УДК 539.3

ОДНОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ТОЛСТОСТЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЙ СФЕРЕ[1]

Вестяк В. А.[2], Тарлаковский Д. В.[3]

ONE-DIMENSIONAL TIME-DEPENDENT WAVES IN A THICK ELECTROMAGNETOELASTIC SPHERICAL SHELL

Vestyak V. A., Tarlakovsky D. V.

A method for solving time-dependent bound problems of propagation of electromagnetoelastic waves is used. The linearized problem formulation relative to initial static electromagnetic field for homogeneous isotropous medium with the absence of piezoelectric effects taking into consideration Lorentz force is presented. The solution method is described for one-dimensional problem for a spherical layer. To obtain the solution the Laplace transform of time and resolution in series, in terms of a small parameter have been used. The latter characterizes the degree of coherence between elastic properties and electromagnetic field. The example of the calculation has been introduced.

Keywords: electromagnetoelasticit, time-dependent problems, one-dimensional spherical waves, Laplace transform.

В настоящее время наименее исследованными являются нестационарные задачи для моделей, учитывающих связанность напряжено-деформированного состояния среды с полями немеханической природы. В статье [1] решена задача о распространении одномерных связанных электромагнитоупругих волн в полупространстве и плоском слое с использованием линеаризованных уравнений движения однородной изотропной электромагнитоупругой среды без учета пьезоэффектов [2–4]. Ниже этот подход модифицируется для задачи о распространении сферических волн в толстостенной сфере.

1. Постановка задачи

Рассматриваются радиальные колебания толстостенной сферы внутреннего и внешнего радиусов $r = r_0$ и $r = r_1$. Материал сферы — электромагнитоупругая среда, в которой не учитываются пьезоэффекты. Движение среды описывается линеаризованными уравнением движения с учетом силы Лоренца и уравнениями Максвелла [2] (все функции зависят от радиуса r и времени τ; точками обозначены производные по τ):

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} + \alpha\left[\rho_{e0}E + E_0\left(\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{2E}{r}\right)\right],$$

$$\gamma j = -\dot{E}, \quad j = E + \dot{u}/\gamma, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 E\right)}{\partial r} = \rho_e, \quad \ddot{E} + \gamma\dot{E} = -\rho_{e0}\ddot{u},$$

где u, j и E — радиальные компоненты векторов перемещения, плотности тока и напряженности электрического поля; ρ_e — плотность зарядов; нижние индексы «0» соответствуют начальным статическим значениям величин.

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены волной, далее этот

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (09-08-00470, 10-08-90412).

[2]Вестяк Владимир Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Московского авиационного института (Национального исследовательского университета); e-mail: vovavest@rambler.ru.

[3]Тарлаковский Дмитрий Валентинович, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой сопротивления материалов, динамики и прочности машин Московского авиационного института (Национального исследовательского университета); e-mail: tdvhome@mail.ru.

знак опущен):

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r_0}, \quad \tilde{r}_1 = \frac{r_1}{r_0},$$
$$\tilde{u} = \frac{u}{r_0}, \quad \tilde{\rho}_e = \frac{4\pi\rho_e r_0}{\varepsilon E_*},$$
$$\tilde{E} = \frac{E}{E_*}, \quad \tilde{j} = \frac{j}{\sigma E_*}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},$$
$$\alpha = \frac{\varepsilon E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad \gamma = \frac{4\pi\sigma r_0}{\varepsilon c_1},$$

где c_1 — скорость распространения упругих волн растяжения-сжатия, E_* — некоторое характерное значение напряженности электрического поля, σ — удельная проводимость, λ и μ — упругие постоянные Ламе, t — размерное время, ε — диэлектрическая проницаемость среды.

Отметим, что условием одномерности задачи является отсутствие в начальном состоянии магнитного поля. Кроме того, величины E_0 и ρ_{e0} должны быть связаны между собой вторым соотношением в (1.1).

