УДК 532.517

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ОДНОМЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ[1]

***Ватульян А. О.*[2], *Клевчишкина Н. В.*[3]**

ABOUT THE SINGULARITIES OF THE ONE-DIMENSIONAL SIMULATION OF BLOOD FLOW

Vatulyan A. O., Klevchishkina N. V.

On the basis of one-dimensional model the nonlinear second order differential equation is studied describing the perturbations of the radius of blood vessel walls. A solution of this equation, expressed in terms of Jacobi elliptic functions, is presented. The research of solutions depending on the speed of the wave with the corresponding graphical dependences is carried out. The linearization of the problem is implemented and the comparative analysis of linear and nonlinear models is presented.

Keywords: nonlinear waves, elasticity, soliton solution.

Введение

Задача моделирования течения жидкости в крупных кровеносных сосудах, поставленная достаточно давно, весьма актуальна и в настоящее время. Это в первую очередь связано с совершенствованием математических моделей, учетом тех или иных факторов. Течение крови в системе кровообращения в общем случае описывается трехмерными нестационарными уравнениями для вязкой неньютоновской жидкости совместно с уравнениями динамики эластичных оболочек сосудов. На практике решение таких многомерных задач сопряжено с высокими затратами вычислительных ресурсов, что влечет за собой необходимость использования упрощенных моделей для оценки интегральных гемодинамических характеристик. Одномерные модели предполагают работу с осредненными по поперечному сечению потока гемодинамическими параметрами. Многие исследователи в области гидродинамики кровообращения рассматривали задачу о движении жидкости по трубкам с тонкими эластичными стенками [1]. В течение последнего десятилетия в рамках одномерной теории было получено немало аналитических результатов, описывающих распространение возмущений в жидкости и характерные режимы течения. В [2] изучено семейство одномерных нелинейных систем, моделирующее распространение импульса в крови, с помощью численных методов проведено тестирование предложенных моделей. Дж. Т. Оттесен [3] исследовал в том числе и трубку с упругими свойствами стенки, на основе одномерной теории им были получены не только численные, но и аналитические результаты. Работа [4] посвящена исследованию движения жидкости в аксиально-симметричном сосуде, показана связь скорости волны с толщиной стенки, изучено поле течения жидкости в аорте. Бокерия Л. А., Кириллова И. В. и др. [5] решали задачу моделирования кровотока в сонной артерии человека с помощью метода конечного элемента. В ряде работ [6, 7] подчеркивается необходимость учета нелинейных эффектов, возникающих при движении крови в сосудах и определяющих особенности ее движения. Цель данной работы состоит в учете нелинейной упругости стенок крупных сосудов и оценке этого фактора.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (П596).

[2]Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой теории упругости Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

[3]Клевчишкина Надежда Владиславна, магистрант кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: klevchishkina@yandex.ru.

1. Постановка задачи

Рассматривается течение жидкости в аксиально-симметричной эластичной трубке при следующих допущениях: жидкость несжимаема, плотность стенки трубки постоянна, деформация трубки характеризуется изменением её радиуса, радиус трубки зависит от координаты и времени; деформации стенки трубки и её толщина малы по сравнению с радиусом, а характерные длины волновых процессов много больше равновесного радиуса; давление жидкости в потоке одинаково по всему сечению трубки и зависит от координаты и времени.

В работе [8] приведен вывод уравнения движения стенки трубки, основанный на принципе наименьшего действия, связывающего между собой давление в жидкости $P(x,t)$ и возмущения радиуса стенки трубки $\eta(x,t)$. В пренебрежении вязкостью материала стенки трубки и вязкостью жидкости оно имеет вид

$$P - P_e = \rho_w h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \\ - k h_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\kappa h_0}{R_0}\eta + \frac{\kappa_2 h_0}{R_0^2}\eta^2,$$

$$\kappa = \frac{E}{R_0(1-\nu^2)}, \quad \kappa_2 = \kappa_1 R_0 - 2\kappa,$$

где P_e — постоянное давление, действующее на внешнюю поверхность трубки; ν, E, ρ_w — соответственно коэффициент Пуассона, модуль Юнга и объемная плотность стенки трубки, h_0 — толщина невозмущенной стенки, R_0 — равновесный радиус трубки, k — коэффициент продольного напряжения стенки, κ — коэффициент линейной упругости, характеризующий растяжение элемента трубки, κ_1 — коэффициент нелинейной упругости (квадратичная поправка к закону Гука).

