УДК 539.3

О ДВИЖЕНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Зеленцов В. Б.[1], *Батурина Н. Ю.*[2]

MOVEMENT OF THE FLAT STAMP ON THE ELASTIC SEMIPLANE

Zelentsov V. B., Baturina N. Y.

The non-stationary dynamic contact problem about movement of a flat stamp with constant speed on border of an elastic semiplane is considered. Its introduction along the stamp movement in an elastic semiplane is carried out. The problem is reduced to the solution of the two-dimensional integrated equation which two-dimensional kernel for each of the variables depends on a difference of arguments on coordinate and time. The approximate solution of the integrated equation is developed basing on the assumption that speed of the stap movement is less than the Releja wave speed.

Keywords: the non-stationary dynamic, contact problem, stamp, elastic semiplane, the two-dimensional integrated equation, speed of a wave of Releja, the approached decision, Wiener Hopfa's one-dimensional equations.

1. Постановка задачи и ее интегральное уравнение

Рассматривается нестационарная динамическая контактная задача о движении плоского штампа с постоянной скоростью V по границе $y = 0$ упругой полуплоскости ($|x| < \infty$, $y \geqslant 0$) в отрицательном направлении оси Ox. Скорость движения штампа $V < c_R$, где c_R — скорость волны Релея. При движении штамп внедряется в полуплоскость, смещаясь параллельно оси Oy, по закону $y = \varepsilon(t)$. Силы терния и сцепления между основанием штампа и упругой полуплоскостью отсутствуют. Поверхность вне области контакта штампа с упругой полуплоскостью свободна от напряжений. На бесконечности $\left(\sqrt{x^2+y^2} \to \infty\right)$ в упругой полуплоскости напряжения и смещения исчезают.

Ранее аналогичные задачи без учета инерции полуплоскости в «режиме установившихся движений» рассматривались в [1,2] и других работах. С учетом инерции сходная задача рассматривалась в [3].

Для решения поставленной задачи в подвижной системе координат [1, 2], связанной со штампом, с учетом нулевых начальных условий используются интегральные преобразования Лапласа (по времени t) и Фурье (по координате x), с помощью которых задача сводится к решению двумерного интегрального уравнения (ИУ)

$$\int_0^t d\tau \int_{-a}^{a} \varphi(\xi,\tau) k(\xi - x, t-\tau) d\xi = 2\pi\mu c_V^{-1} \varepsilon(t), \quad (1.1)$$

$$t > 0, \quad |x| \leqslant a,$$

$$k(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} dp \int_{\Gamma} K(u) e^{iuxp/c_2} du, \quad (1.2)$$

$$K(u) = (1 - iu\beta_2)^2\, \sigma_2 R^{-1}(u), \quad (1.3)$$

[1]Зеленцов Владимир Борисович, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры общеобразовательных дисциплин Ростовского филиала Военной академии Ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого; e-mail: baturinata@mail.ru.

[2]Батурина Наталья Юрьевна, канд. техн. наук, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин Ростовского филиала Военной академии Ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого; e-mail: baturinata@mail.ru.

$$R(u) = \\ = c_V \left[\left(2u^2 + (1 - iu\beta_2)^2\right)^2 - 4u^2\sigma_1\sigma_2 \right],$$

$$\sigma_1 = \sqrt{u^2 + (1 - iu\beta_2)^2},$$

$$\sigma_2 = \sqrt{u^2 + \beta^2 (1 - iu\beta_2)^2},$$

$$\beta_k = V/c_k, \quad k = 1, 2, \quad \beta = c_2/c_1,$$

$$c_V = \frac{-\beta_2^2\sqrt{1-\beta_1^2}}{\left(2-\beta_2^2\right)^2 - 4\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}},$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

относительно контактных напряжений, составляющих реальную часть $\varphi(x,t)$, возникающих между основанием штампа и упругой полуплоскостью, Γ — контур интегрирования в комплексной полуплоскости $u = \sigma + i\tau$, проходящий по прямой под углом $-\arg p$ к действительной оси, c_1, c_2 — продольная и поперечная скорости упругих волн в полуплоскости. При $V = 0$ интегральное уравнение (1.1) совпадает с классическим интегральным уравнением о внедрении плоского штампа в неподвижную упругую полуплоскость [4].