В начальный момент времени возмущения отсутствуют, т.е. имеют место однородные начальные условия:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = E|_{\tau=0} = \dot{E}\Big|_{\tau=0} = 0. \quad (1.2)$$

Полагаем, что на внутренней поверхности сферы задано перемещение, а внешняя поверхность неподвижна

$$u|_{r=1} = U_0(\tau), \quad u|_{r=r_1} = 0. \quad (1.3)$$

Для всех других вариантов граничных условий применяемый ниже метод решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) принципиально не меняется.

2. Решение задачи в пространстве изображений

Для решения используем преобразование Лапласа по времени (s — параметр преобразования, верхний индекс L означает изображение функции) и из соотношений (1.1) с учетом условий (1.2) получаем уравнения относительно изображений премещения и напряженности электрического поля

$$\frac{\partial^2 u^L}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u^L}{\partial r} - \left(\frac{2}{r^2} + s^2\right)u^L +$$
$$+ \alpha\left[\left(\rho_{e0} + \frac{2E_0}{r}\right)E^L + E_0\frac{\partial E^L}{\partial r}\right] = 0,$$

$$s(s+\gamma)E^L = -s^2\rho_{e0}u^L.$$

Эта система сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 u^L}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} - \alpha b\rho_{e0}E_0\right)\frac{\partial u^L}{\partial r} -$$
$$- \left(\frac{2}{r^2} + s^2 + \alpha b a\right)u^L = 0, \quad (2.1)$$

$$E^L = -\rho_{e0}b(s)\,u^L,$$
$$a(r) = \rho_{e0}^2 + \frac{2E_0}{r}\rho_{e0} + E_0\frac{d\rho_{e0}}{dr}, \quad (2.2)$$
$$b(s) = \frac{s}{s+\gamma}.$$

Аналог граничных условий (1.3) в пространстве преобразований имеет вид

$$u^L\Big|_{r=1} = U_0^L(s)\,, u^L\Big|_{r=r_1} = 0. \quad (2.3)$$

Общее решение уравнения в (2.1) записывается следующим образом:

$$u^L(r,s) = \frac{1}{r^{p(s)}}\times$$
$$\times\left[C_1(s)\,K_{\nu(s)}(rs) + C_1(s)\,I_{\nu(s)}(rs)\right],$$

$$p(s) = \frac{1}{2} - \alpha\frac{E_0^2 s}{s+\gamma},$$
$$\nu(s) = \sqrt{p^2(s) + 2\left(1 + 3\alpha\frac{E_0^2 s}{s+\gamma}\right)},$$

где $K_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя, C_1 и C_2 — произвольные постоянные, которые могут быть определены из граничных условий (2.3).

Однако найти аналитически оригинал полученного таким образом изображения не представляется возможным, т.к. параметр преобразования входит в выражение для порядка функций Бесселя. Поэтому далее воспользуемся методом малого параметра. С этой целью, выбирая в качестве такового коэффициент α связи электростатического поля и поля перемещений, представляем искомые функции в виде степенных рядов

$$u(r,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(r,\tau)\,\alpha^m,$$
$$E(r,\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m(r,\tau)\,\alpha^m. \quad (2.4)$$

Как следует из соотношений (2.1) и (2.2), изображения коэффициентов этих рядов являются решением следующей рекуррентной системы уравнений:

$$e_m^L = -\rho_{e0} b(s) u_m^L, \quad m \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 u_0^L}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_0^L}{\partial r} - \left(\frac{2}{r^2} + s^2\right) u_0^L = 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2 u_m^L}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_m^L}{\partial r} - \left(\frac{2}{r^2} + s^2\right) u_m^L = f_{m-1}(r,s),$$

$$f_{m-1}(r,s) = -\left(\rho_{e0} + \frac{2E_0}{r}\right) e_{m-1}^L - E_0 \frac{\partial e_{m-1}^L}{\partial r}, \quad m \geqslant 1.$$

Соответствующие граничные условия получаем после подстановки рядов (2.4) в (2.3)

$$\begin{gathered} u_0^L\big|_{r=1} = U_0^L(s), \\ u_m^L\big|_{r=1} = 0, \quad m \geqslant 1, \\ u_m^L\big|_{r=r_1} = 0, \quad m \geqslant 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Решение уравнения (2.6) имеет вид

$$u_0^L = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[C_{01}(s) K_{3/2}(rs) + C_{02}(s) I_{3/}(rs)\right]. \tag{2.8}$$

