ожидать, с увеличением длины трещины относительные погрешности определения параметров трещины увеличиваются. При $l_0 \leqslant 0,05h$ погрешности определения параметров трещины составляют менее 10 %. Вязкоупругие свойства не оказывает существенного влияния на погрешности восстановления параметров.

Результаты свидетельствует о достаточно устойчивой процедуре идентификации параметров трещины. Предложенный в работе асимптотический подход позволяет определять параметры прямолинейной трещины, длина которой составляет не более 10 % от толщины слоя.

Литература

1. *Ватульян А. О., Соловъев А. Н.* Обратные задачи теории трещин в твердых телах //Известия вузов. Северо-Кавказ. регион. Математика и механика сплошной среды. Естественные науки. Спецвыпуск. 2004. С. 74–80.
2. *Ватульян А. О.* Об определении конфигурации трещины в анизотропной среде // ПММ. 2004. № 1. С. 192–200.
3. *Глушков Е. В., Глушкова Н.В., Голуб М. В.* Дифракция упругих волн на наклонной трещине в слое // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 702–715.
4. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Кривонос А. С.* Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 3. С. 419–432.
5. *Wang L., Yuan F. G.* Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Compos. Sci. and Technol. 2007. Vol. 67. № 8. P. 1370–1384.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. Т. VII. М.: Наука, 1978. 248 с.

7. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
8. *Ватульян А. О., Азарова П. А., Явруян О. В.* Идентификация параметров наклонной прямолинейной трещины в вязкоупругом слое // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14. № 3. С. 461–472.
9. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
10. *Ватульян А. О., Явруян О. В.* Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // ПММ. 2006. № 4. С. 714–724.
11. *Ворович И. И., Бабешко В. В.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
12. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
13. *Iovane G., Lifanov I. K., Sumbatyan M. A.* On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics // Acta Mechanica. 2003. № 162. P. 99–110.

Ключевые слова: вязкоупругость, идентификация, трещины.

Статья поступила 26 июня 2011 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
© Ватульян А. О., Лапина П. А., 2011