Далее будут использованы также следующие обозначения: $u = u(x,t)$ — средняя по сечению осевая компонента скорости, $S = S(x,t)$ — площадь поперечного сечения трубки, ρ — плотность жидкости, l — длина трубки, c_0 — скорость Моенса и Кортевега.

В настоящей работе на начальном этапе ограничимся анализом нелинейных волн в длинноволновом приближении и при больших числах Рейнольдса. Такое приближение является справедливым для средних и крупных артерий [9].

Система уравнений в безразмерных переменных для описания одномерного течения жидкости в аксиально-симметричной эластичной трубке при сделанных предположениях примет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (Su)}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \tag{1.2}$$

$$S = \left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^2, \tag{1.3}$$

$$P = 1 + \gamma\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \beta\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \alpha\eta + \lambda\eta^2. \tag{1.4}$$

Здесь для удобства записи введены следующие безразмерные переменные и параметры:

$$t = \frac{l}{c_0}t', \quad x = lx', \quad u = c_0 u',$$

$$\eta = \frac{R_0}{2}\eta', \quad S = \pi R_0^2 S', \quad P = P_e P',$$

$$\alpha = \frac{\rho c_0^2}{P_e}, \quad \beta = \frac{k h_0 R_0}{2 P_0 l^2},$$

$$\gamma = \frac{\rho_w h_0 R_0 c_0^2}{2 P_0 l^2}, \quad \lambda = \frac{\kappa_2 h_0}{4 P_0}.$$

Исследование представленной системы начнем с отыскания стационарных решений.

2. Отыскание стационарных решений

Введём в рассмотрение переменную $\theta = x - wt$ и будем отыскивать решения системы (1.1)–(1.4), зависящие только от переменной θ. Тогда из (1.1) получим

$$-wS' + (Su)' = 0,$$

откуда легко найти первый интеграл

$$S(u - w) = a_1. \tag{2.1}$$

Из (1.3) имеем

$$-wu' + uu' + \frac{1}{\alpha}P' = 0. \tag{2.2}$$

Первый интеграл уравнения (2.2) также легко находится и имеет вид

$$-wu + \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\alpha}P = a_2. \tag{2.3}$$

Уравнение движения (1.4) с учетом замены переменных приводится к виду

$$P = 1 + w^2\gamma\eta'' - \beta\eta'' + \alpha\eta + \lambda\eta^2. \tag{2.4}$$

Из формул (1.3) и (2.1) получим связь между осевой компонентой скорости и возмущением радиуса стенки следующего вида

$$u = w + \frac{a_1}{\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^2}.$$

Подставив последнее соотношение в (2.4) и преобразовав, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно возмущений радиуса

$$A_1\eta'' + A_2\eta + A_3\eta^2 = \\ = a_2 - \frac{1}{\alpha} + w\left(w + \frac{a_1}{\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^2}\right) - \\ - \frac{1}{2}\left(w + \frac{a_1}{\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^2}\right)^2, \quad (2.5)$$

$$A_1 = \frac{\gamma w^2 - \beta}{\alpha}, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = \frac{\lambda}{\alpha}.$$

Отметим, что коэффициенты уравнения (2.5) зависят от нескольких параметров a_1, a_2, w, существенно влияющих на структуру решения.