Здесь C_{01} и C_{02} — произвольные постоянные. Определяя их из соответствующих граничных условий в (2.7), получаем следующий результат:

$$\begin{gathered} u_0^L(r,s) = D^{-1}(s) U_0^L(s) B(r_1 s, rs), \\ D(s) = B(r_1 s, s), \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$B(x,y) = R_{10}(x) R_{10}(-y) e^{y-x} - R_{10}(-x) R_{10}(y) e^{x-y}.$$

Отметим, что функция B обладает свойством

$$B(y,x) = -B(x,y). \tag{2.10}$$

В этих равенствах учтено, что функции Бесселя полуцелого порядка являются элементарными, а именно, в случае указанного в (2.8) порядка справедливы равенства [5]:

$$K_{3/2}(z) = \frac{1}{z^{3/2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} R_{10}(z) e^{-z},$$

$$I_{3/2}(z) = \frac{1}{z^{3/2}\sqrt{2\pi}}\left[R_{10}(z) e^{-z} - R_{10}(-z) e^{z}\right],$$

$$R_{10}(z) = z + 1.$$

Для того чтобы обратить полученное выражение, аналогично использованному в [1] подходу разложим функцию $D^{-1}(s)$ в ряд по экспонентам

$$\frac{1}{D(s)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^n(-sr_1) Y(s)^n}{R_{10}(-r_1 s) R_{10}(s)} e^{-\tau_{2n+2} s}, \tag{2.11}$$

$$Y(s) = \frac{R_{10}(-s)}{R_{10}(s)},$$

$$\tau_n = nh, \quad h = r_1 - 1.$$

Отметим, что этот ряд сходится в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \beta$, поскольку здесь $\left|Y(-sr_1) Y(s) e^{-2hs}\right| < 1$.

Тогда выражение (2.9) с учетом (2.11) можно переписать в виде

$$u_0^L(r,s) = \frac{s U_0^L(s)}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big[P_n^L(r,s) e^{-(\tau_{2n} - 1 + r)s} - Q_n^L(r,s) e^{-(\tau_{2n+2} + 1 - r)s}\Big], \tag{2.12}$$

где

$$P_n^L(r,s) = P_{n-1}^L(r,s) Y(-sr_1) Y(s) = P(r,s) Y^n(-sr_1) Y^n(s),$$

$$Q_n^L(r,s) = Q_{n-1}^L(r,s) Y(-sr_1) Y(s) = P(-r,s) Y^{n+1}(-sr_1) Y^n(s),$$

$$P(r,s) = P_0^L(r,s) = \frac{R_{10}(rs)}{s R_{10}(s)},$$

$$Q_0^L(r,s) = P(-r,s) Y(-sr_1).$$

Последующие коэффициенты в разложениях (2.3) находим, используя интегральное представление для перемещений

$$u_m^L = \int_1^{r_1} G_s^L(r,\xi,s) f_m(\xi,s) \, d\xi. \tag{2.13}$$

Здесь $G_s^L(r,\xi,s)$ — функция Грина, удовлетворяющая краевой задаче ($\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака):

$$\frac{\partial^2 G_s^L}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial G_s^L}{\partial r} - \left(\frac{2}{r^2} + s^2\right) G_s^L = \delta(r - \xi), \tag{2.14}$$

$$G_s^L\big|_{r=1} = 0, \; G_s^L\big|_{r=r_1} = 0. \tag{2.15}$$

Решение уравнения (2.14) представляем в виде суммы общего решения и частного решения G_{s*}^L

$$G_s^L(r,\xi,s) = G_{s*}^L(r,\xi,s) + \\ + \frac{1}{\sqrt{r}}\left[C_1(\xi,s)K_{3/2}(rs) + \right. \\ \left. + C_2(\xi,s)I_{3/2}(rs)\right].$$