Функция комплексного переменного $K(u)$ в (1.3) не является четной и не нечетной. На действительной оси комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ $K(u)$ является комплекснозначной функцией. При малых значениях аргумента u

$$K(u) = K(0) + O(u), \quad u \to 0, \tag{1.4}$$

$$K(0) = \beta c_V^{-1},$$

а при больших значениях аргумента

$$K(u) = \frac{1}{|u|} + O\left(\frac{1}{u^2}\right), \quad u \to \infty. \tag{1.5}$$

В комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ функция $K(u)$ имеет следующие изолированные особые точки: четыре точки ветвления алгебраического типа $u = -i\gamma_k$, $k = \overline{1,4}$, лежащие на мнимой оси, и два полюса Релея $u = -i\gamma_k$, $k = 5, 6$, также лежащие на мнимой оси. При этом

$$\gamma_1 = \frac{\beta}{\beta_1 - 1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\beta_2 - 1}, \\ \gamma_3 = \frac{1}{\beta_2 + 1}, \quad \gamma_4 = \frac{\beta}{\beta_1 + 1}, \tag{1.6}$$

$$\gamma_5 = \frac{\eta_R}{\beta_R - 1}, \quad \gamma_6 = \frac{\eta_R}{\beta_R + 1}, \\ \beta_R = \frac{V}{c_R}, \tag{1.7}$$

где $\pm i\eta_R$ являются корнями классического уравнения Релея

$$\left(2u^2 + 1\right)^2 - 4u^2\sqrt{u^2+1}\sqrt{u^2+\beta^2} = 0.$$

Заметим, что при $V < c_R$ выполняется следующая упорядоченность γ_k:

$$\gamma_5 < \gamma_2 < \gamma_1 < 0, \quad \gamma_6 > \gamma_3 > \gamma_4 > 0. \tag{1.8}$$

Для однозначного представления $K(u)$ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ проводятся разрезы от точек ветвления $u = -i\gamma_k$, $k = 1, 2$ до $i\infty$ в верхней полуплоскости вдоль мнимой оси и от точек ветвления $u = -i\gamma_k$, $k = 3, 4$ до $-i\infty$ в нижней полуплоскости вдоль мнимой оси.

2. Приближенное решение интегрального уравнения

Приближенное решение двумерного ИУ (1.1) строится виде суперпозиции [5–7]

$$\varphi(x,t) = \varphi^+(a + x, t) + \\ + \varphi^-(a - x, t) - \varphi^\infty(x, t), \tag{2.1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant 2a/c_1, \quad |x| \leqslant a$$

решений $\varphi^\pm(x,t)$, $\varphi^\infty(x,t)$ ИУ на координатной полуоси ($0 \leqslant x < \infty$)

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty \varphi^\pm(\xi,\tau) k(\pm(\xi - x), t - \tau) d\xi = \\ = 2\pi\mu c_V^{-1}\varepsilon(t), \tag{2.2}$$

и ИУ на всей оси ($-\infty < x < \infty$)

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^\infty \varphi^\infty(\xi,\tau) k(\xi - x, t - \tau) d\xi = \\ = 2\pi\mu c_V^{-1}\varepsilon(t). \tag{2.3}$$

ИУ (2.2) продолжаются по координате x на всю вещественную ось от $-\infty$ до ∞

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty \varphi^\pm(\xi,\tau) k(\pm(\xi - x), t - \tau) d\xi = \\ = \begin{cases} 2\pi\mu c_V^{-1}\varepsilon(t), \ 0 \leqslant x < \infty, \\ 2\pi\mu c_V^{-1} v_\mp(x,t), \ -\infty < x < 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $v_{\mp}(x,t)$ неизвестные функции, представленные в виде операторов

$$v_{\mp}(x,t) = \\ = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 \varphi^{\pm}(\xi,\tau)k(\pm(\xi-x),t-\tau)d\xi, \\ -\infty < x < 0,$$

и являющиеся вертикальными смещениями свободной поверхности упругой полуплоскости вне области контакта.

Для решения ИУ (2.4) применяется интегральное преобразование Лапласа, в результате чего получаются одномерные ИУ Винера-Хопфа, продолженные на всю вещественную ось [6, 7], относительно трансформант Лапласа $\varphi^{\pm L}(x,p)$ контактных напряжений $\varphi^{\pm}(x,t)$

$$\int_0^\infty \varphi^{\pm L}(\xi,p)k(\pm(\xi-x)p/c_2)d\xi = \\ = \begin{cases} 2\pi\mu c_V^{-1}\varepsilon^L(p), \; 0 \leqslant x < \infty, \\ 2\pi\mu c_V^{-1} v_{\mp}^L(x,p), \; -\infty < x < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Осуществив замены переменных ξ и x в ИУ (2.5) по формулам $\xi = (c_2/p)\xi'$ и $x = (c_2/p)x'$, решение полученных ИУ относительно неизвестных $\varphi^{\pm L}((c_2/p)\xi,p)$ и $v_{\mp}^L((c_2/p)x,p)$ согласно метода Винера–Хопфа осуществляется с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной x, что приводит к соответствующим функциональным уравнениям в некоторой полосе $\eta_- < \mathrm{Im}(u) < \eta_+$ $(\eta_- < \eta_+)$ комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$

$$\varphi^{\pm LF}(u,p)K(\pm u) = \\ = -\frac{\mu}{c_V}\frac{p}{c_2}\frac{\varepsilon^L(p)}{iu} + \frac{\mu}{c_V}\frac{p}{c_2}v_{\mp}^{LF}(u,p), \quad (2.6)$$

$$\varphi^{\pm LF}(u,p) = \int_0^\infty \varphi^{\pm L}\left(\frac{c_2}{p}\xi,p\right)e^{i\xi u}d\xi,$$

$$v_{\mp}^{LF}(u,p) = \int_{-\infty}^0 v_{\mp}^L\left(\frac{c_2}{p}\xi,p\right)e^{i\xi u}d\xi.$$