3. Редукция. Солитонное решение

Принимая во внимание малые возмущения радиуса стенки $\eta(x,t)$, разложим правую часть уравнения (2.5) в окрестности нуля, пренебрегая слагаемыми порядка η^3 и выше. Придем к уравнению второго порядка

$$A_1\eta'' = B_0 + B_1\eta + B_2\eta^2, \quad (3.1)$$

где

$$B_0 = a_2 - \frac{1}{\alpha} + \frac{w^2}{2} - a_1^2,$$

$$B_1 = -A_2 + a_1^2, \quad B_2 = -A_3 - \frac{5}{4}a_1^2.$$

В (3.1) сделаем замену $\eta' = p(\eta)$ и проинтегрируем это уравнение. Получим

$$A_1\frac{p^2}{2} = B_0\eta + B_1\frac{\eta^2}{2} + B_2\frac{\eta^3}{3} + a_3$$

или

$$\left(\eta'\right)^2 = \frac{2B_2}{3A_1}\eta^3 + \frac{B_1}{A_1}\eta^2 + \frac{2B_0}{A_1}\eta + \frac{2a_3}{A_1}.$$

Правая часть последнего уравнения представляет собой кубический многочлен и всегда допускает разложение на множители. Исходя из этого, запишем

$$\left(\eta'\right)^2 = \frac{2B_2}{3A_1}(\eta-\alpha_1)(\eta-\alpha_2)(\eta-\alpha_3), \quad (3.2)$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

Сделав в (3.2) замену $\eta - \alpha_3 = -\varphi$, находим, что уравнение для φ имеет вид

$$\left(\varphi'\right)^2 = \frac{2B_2}{3A_1}\varphi(\alpha_3-\alpha_2-\varphi)(\alpha_3-\alpha_1-\varphi).$$

Полагая далее $\varphi = (\alpha_3-\alpha_2)\psi^2$, получим

$$\left(\psi'\right)^2 = \frac{B_2}{6A_1}(\alpha_3-\alpha_1)\times \\ \times\left(1-\psi^2\right)\left(1-K^2\psi^2\right), \quad (3.3)$$

$$K^2 = \frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_3-\alpha_1}.$$

Уравнение $(\omega')^2 = \left(1-\omega^2\right)\left(1-K^2\omega^2\right)$ определяет эллиптическую функцию Якоби $sn(z,K)$ [10]. Решение (3.3) имеет вид

$$\psi(\theta) = sn\left(\sqrt{\frac{B_2(\alpha_3-\alpha_1)}{6A_1}}\theta, K\right),$$

таким образом,

$$\eta(x-wt) = \alpha_3 - (\alpha_3-\alpha_2)\times \\ \times sn^2\left(\sqrt{\frac{B_2(\alpha_3-\alpha_1)}{6A_1}}(x-wt), K\right).$$

Проанализируем полученное решение. Функция $sn(z,K)$ имеет две предельные формы $sn(z,0) = \sin z$ и $sn(z,1) = thz$.

Функция $sn^2(z,K)$ колеблется между нулем и единицей с периодом $2T$, где

$$T = \int_0^1 \frac{dx}{\left((1-x^2)(1-K^2x^2)\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Следовательно, $\eta(x-wt)$ колеблется между α_2 и α_3 с периодом $\frac{2T}{\sqrt{\alpha_3-\alpha_1}}$ [11]. При α_2, стремящемся к α_1, модуль K стремится к единице. В этом предельном случае решение принимает вид

$$\eta(x-wt) = \alpha_2 + (\alpha_3-\alpha_2)\times \\ \times \sec h^2\left(\sqrt{\alpha_3-\alpha_1}(x-wt)\right) \quad (3.4)$$

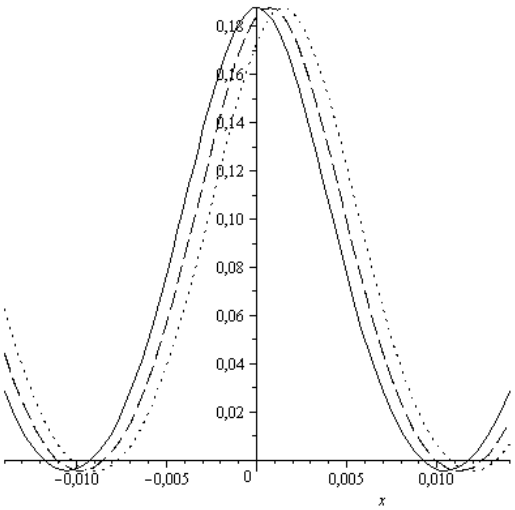

Рис. 1

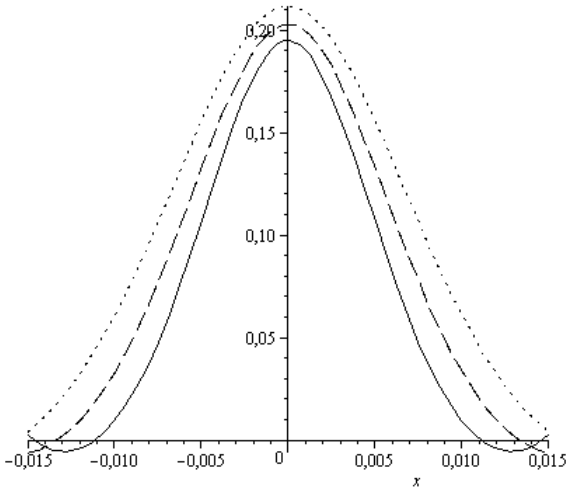

Рис. 2

и описывает импульс с полушириной $(\alpha_3 - \alpha_2)^{\frac{-1}{2}}$, амплитуда которого относительно уровня отсчета α_2 равна $\alpha_3 - \alpha_2$.

С другой стороны, когда α_3 стремится к α_2 и K становится малым, получаем стационарное решение в виде колебаний малой амплитуды. В этом предельном случае

$$\eta\,(x - wt) = \alpha_3 - (\alpha_3 - \alpha_2) \times \\ \times \sin^2\left(\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}\,(x - wt)\right). \quad (3.5)$$

Рассмотрим зависимость решения от параметра w. Здесь и далее были выбраны следующие значения параметров, отвечающие аорте собаки [1]: $P_e = 6$ кПа, $\rho_w = 1,06 \cdot 10^6$ кг/м^3, $\rho = 1,2 \cdot 10^6$ кг/м^3, $\nu = 0,499$, $E = 5 \cdot 10^5$ Н/м^2, $R_0 = 0,0065$ м, $h_0 = 6 \cdot 10^{-4}$ м, $k = 1$, $l = 0,1$ м.

В зависимости от параметра w будет меняться модуль эллиптической функции K. На рис. 1 представлены графики функции $\eta\,(x - wt)$ при различных значениях параметра t (сплошной линии соответствует $t = 0$, пунктирной — $t = 0,00015$, точечной — $t = 0,0003$) при $w = 5$.

На рис. 2 изображены графики решения в начальный момент времени при различных значениях скорости (сплошной линии соответствует $w = 5,5$, пунктирной — $w = 6$, точечной — $w = 6,5$).

Отметим, что с увеличением скорости возрастает амплитуда волны и период колебаний.

Рассмотрим случай $w = 7,5$. Тогда α_2 стремится к α_1, и решение выражается формулой (3.4) и представляет собой уединенную волну, его график при $t = 0$ имеет вид, изображенный на рис. 3.

4. Сравнение с решением линеаризованной задачи

Ранее было получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для возмущений радиуса стенки (2.5). Линеаризуем уравнение (2.5) в окрестности нуля и получим

$$A_1\eta'' = B_0 + B_1\eta.$$

Скорость распространения импульса давления при течении жидкости в эластичной трубке, полученная Моенсом и Кортевегом, имеет вид

$$\mathrm{c}_0 = \sqrt{\frac{\kappa h_0}{2\rho}}.$$

В данной работе при выбранных значениях гемодинамических параметров $\mathrm{c}_0 = 5,26$.

Сравним результаты для линейного и нелинейного случая. На рис. 4 представлен график решения линейной и нелинейной задачи в начальный момент времени.

Отметим, что линейная модель достаточно адекватно описывает поведение исследуемой функции для внешней части трубки. Представления для внутренней части трубки линейной и нелинейной задач сильно отличаются. Таким образом, учет нелинейной упругости стенки позволяет гораздо более точно описать движение жидкости в упругой трубке.

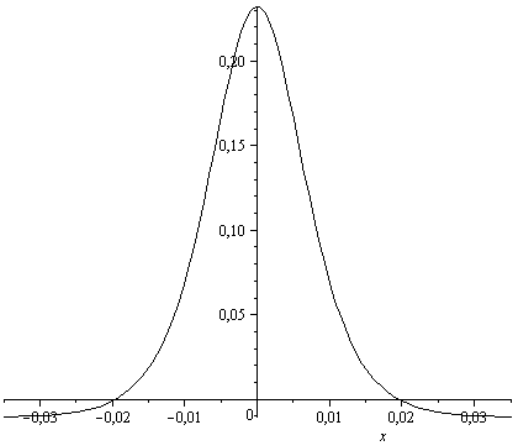

Рис. 3

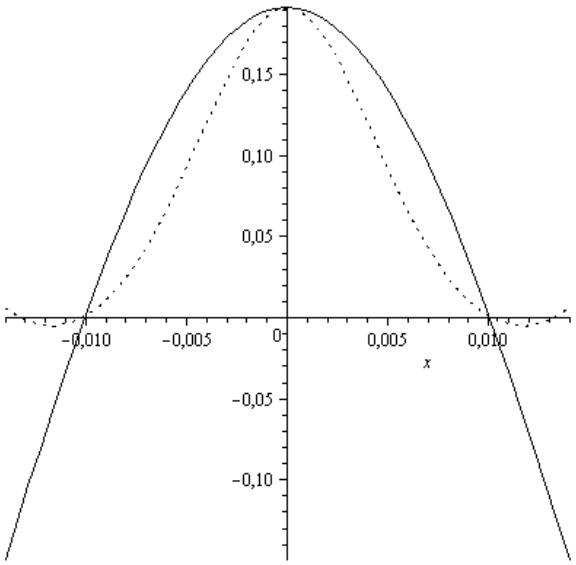

Рис. 4

Литература

1. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
2. *Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One dimensional models for blood flow in arteries // J. Eng. Math. 2003. Vol. 47, No. 3-4. P. 251–276.
3. *Ottesen J. T.* Valveless pumping in a fluid-filled closed elastic tube-system: one-dimensional theory with experimental validation // J. Math. Biol. 2003. Vol. 46. No. 4. P. 309–332.
4. *Payne S. J.* Analysis of the effects of gravity and wall thickness in a model of blood flow through axisymmetric vessels // J. Medical and Biological Engineering and Computing. 2004. Vol. 42. P. 799–806.
5. *Бокерия Л. А., Кириллова И. В., Гуляев Ю. П., Морозов К. М., Шумилина М. В., Пирцхалаишвили З. К., Каменский А. В., Ченская Ю. А., Островский Н. В.* Математическое моделирование бифуркации сонной артерии (к вопросу о распределении нагрузки в асимметричных бифуркациях) // Регионарное кровообращение и микроциркуляция. 2006. №1 (17). С. 5–12.
6. *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения. М.: Мир, 1981. 624 с.
7. *Регирер С. А.* Некоторые вопросы гидродинамики кровообращения // Гидродинамика кровообращения. М.: Мир, 1971. С. 242–264.
8. *Кудряшов Н. А., Чернявский И. Л.* Нелинейные волны при течении жидкости в вязкоэластичной трубке // Механика жидкости и газа. 2006. №1. С. 54–67.
9. *Pontrelli G.* A multiscale approach for modelling wave propagation in an arterial segment // Comput. Methods in Biomech. and Biomed. Eng. 2004. Vol. 7. No. 2. P. 79–89.
10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. 2. 295 с.
11. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1990. 294 с.

Ключевые слова: нелинейные волны, эластичность, солитонное решение.

Статья поступила 25 ноября 2011 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
© Ватульян А. О., Клевчишкина Н. В., 2011