Функцию G_{s*}^L находим методом вариации произвольных постоянных ($H(\xi)$ — функция Хевисайда)

$$G_{s*}^L(r,\xi,s) = \\ = \frac{1}{\sqrt{r}}\left[D_1(r,\xi,s)K_{3/2}(rs) + \right. \\ \left. + D_2(r,\xi,s)I_{3/2}(rs)\right],$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial r}(r,\xi,s) = -\xi^{3/2}I_{3/2}(\xi s)\,\delta(r-\xi),$$
$$\frac{\partial D_2}{\partial r}(r,\xi,s) = \xi^{3/2}K_{3/2}(\xi s)\,\delta(r-\xi),$$
$$D_1(r,\xi,s) = -\xi^{3/2}I_{3/2}(\xi s)\,H(r-\xi),$$
$$D_2(r,\xi,s) = \xi^{3/2}K_{3/2}(\xi s)\,H(r-\xi).$$

Определяя теперь постоянные интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (2.15) и учитывая соотношения (2.10), получаем выражение для функции Грина

$$G_s^L(r,\xi,s) = \frac{1}{2r^2s^3}\left[\tilde{G}_s^L(r,\xi,s)H(\xi-r) + \right. \\ \left. + \tilde{G}_s^L(\xi,r,s)H(r-\xi)\right], \quad (2.16)$$

$$\tilde{G}_s^L(r,\xi,s) = D^{-1}(s)B(rs,s)B(r_1s,\xi s).$$

Формулу (2.13) для дальнейшего использования удобно с учётом равенства для функции $f_m(r,s)$ в (2.6) и интегрирования по частям привести к следующему виду:

$$u_m^L = -\int_1^{r_1} G_{s1}^L(r,\xi,s)\times \\ \times E_0(\xi,s)\,e_{m-1}^L(\xi,s)\,d\xi, \quad (2.17)$$

$$G_{s1}^L(r,s,\xi) = \frac{4}{\xi}G_s^L - \frac{\partial G_s^L}{\partial \xi}.$$

Ядро свертки в (2.17) в соответствии с (2.16) и (2.10) имеет вид

$$G_s^L(r,\xi,s) = \frac{\xi}{2r^2}\left[\tilde{G}_{s1}^L(r,\xi,s)H(\xi-r) + \right. \\ \left. + \tilde{G}_{s1}^L(\xi,r,s)H(r-\xi)\right], \quad (2.18)$$

$$\tilde{G}_{s1}^L(r,\xi,s) = s^{-3}D^{-1}(s)B(rs,s)B_1(r_1s,\xi s),$$

$$B_1(x,y) = R_{10}(x)R_2(-y)e^{y-x} - \\ - R_{10}(-x)R_2(y)e^{x-y},$$

$$R_2(z) = R_{20}(z) - R_{10}(z),$$
$$R_{20}(z) = z^2 + 3z + 3.$$

При этом множитель при функции Хевисайда в (2.18) аналогично (2.12) можно представить в виде ряда

$$\tilde{G}_{s1}^L(r,\xi,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{4} V_{kn}^L(r,\xi,s)e^{\omega_{kn}s}, \quad (2.19)$$

где

$$V_{1n}^L = s^{-3}R_{10}(-rs)R_2(\xi s)Y^n(-r_1s)Y^n(s),$$

$$V_{2n}^L = -s^{-3}R_{10}(rs)R_2(\xi s)Y^n(-r_1s)Y^{n+1}(s),$$

$$V_{3n}^L = -s^{-3}R_{10}(-rs)R_2(-\xi s)Y^{n+1}(-r_1s)Y^n(s),$$

$$V_{4n}^L = s^{-3}R_{10}(rs)R_2(-\xi s)Y^{n+1}(-r_1s)Y^{n+1}(s),$$

$$\omega_{1n} = \tau_{2n+1} + \xi - r,\ \omega_{2n} = \tau_{2n+1} - 2 + \xi + r,$$

$$\omega_{3n} = \tau_{2n+3} + 2 - \xi - r,\ \omega_{4n} = \tau_{2n+3} - \xi + r.$$

Далее построим алгоритм вычисления оригиналов коэффициентов рядов (2.12) и (2.19)