Для решения функциональных уравнений (2.6) производится факторизация [8] функций $K(\pm u)$, т.е. представление их в виде произведения

$$K(\pm u) = K_+^{\pm}(u)K_-^{\pm}(u), \quad (2.7)$$

где $K_+^{\pm}(u)$ функции регулярные в верхней полуплоскости $(\mathrm{Im}\, u > \eta_-)$, а $K_-^{\pm}(u)$ регулярны в нижней полуплоскости $(\mathrm{Im}\, u < \eta_+)$ комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$. Функция $K(u)$ представляется в следующей удобной для факторизации форме

$$K(u) = \frac{\sqrt{\gamma_4 - iu}\sqrt{-\gamma_1 + iu}}{(\gamma_6 - iu)(-\gamma_5 + iu)}G(u), \quad (2.8)$$

$$G(u) = \sqrt{1-\beta_1^2}\left(1 - iu\beta^2\right)^2 \times \\ \times (\gamma_6 - iu)(-\gamma_5 + iu)R^{-1}(u),$$

где функция $G(u)$ обладает свойством $\lim\limits_{u\to\infty} G(u) = 1$, а в качестве изолированных особых точек в комплексной плоскости имеет четыре точки ветвления $u = -i\gamma_k$, $k = \overline{1,4}$ и устранимые особые точки $u = -i\gamma_k$, $k = 5$, 6. Факторизация $K(u)$, представленной в форме (2.8), дается формулой (2.7), в которой

$$K_{\pm}^{+}(u) = q_{\pm}^{+}(u)G_{\pm}^{+}(u), \quad (2.9)$$

$$q_+^+(u) = \frac{\sqrt{\gamma_4 - iu}}{\gamma_6 - iu}, \\ q_-^+(u) = \frac{\sqrt{-\gamma_1 + iu}}{-\gamma_5 + iu}, \quad (2.10)$$

$$G_{\pm}^{+}(u) = \exp\left(H_{\pm}^{+}(u)\right),$$

$$H_+^+(u) = \frac{1}{\pi}\int_{\gamma_4}^{\gamma_3} \frac{\operatorname{arctg}\omega_+^+(\xi)}{\xi - iu}d\xi,$$

$$H_-^+(u) = \frac{1}{\pi}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\operatorname{arctg}\omega_-^+(\xi)}{\xi - iu}d\xi,$$

$$\omega_{\pm}^{+}(\xi) = \Big(4\xi^2\sqrt{\mp\gamma_1 \pm \xi}\sqrt{-\gamma_2 + \xi}\times \\ \times \sqrt{\gamma_3 - \xi}\sqrt{\mp\gamma_4 \pm \xi}\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}\Big)\times \\ \times \left(2\xi^2 - (1 - \xi\beta_2)^2\right)^{-2}.$$

Факторизация функции $K(-u)$ производится по такой же схеме и приводит к формулам (2.7), в которых

$$K_{\pm}^{-}(u) = q_{\pm}^{-}(u)G_{\pm}^{-}(u), \quad (2.11)$$

$$
\begin{aligned}
q_+^-(u) &= \frac{\sqrt{-\gamma_1 - iu}}{-\gamma_5 - iu},\\
q_-^-(u) &= \frac{\sqrt{\gamma_4 + iu}}{\gamma_6 + iu},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

$$
G_\pm^-(u) = \exp\left(H_\pm^-(u)\right),
$$

$$
H_+^-(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_2}^{\gamma_1} \frac{\operatorname{arctg}\omega_+^-(\xi)}{\xi - iu} d\xi,
$$

$$
H_-^-(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma_4}^{\gamma_3} \frac{\operatorname{arctg}\omega_-^-(\xi)}{\xi - iu} d\xi,
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_\pm^-(\xi) = &\Big(4\xi^2\sqrt{\pm\gamma_1 \mp \xi}\sqrt{-\gamma_2 + \xi}\times\\
&\times\sqrt{\gamma_3 - \xi}\sqrt{\pm\gamma_4 \mp \xi}\sqrt{1-\beta_1^2}\sqrt{1-\beta_2^2}\Big)\times\\
&\times\left(2\xi^2 - (1-\xi\beta_2)^2\right)^{-2}.
\end{aligned}
$$

При выводе формул (2.9), (2.10) учитывалась упорядоченность γ_k, $k = \overline{1,4}$ (1.8).