3. Переход в пространство оригиналов

Сначала рассмотрим множители перед экспонентами в ряде (2.12). Поскольку каждый из них имеет одинаковую структуру в виде рациональной функции параметра s преобразования, ограничимся алгоритмом построения оригинала функции P_n^L. Ее особые точки — полюсы $s_1 = 1/r_1$ (кратность n), $s_2 = -1$ (кратность $n+1$), а также все полюсы функции U_0^L (для определенности положим, что она имеет один полюс s_0). Поэтому оригинал может быть вычислен следующим образом:

$$P_n(r,\tau) = \sum_{i=0}^{2}\mathop{res}_{s=s_i} P_n^L(r,s)\,e^{s\tau}. \quad (3.1)$$

Вычет функции в точке $s = s_1$, аналогично работе [5], вычисляем с помощью формулы Лейбница

$$\underset{s=s_1}{res}\, P_n^L e^{s\tau} = \frac{1}{(n-1)!}\times$$
$$\times \lim_{s\to s_1} \frac{d^{(n-1)}}{ds^{(n-1)}} \left[(s-s_1)^n P_n^L(r,s)\, e^{s\tau}\right] =$$
$$= \frac{(-1)^n}{(r_1)^n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_{n-1-i}^n r + b_{n-1-i}^n\right) \frac{\tau^i}{i!} e^{\tau s_1}.$$

Здесь коэффициенты a_k^n и b_k^n имеют вид

$$a_k^n = \frac{1}{k!} \lim_{s\to s_1} \frac{d^k}{ds^k} \frac{(sr_1+1)^n (1-s)^n}{(1+s)^{n+1}},$$
$$b_k^n = \frac{1}{k!} \lim_{s\to s_1} \frac{d^k}{ds^k} \frac{(sr_1+1)^n (1-s)^n}{s\,(1+s)^{n+1}}.$$

Они находятся с помощью рекуррентных соотношений, которые также строятся с использованием формулы Лейбница. Например, для a_k^n справедливы следующие равенства:

$$a_k^n = \sum_{j=0}^{k} h_j a_{k-j}^{n-1},$$
$$h_j = \frac{(-1)^{j-1}(r_1-1)}{(1+s_1)^{j+1}}, \tag{3.2}$$
$$a_k^0 = \frac{(-1)^k}{(1+s_1)^{k+1}}.$$

Вычеты в точках $s = s_0, s_2$ вычисляются аналогичным образом.

Окончательное выражение для оригинала функции в (2.12) имеет следующий вид (символ «*» означает свертку по времени):

$$u_0(r,\tau) = r^{-2}\dot{U}_0(\tau) * S(r,\tau),$$

$$S(r,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[P_n(r,\tau-r+1-\tau_{2n})\times$$
$$\times H(\tau-r+1-\tau_{2n}) -$$
$$- Q_n(r,\tau-1+r-\tau_{2n+2})\times$$
$$\times H(\tau-1+r-\tau_{2n+2})\Big], \tag{3.3}$$

где $Q_n(r,\tau)$ — оригинал функции $Q_n^L(r,s)$.

Алгоритм, подобный (3.1)–(3.3), может быть применен и для коэффициентов ряда (2.19). Однако при этом необходимо учесть, что $V_{kn}^L(r,\xi,s)$ являются неправильными рациональными дробями параметра s (степени числителя и знаменателя совпадают), и представить эти функции следующим образом:

$$V_{kn}^L(r,\xi,s) = (-1)^k r\xi^2 + \tilde{V}_{kn}^L(r,\xi,s),$$
$$\tilde{V}_{kn}^L(r,\xi,s) = V_{kn}^L(r,\xi,s) - (-1)^k r\xi^2.$$

Тогда оригиналы функций $V_{kn}^L(r,\xi,s)$ имеют вид

$$V_{kn}(r,\xi,\tau) = (-1)^k r\xi^2\delta(\tau) + \tilde{V}_{kn}(r,\xi,\tau),$$
$$\tilde{V}_{kn}(r,\xi,\tau) = \sum_{i=1}^{2} \underset{s=s_i}{res}\, V_{kn}^L(r,\xi,s)e^{\tau s}.$$