После факторизации (2.7) функций $K(\pm u)$ в (2.6) решение функциональных уравнений (2.6) осуществляется по стандартной схеме [8]. После определения $\varphi^{\pm LF}(u,p)$ и $v_\pm^{LF}(u,p)$ производится их обращение с помощью обратных преобразований Лапласа и Фурье. В результате получаются формулы решений ИУ (2.4)

$$
\begin{aligned}
\varphi^\pm(x,t) = \frac{\mu}{c_V}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{p}{c_2}e^{pt}dp\times&\\
\times\int\limits_{-\infty+ic}^{\infty+ic}\frac{g_+^\pm(u,p)}{K_+^\pm(u)}e^{-iuxp/c_2}du,&\\
-\infty < x < 0,&
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

$$
\begin{aligned}
v_\mp(x,t) = -\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}e^{pt}dp\frac{1}{2\pi}\times&\\
\times\int\limits_{-\infty+id}^{\infty+id} g_-^\pm(u,p)K_-^\pm(u)e^{-iuxp/c_2}du,&\\
-\infty < x < 0,&
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

в которых

$$
g_+^\pm(u,p) = -\frac{\varepsilon^L(p)}{K_-^\pm(0)}\frac{1}{iu},
\tag{2.15}
$$

$$
g_-^\pm(u,p) = -\frac{\varepsilon^L(p)}{iu}\left(\frac{1}{K_-^\pm(u)} - \frac{1}{K_-^\pm(0)}\right).
$$

Функции $K_\pm^\pm(u)$ определены в (2.9) и в (2.11), $\eta_- < c < d < \eta_+$. Решение ИУ (2.3) на всей координатной оси определяется с помощью интегральных преобразований Лапласа и Фурье и дается формулой

$$
\varphi^\infty(x,t) = \frac{\mu}{\beta}\frac{\dot\varepsilon(t)}{c_2} \quad -\infty < x < \infty.
\tag{2.16}
$$

3. Эффективная аппроксимация функций $K(\pm u)$

При вычислении квадратур в (2.13), (2.14) приходится сталкиваться с вычислением сингулярных квадратур, содержащихся в $K_\pm^\pm(u)$ и указанных в формулах (2.10), (2.12). Чтобы избежать этих трудностей предлагается аппроксимировать функции $K(\pm u)$ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ выражением специального вида $K_V(u)$, позволяющим осуществить факторизацию элементарными средствами. Таким выражением может быть следующее:

$$
\begin{aligned}
K_V(u) &= q(u)G(iu),\\
q(u) &= \frac{\sqrt{-\gamma_1 + iu}\sqrt{\gamma_4 - iu}}{(-\gamma_5 + iu)(\gamma_6 - iu)},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

$$
G(u) = \exp\left(M_{14}(u)\right),
$$

$$
M_{ml}(u) = \sum_{u=0}^{N} d_n \sum_{k=m}^{l}\omega_n(u,\gamma_k),
$$

$$
\omega_n(u,\gamma_k) =
= \begin{cases}
\left(\dfrac{\sqrt{\gamma_k} + \sqrt{\gamma_k - u}}{\sqrt{\gamma_k}}\right)^{-2(n+1)}, & k = 3,4,\\[2ex]
\left(\dfrac{\sqrt{-\gamma_k} + \sqrt{-\gamma_k + u}}{\sqrt{-\gamma_k}}\right)^{-2(n+1)}, & k = 1,2.
\end{cases}
$$

Коэффициенты аппроксимации d_n определяются из условий совпадения $K_V(u)$ с $K(u)$ и их производных до N-ой включительно в точке $u = 0$

$$
K^{(m)}(0) = K_V^{(m)}(0),
\tag{3.2}
$$

$$
m = \overline{0,N}.
$$

Выполнение условий (3.2) приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов аппроксимации d_n

$$\sum_{j=0}^{N} a_{ij} d_j = b_i, \quad i = \overline{0, N}, \tag{3.3}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{4} \omega_j^{(i)}(iu, \gamma_k)\Big|_{u=0},$$

$$b_i = [\ln(K(u)/q(u))]_{u=0}^{(i)},$$

где верхний индекс (i) означает i-ую производную. Выполнение условий (3.2) гарантирует аппроксимацию $K(u)$ в некотором круге $|u| < M$ $(M > 0)$ комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$, а поведение $K_V(u)$ (3.1) на бесконечности при $u \to \infty$ совпадает с поведением на бесконечности $K(u)$ (1.5). Увеличение N приводит к расширению круга $|u| < M$ и возможности аппроксимации $K(u)$ с любой наперед заданной точностью в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$. В частности, при $N = 0$ неизвестный коэффициент аппроксимации d_0 из условия (3.2) при $m = 0$ определяется формулой

$$d_0 = \ln\left[\frac{\rho}{\beta_2^2\left(1 - \eta_R^2\beta_2^2\right)}\right],$$

$$\rho = \eta_R^2\left(\left(2 - \beta_2^2\right)^2 - 4\sqrt{1 - \beta_1^2}\sqrt{1 - \beta_2^2}\right).$$

Вид аппроксимации $K_V(u)$ (3.1) подбирается таким образом, чтобы максимально соответствовать виду функции $K(u)$, при этом аппроксимация (3.1) содержит в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ все изолированные особые точки функции $K(u)$ и не содержит других изолированных особых точек.

Факторизация (2.7) аппроксимации $K(u)$ вида (3.1) осуществляется элементарными средствами, а функции $K_\pm^+(u)$ определяются формулами

$$K_\pm^+(u) = q_\pm^+(u) G_\pm^+(iu), \tag{3.4}$$

$$G_+^+(u) = \exp\left(M_{34}(u)\right),$$

$$G_-^+(u) = \exp\left(M_{12}(u)\right).$$

При этом функции $q_\pm^+(u)$ берутся из (2.10). Факторизация $K_V(-u)$, аппроксимирующей $K(-u)$, также осуществляется элементарными средствами, функции $K_\pm^-(u)$ определяются формулами

$$K_\pm^-(u) = q_\pm^-(u) G_\pm^-(iu), \tag{3.5}$$

$$G_+^-(u) = \exp\left(M_{12}(u)\right),$$

$$G_-^-(u) = \exp\left(M_{34}(u)\right),$$

а функции $q_\pm^-(u)$ — из (2.12).

4. Контактные напряжения и другие характеристики задачи

Использование аппроксимации $K(u)$ (3.1) позволяет получить основные формулы задачи в виде однократных квадратур. Контактные напряжения между основанием движущегося штампа и упругой полуплоскостью определяются формулой (2.1) при $t < 2a/c_1$ и $|x| \leqslant a$, в которой $\varphi^\pm(x,t)$ вычисляются по формулам (2.13), $\varphi^\infty(x,t)$ — по формуле (2.16), а $v_\mp(x,t)$ — по формулам (2.14). Вычисляя квадратуры в (2.13), получим

$$\varphi^+(x,t) = \frac{\mu}{\sqrt{x}} \frac{K_+^+(0)}{\pi\beta c_2} \frac{\partial}{\partial t} \times$$

$$\times \int_0^{t - \gamma_4 \frac{x}{c_2}} \varepsilon(\tau)\Phi(x, t-\tau)\,d\tau + \frac{\mu}{\beta}\frac{\dot\varepsilon(t)}{c_2}, \tag{4.1}$$

$$0 < x < \infty,$$

$$\Phi(x,t) = \frac{q(x, c_2 t)}{t} r\left(\frac{c_2 t}{x}\right),$$

$$q(x,t) = \frac{t - \gamma_6 x}{\sqrt{t - \gamma_4 x}},$$

$$r(\xi) = \exp(-\operatorname{Re} M_{34}(\xi))\cos(\operatorname{Im} M_{34}(\xi)),$$

$$M_{34}(\xi) = \sum_{n=0}^{N} d_n \sum_{k=3}^{4} \omega_n(\xi, \gamma_k),$$

$$\omega_n(\xi, \gamma_k) = \left(\frac{\sqrt{\gamma_k} + \sqrt{\gamma_k - \xi}}{\sqrt{\gamma_k}}\right)^{-2(n+1)},$$

где $\sqrt{\gamma_k - \xi} = i\sqrt{\xi - \gamma_k}$, если $\gamma_k - \xi \leqslant 0$, $K_+^+(0)$ вычисляется по формуле (2.9), (2.10) или приближенно по (3.4),

$$\varphi^-(x,t) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\mu}{\pi\beta c_2} K_+^-(0) \frac{\partial}{\partial t} \times$$

$$\times \int_0^{t + \gamma_1 \frac{x}{c_2}} \varepsilon(\tau)\Phi(x, t-\tau)\,d\tau + \frac{\mu}{\beta}\frac{\dot\varepsilon(t)}{c_2}, \tag{4.2}$$

$$0 < x < \infty,$$

$$\Phi(x,t) = \frac{q(x,c_2t)}{t} r\left(-\frac{c_2t}{x}\right),$$

$$q(x,t) = \frac{x\gamma_5 + t}{\sqrt{\gamma_1 x + t}},$$

$$r(\xi) = \exp(-\operatorname{Re} M_{12}(\xi))\cos(\operatorname{Im} M_{12}(\xi)),$$

$$M_{12}(\xi) = \sum_{n=0}^{N} d_n \sum_{k=1}^{2} \omega_n(\xi,\gamma_k),$$

$$\omega_n(\xi,\gamma_k) = \left(\frac{\sqrt{-\gamma_k} + \sqrt{-\gamma_k+\xi}}{\sqrt{-\gamma_k}}\right)^{-2(n+1)}.$$

При этом $\sqrt{-\gamma_k+\xi} = i\sqrt{\gamma_k-\xi}$, если $-\gamma_k+\xi \leqslant 0$, $K_+^-(0)$ вычисляется по формуле (2.11), (2.12) или приближенно по (3.5).

Вычисление квадратур в (2.14) приводит к следующим формулам для вертикальных смещений свободной поверхности слева от области контакта

$$v_-(x,t) = \sqrt{-x}\,\frac{\text{V.p.}}{\pi K_-^+(0)} \times$$
$$\times \int\limits_0^{t-\gamma_1 \frac{x}{c_2}} \varepsilon(\tau) V(x,t-\tau)\,d\tau, \quad (4.3)$$

$$-\infty < x < 0,$$

$$V(x,t) = \frac{q(x,c_2t)}{t} r\left(\frac{c_2t}{-x}\right),$$

$$q(x,t) = \frac{\sqrt{-x\gamma_1 + t}}{\gamma_5 x + t},$$

$$r(\xi) = \exp(\operatorname{Re} M_{12}(\xi))\cos(\operatorname{Im} M_{12}(\xi)),$$

где $M_{12}(\xi)$ вычисляется из (4.2). Интеграл в (4.3) понимается в смысле главного значения по Коши [8], так как подынтегральная функция $q(x,t)$ терпит разрыв при $\tau = t - \gamma_5 x/c_2$ на фронте волны Релея. Значение $K_-^+(0)$ вычисляется по формулам (2.9), (2.10) или приближенно по (3.4). Из анализа (4.3) следует, что смещения свободной поверхности вне области контакта терпят логарифмический разрыв на фронте волны Релея [9]. Если перейти к исходной переменной $x = a + x'$, где $-\infty < x' < -a$, то формула (4.3) определяет вертикальные смещения на отрицательной части оси Ox, свободной от напряжений перед краем штампа $x = -a$, который является передней кромкой движущегося штампа.

Совершенно аналогично вычисляются квадратуры во второй формуле (2.14) для вертикальных смещений свободной поверхности на полуоси справа от области контакта

$$v_+(x,t) = \sqrt{-x}\,\frac{\text{V.p.}}{\pi K_+^-(0)} \times$$
$$\times \int\limits_0^{t+\gamma_4 \frac{x}{c_2}} \varepsilon(\tau) V(x,t-\tau)\,d\tau, \quad (4.4)$$

$$-\infty < x < 0,$$

$$V(x,t) = \frac{q(x,c_2t)}{t} r\left(\frac{c_2t}{-x}\right),$$

$$q(x,t) = \frac{\sqrt{t + \gamma_4 x}}{x\gamma_6 + t},$$

$$r(\xi) = \exp(\operatorname{Re} M_{34}(\xi))\cos(\operatorname{Im} M_{34}(\xi)),$$

где $M_{34}(\xi)$ вычисляется по формулам из (4.1). Интеграл в (4.4), как и в (4.3), понимается в смысле главного значения по Коши, так как подынтегральная функция $q(x,t)$ терпит разрыв на фронте волны Релея при $\tau = t + \gamma_6 x/c_2$. При переходе в (4.4) к старой переменной x по формуле $x = a - x'$, где $a \leqslant x' < \infty$, формула (4.4) определяет вертикальные смещения на положительной части оси Ox за краем движущегося штампа $x = a$, являющегося его задней кромкой.

Другой существенно важной характеристикой задачи является действующая на штамп сила $P(t)$, позволяющая удерживать его на глубине $\varepsilon(t)$, определяемая как

$$P(t) = \int\limits_{-a}^{a} \varphi(x,t)\,dx =$$
$$= P_+(t) + P_-(t) - P_\infty(t), \quad (4.5)$$

в которой функции $P_\pm(t)$, $P_\infty(t)$ вычисляются по формулам

$$P_\pm(t) = \int\limits_{-a}^{a} \varphi^\pm(a \pm x, t)\,dx,$$
$$P_\infty(t) = \int\limits_{-a}^{a} \varphi^\infty(x,t)\,dx, \quad (4.6)$$

где $\varphi^\pm(x,t)$ из (4.1), (4.2), а $\varphi^\infty(x,t)$ из (2.16). Вычисление квадратур в (4.6) приводит к соотношениям

$$P_+(t) = \mu a\left[\frac{2K_+^+(0)}{\pi\beta c_2}\int\limits_0^{t-\gamma_4 t_2}\varepsilon(\tau)P^+(t-\tau)d\tau - \right.$$
$$\left. - q\frac{\varepsilon(t)}{a} + 2\frac{\dot\varepsilon(t)}{c_2}\right], \quad (4.7)$$

$$P^+(t) = \frac{q\left(\frac{t}{t_2}\right)}{t^2}r\left(\frac{t}{t_2}\right), \quad q(\xi) = \frac{\gamma_6 - \xi}{\sqrt{\xi-\gamma_4}},$$

$$q = \frac{K_+^+(0)}{\pi}\int\limits_{\gamma_4}^{\infty}\frac{q(\xi)}{\xi^2}r(\xi)d\xi, \quad t_2 = \frac{2a}{c_2},$$

где $r(\xi)$ из (4.1), $K_+^+(0)$ в (2.10) или приближенно в (3.4).

$$P_-(t) =$$
$$= \mu a\left[-\frac{2K_+^-(0)}{\pi\beta c_2}\int\limits_0^{t+\gamma_1 t_2}\varepsilon(\tau)P^-(t-\tau)d\tau + \right.$$
$$\left. + q\frac{\varepsilon(t)}{a} + 2\frac{\dot\varepsilon(t)}{c_2}\right], \quad (4.8)$$

$$P^-(t) = \frac{q\left(\frac{t}{t_2}\right)}{t^2}r\left(\frac{t}{t_2}\right),$$

$$q(\xi) = \frac{\gamma_5+\xi}{\sqrt{\gamma_1+\xi}}, \quad q = \frac{K_+^-(0)}{\pi}\int\limits_{-\gamma_1}^{\infty}\frac{q(\xi)}{\xi^2}r(\xi)d\xi,$$

где $r(\xi)$ из (4.2), $K_+^-(0)$ в (2.12) или приближенно в (3.5), t_2 определено в (4.7).

Составляющая $P_\infty(t)$ в (4.5), (4.6) определяется формулой

$$P_\infty(t) = \frac{\mu}{\beta}\frac{2a}{c_2}\dot\varepsilon(t). \quad (4.9)$$

Величина момента $M(t)$, удерживающего плоский штамп в строго горизонтальном положении, вычисляется по формуле

$$M(t) = \int\limits_{-a}^{a}x\varphi(x,t)dx =$$
$$= M_+(t) + M_-(t) - M_\infty(t), \quad (4.10)$$

$$M_\pm(t) = \int\limits_{-a}^{a}x\varphi^\pm(a\pm x,t)dx,$$
$$M_\infty(t) = \int\limits_{-a}^{a}x\varphi^\infty(x,t)dx, \quad (4.11)$$

где $\varphi^\pm(x,t)$ из (4.1), (4.2), а $\varphi^\infty(x,t)$ из (2.16). Вычисление квадратур в (4.11) приводит к следующим соотношениям

$$M_+(t) = \frac{\mu a^2}{\beta}\sum_{k=2}^{3}(-1)^k\left[2^{k-1}\frac{K_+^+(0)}{\pi c_2}\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{t-\gamma_4 t_2}\varepsilon(\tau)M_k^+(t-\tau)d\tau - m_k^+(t)\right], \quad (4.12)$$

$$M_k^+(t) = \frac{q\left(\frac{t}{t_2}\right)}{t^k}r\left(\frac{t}{t_2}\right), \quad k=2,3,$$

$$m_2^+(t) = \gamma_+^{+\prime}\frac{\varepsilon(t)}{a} - 2\frac{\dot\varepsilon(t)}{c_2},$$

$$m_3^+(t) = \left(\left(\gamma_+^{+\prime}\right)^2 + \frac{1}{2}\gamma_+^{+\prime\prime} + q_3\right)\frac{c_2\tilde\varepsilon(t)}{a^2} -$$
$$-\left(2\gamma_+^{+\prime} - q_2\right)\frac{\varepsilon(t)}{a} + 2\frac{\dot\varepsilon(t)}{c_2},$$

$$q_k = \frac{K_+^+(0)}{\pi}\int\limits_{\gamma_4}^{\infty}\frac{q(\xi)}{\xi^k}r(\xi)d\xi, \quad k=2,3,$$

$$\tilde\varepsilon(t) = \int\limits_0^t\varepsilon(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_+^{+\prime} = \frac{iK_+^{+\prime}(0)}{K_+^+(0)}, \quad \gamma_+^{+\prime\prime} = \frac{K_+^{+\prime\prime}(0)}{K_+^+(0)},$$

где $q(\xi)$, $r(\xi)$ вычисляются в (4.7), (4.1) соответственно, $K_+^+(0)$ и ее производные, обозначенные штрихами, вычисляются с помощью $K_+^+(u)$ из (2.10) или приближенно с помощью (3.4).

$$M_-(t) = \frac{\mu a^2}{\beta}\left[\sum_{k=2}^{3}2^{k-1}\frac{K_+^-(0)}{\pi c_2}\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{t+\gamma_1 t_2}\varepsilon(\tau)M_k^-(t-\tau)d\tau + m_k^-(t)\right], \quad (4.13)$$

$$M_k^-(t) = \frac{q\left(\frac{t}{t_2}\right)}{t^k} r\left(\frac{t}{t_2}\right), \quad k = 2, 3,$$

$$m_2^-(t) = q_2 \frac{\varepsilon(t)}{a} + 2\frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2},$$

$$m_3^-(t) = -q_3 \frac{c_2 \tilde{\varepsilon}(t)}{a^2} - 2\gamma_+^{-\prime} \frac{\varepsilon(t)}{a} + 2\frac{\dot{\varepsilon}(t)}{c_2},$$

$$q_k = \frac{K_+^-(0)}{\pi} \int\limits_{-\gamma_1}^{\infty} \frac{q(\xi)}{\xi^k} r(\xi) d\xi, \quad k = 2, 3,$$

$$\gamma_+^{-\prime} = \frac{i K_+^{-\prime}(0)}{K_+^-(0)},$$

где $q(\xi)$, $r(\xi)$ определены в (4.8), (4.2) соответственно, $K_+^-(0)$ и ее производные вычисляются с помощью $K_+^-(u)$ из (2.11) или приближенно с помощью (3.5).

В случае плоского штампа $M_\infty(t) = 0$ в (4.10).

Полученные формулы справедливы при $0 \leqslant t \leqslant 2a/c_2$ и $|x| \leqslant a$. При $t > 2a/c_1$ необходимо учитывать дифракционные волны, порождаемые угловыми точками основания штампа. Схема учета дифракционных волн при внедрении плоского штампа в упругую полуплоскость приводится в [4, 7, 9].

5. Асимптотический анализ полученных решений

Полученные формулы позволяют провести анализ контактных напряжений $\varphi(x,t)$ и смещений $v_\mp(x,t)$ на границе области контакта. Формулы (4.1), (4.2) показывают, что контактные напряжения $\varphi(x,t)$ имеют на краях $|x| = a$ области контакта корневые особенности и в их окрестности представляются в виде

$$\varphi(x,t) = \frac{C_\varphi^\pm(t)}{\sqrt{a \pm x}} + O\left(\sqrt{a \pm x}\right) \quad \text{при } x \to \mp a \pm 0, \quad (5.1)$$

$$C_\varphi^\pm(t) = \frac{\mu}{\pi\beta\sqrt{c_2}} K_+^\pm(0) \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (5.2)$$

Формулы (4.3), (4.4) позволяют составить представление о поведении вертикальных смещений $v_\mp(x,t)$ на краях области контакта $|x| = a$ и в их окрестности представляются в виде

$$v_\mp(x,t) = C_v^\pm(t)\sqrt{-(a \pm x)} + O\left(\sqrt{-(a \pm x)^3}\right) \quad \text{при } x \to \mp a \mp 0, \quad (5.3)$$

$$C_v^\pm(t) = \frac{1}{\pi K_-^\pm(0)} \int\limits_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}} d\tau \quad (5.4)$$

где интеграл в (5.4) понимается в смысле его конечной части [10]. Это условие приводит к линейной зависимости коэффициентов $C_\varphi^\pm(t)$ и $C_v^\pm(t)$, играющих существенную роль [11], например, при изучении процесса соударения плоского штампа с движущейся полуплоскостью, когда закон внедрения $\varepsilon(t)$ определяется из дифференциальных уравнений движения штампа. Обращение в ноль $C_\varphi^\pm(t) = 0$ приводит к обнулению напряжений на краях $|x| = a$ основания штампа и отрыву его от упругой среды. Время отрыва штампа от упругой среды определяется как нетривиальный корень уравнения

$$\int\limits_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 0.$$

Сила контактного воздействия штампа на упругую полуплоскость $P(t)$ (4.5)–(4.9) зависит как от смещения штампа $\varepsilon(t)$, так и от величины его скорости $\dot{\varepsilon}(t)$. Момент $M(t)$, удерживающий штамп в горизонтальном положении (4.10)–(4.13), зависит не только от $\varepsilon(t)$ и $\dot{\varepsilon}(t)$, но и от $\int\limits_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$.

В заключение заметим, что если в ИУ (1.1) функцию $K(u)$ заменить первым членом асимптотики (1.5) и предположить, что $\varphi(x,t)$ не зависит от t, то ИУ (1.1) превратится в ИУ задачи в «режиме установившихся движений» [1, 2].

Литература

1. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
2. *Белоконь А. В., Наседкин А. В.* Взаимодействие движущихся штампов с упругими и вязкоупругими телами. В кн. Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 331–348.

3. *Зеленцов В. Б., Батурина Н. Ю.* Динамика внедрения плоского штампа в горизонтально смещающуюся упругую полуплоскость / Совр. пробл. механики. Новочеркасск: Изд-во ЮРГТУ, 2011. С. 71–74.
4. *Флитман Л.М.* Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 697–705.
5. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
7. *Зеленцов В. Б.* Об ударе плоского штампа в упругую полуплоскость // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 150–161.
8. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Иностр. лит., 1962. 279 с.
9. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
10. *Виленкин Н. Я. и др.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1964. 424 с.
11. *Зеленцов В. Б.* Об ударе параболического штампа в упругую полуплоскость // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2011. №1. С. 27–33.

Ключевые слова: нестационарная динамическая, контактная задача, штамп, упругая полуплоскость, двумерное интегральное уравнение, скорость волны Релея, приближенное решение, одномерные уравнения Винера Хопфа.

Статья поступила 29 июня 2011 г.
Ростовский филиал Военной академии Ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого, г. Ростов-на-Дону