Окончательно из (2.17) при $m \geqslant 1$ получаем равенство

$$u_m = -\int_1^{r_1} E_0(\xi)\, G_{s1}(r,\tau,\xi) *$$
$$* e_{m-1}(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{3.4}$$

Кроме того, из (2.5) находим представления для коэффициентов $e_m(r,\tau)$ второго ряда в (2.4)

$$E_m(r,\tau) = -\rho_{e0}\big[u_m(r,\tau) -$$
$$- u_m(r,\tau) * e^{-\gamma\tau}\big]. \tag{3.5}$$

Отметим важную особенность выражений (2.12) и (2.18): в пространстве оригиналов эти ряды являются конечными суммами для любых конечных моментов времени τ.

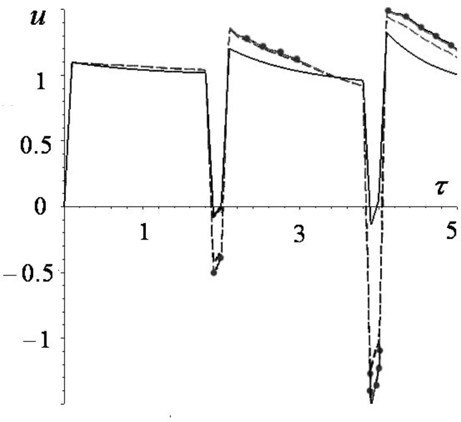
4. Пример расчетов

В качестве примера рассмотрим алюминиевую толстостенную сферу единичной толщины $h = 1$ со следующими физическими характеристиками [6]:

$$\varepsilon = 1,05\cdot 10^4 \text{ ф/м}, \quad \mu = 26,3 \text{ ГПа},$$
$$\lambda = 51,1 \text{ ГПа}, \quad \rho = 2698,9 \text{ кг/м}^3,$$
$$\sigma = 27\cdot 10^6 \ (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}.$$

Эти величины при $r_0 = 1$ м и $E_* = 1$ в/м соответствуют следующим безразмерным параметрам:

$$\alpha = 0,5, \quad \gamma = 0,566.$$



Перемещения в точке $r = 1,2$: Сплошная линия соответствует $N = 1$, пунктирная — $N = 2$, линия с точками — $N = 3$.

Начальные характеристики электрического поля и перемещение внутренней поверхности в граничных условиях (1.3) принимаем в виде

$$\rho_{e0} = \frac{2}{\sqrt{r}}, E_0 = \sqrt{r}, U_0 = H(\tau).$$

При этом $U_0^L = s^{-1}$, что соответствует полюсу $s_0 = 0$ в формуле (3.1).

При расчётах для вычисления интегралов в (3.4) и (3.5) использовались квадратурные формулы. Соответствующие результаты для различного числа N членов частичных сумм рядов в (2.4) приведены на рисунке. Они свидетельствуют о том, что ряды по малому параметру сходятся достаточно быстро. Так в рассмотренном примере достаточно ограничиться первыми четырьмя членами для перемещений (соответствующая кривая практически совпадает с графиком при $N = 3$).

Заключение

Таким образом, построен алгоритм решения одномерных задач электромагнитоупругости в сферических координатах. Проведенные расчеты показывают, что предложенный алгоритм решения является эффективным.

Литература

1. *Вестяк В. А., Лемешев В. А., Тарлаковский Д. В.* Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое // ДАН. 2009. Т. 426, №6. С. 747–749.
2. *Вестяк В. А., Тарлаковский Д. В.* Линейные уравнения движения термоэлектромагнитоупругой среды // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць Дніпропетр. націон. ун-та. Дніпропетровськ: IMA-прес. 2009. Вип. 10. С. 57–62.
3. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. Учебник. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 287 с.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. В 2-х т. М.: Наука, 1973.
5. *Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 264 с.
6. *Григорьев И. С., Мейлихов Е. З.* Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991, 1232 с.

Ключевые слова: электромагнитоупругость, нестационарные задачи, одномерные сферические волны, преобразование Лапласа.

Статья поступила 28 ноября 2011 г.
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва