

УДК 539.3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СРЕД С СОВОКУПНОСТЬЮ ДЕФЕКТОВ¹*Колесников М. Н.², Павлова А. В.³***DIFFERENTIAL FACTORIZATION METHOD IN THE STUDY OF THE DYNAMICS OF ELASTIC MEDIA WITH A SET OF DEFECTS***Kolesnikov M. N., Pavlova A. V.*

One of the approaches to the study of stress-strain state of geological structures based on the differential method of factorization is considered. A method of studying the dynamic problems for packet of elastic layers with inhomogeneities of different nature is discussed.

Keywords: differential factorization method, layered medium, virus of vibration strength, inhomogeneity.

Несмотря на значительные усилия и очевидные успехи, проблема оценки сейсмичности далека от полного решения. Это объясняется чрезвычайной сложностью рассматриваемой системы и указывает на необходимость разработки новых методов ее исследования. Природа сил, формирующих напряженное состояние на разных масштабных уровнях, может быть различной. В последние десятилетия появилось множество доказательств, позволяющих говорить о постоянных изменениях, происходящих на поверхности и в глубинах Земли не только в сейсмоактивных районах, но и в равнинно-платформенных областях [1]. Сейсмические события происходят и в удаленных от глобальных разломов зонах, что указывает на определенную роль разломов сравнительно малой мощности и необходимость анализировать и мелкомасштабные особенности при изучении предпосылок сейсмического события. Это одна из причин усиления внимания исследователей в различных областях науки к изменению напряженно-деформированного состояния верхней части земной коры.

Другая очевидная причина повышения интереса к изучению напряженно-деформированного состояния литосферных структур — масштабы промышленной дея-

тельности человека, связанной с отбором углеводородов из глубинных зон Земли, взрывами большой мощности, имеющими место в очагах военных действий, и т.д., создающие так называемые наведенные геомеханические процессы, способные вызвать техногенные катастрофы. Несмотря на редкие проявления сейсмичности в виде техногенных землетрясений, нанесенный ими экологический ущерб может быть велик. Реакция земной коры на внешние воздействия зависит не только от их интенсивности, но и от энергонасыщенности ее структур, величины и распределения напряжений в ней. Неоднородность геологической среды, проявляющаяся в виде естественных структурных нарушений (тектонические разломы, множественные включения и трещины разного масштаба и т.д.), определяет ее деформационные и прочностные свойства, играющие важную роль в формировании отклика на внешние воздействия. Под действием внешних сил на неоднородности литосферной плиты могут активизироваться процессы, приводящие к появлению зон разуплотнения (дилатансных зон). Зарождение и развитие зон дилатансии, имеющие место на этапе подготовки региональных сейсмических событий, можно связывать с активизацией «вирусов» вибропроч-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (10-08-00289, 11-08-96505 p_юг).

²Колесников Максим Николаевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета, e-mail: koles_max@rambler.ru.

³Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

ности — совокупностей неоднородностей различной природы (трещин и включений) [1].

Создание теории сейсмического процесса связано с установлением закономерностей деформационных процессов корового уровня. Верхняя часть земной коры, где сосредоточена деятельность человека, является практически важным объектом изучения. Особое внимание в настоящее время уделяется воздействию техногенных источников, например, слабых, но продолжительных по времени механических вибраций (автомобильные и железные дороги, промышленные комплексы), способных приводить к резонансным явлениям на некоторых элементах земной коры [3].

Одним из методов, позволяющих исследовать «вирусы» вибропрочности, является метод факторизации [4, 5]. Дифференциальный метод факторизации для краевой задачи в области Ω представляет собой обобщение метода интегральных преобразований. Системы дифференциальных уравнений в частных производных, которые могут быть исследованы с помощью дифференциального метода факторизации, являются весьма общими. В работах [4–6] метод применяется для задач в выпуклой области, в случае областей более сложной формы следует ввести блочную структуру, разбивая области сеткой на выпуклые блоки и применяя тот же подход [7].

Слоистость — один из важнейших признаков, свойственный в первую очередь большинству осадочных горных пород. Первичное залегание слоев и пластов обычно является горизонтальным. Поэтому слоистая упругая среда часто рассматривается в качестве модели геологической структуры. В настоящей работе метод факторизации применен к совокупностям плоских жестких включений и полостей-трещин, расположенных на параллельных плоскостях в слоистой структурированной среде, а также их комбинациям.

В прямоугольной декартовой системе координат, где плоскость x_1Ox_2 параллельна поверхности среды ($x_3 = h_{N+1} \geq 0$, $-\infty < x_1, x_2 < +\infty$), а ось Ox_3 направлена вверх, рассматривается задача об установившихся гармонических колебаниях пакета из N параллельных слоев, ограниченных плоскостями $x_3 = h_k$, $x_3 = h_{k+1}$ ($k = \overline{1, N}$), жестко сцепленного с недеформируемым основа-

нием. Каждый слой имеет свои характеристики: плотность ρ_k , постоянные Ляме λ_k , μ_k .

Предполагается, что на граничных поверхностях слоев $x_3 = h_n$, $n = k - 1$, k действуют напряжения с амплитудами

$$\tau_n = \{\tau_{n1}, \tau_{n2}, \tau_{n3}\},$$

$$\tau_n(x_1, x_2, h_n) = \{\sigma_{ij}n_j\}|_{x_3=h_n}.$$

Амплитуды перемещений точек поверхностей определяются векторами $\mathbf{u}_n = \{u_{n1}, u_{n2}, u_{n3}\}$. Используя прямой дифференциальный метод факторизации, удобный для областей с плоскими границами, построены функциональные уравнения для слоя: $-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty$, $h_{k-1} \leq x_3 \leq h_k$. В случае однородного изотропного слоя к тем же соотношениям, являющимся своеобразной формой записи граничных интегральных уравнений, приводит использование теоремы Бетти [8]. Однако дифференциальный метод факторизации демонстрирует более общий подход, так как переход к уравнениям для анизотропных и электроупругих сред требует дополнительных усилий по построению аналогов формулы Бетти.

Для слоя с плоскими границами матричные соотношения, связывающие интегральные характеристики перемещений и напряжений на границах, запишутся

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{k-1,k-1}^{\pm} \mathbf{U}_{k-1} - \mathbf{L}_{k,k-1}^{\pm} \mathbf{U}_k &= \\ &= \mathbf{D}_{k-1,k-1}^{\pm} \mathbf{T}_{k-1} - \mathbf{D}_{k,k-1}^{\pm} \mathbf{T}_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\mathbf{U}_k = \{U_{kj}\}, \quad U_{kj}(\alpha_1, \alpha_2) = Vu_j(x_1, x_2, h_k);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k &= \{T_{kj}\}, \quad T_{kj}(\alpha_1, \alpha_2) = V\tau_j(x_1, x_2, h_k), \\ j &= \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Матрицы $\mathbf{L}_{l,k-1}^+$ и $\mathbf{D}_{l,k-1}^+$, $l = k - 1$, k , отражают вклад волн, распространяющихся в слое вверх, а матрицы $\mathbf{L}_{l,k-1}^-$ и $\mathbf{D}_{l,k-1}^-$ — соответственно вниз. Здесь использованы обозначения работ [10, 11], второй индекс у матриц $\mathbf{L}_{l,k-1}^{\pm}$ и $\mathbf{D}_{l,k-1}^{\pm}$ введен для указания на номер слоя, совпадающего с номером его нижней границы.

Для пакета из N слоев соотношения (1) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{k-1,k-1}^{\pm} \mathbf{U}_{k-1} - \mathbf{L}_{k,k-1}^{\pm} \mathbf{U}_k &= \\ &= \mathbf{D}_{k-1,k-1}^{\pm} \mathbf{T}_{k-1} - \mathbf{D}_{k,k-1}^{\pm} \mathbf{T}_k, \\ k &= \overline{2, N+1}. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{U}_n^\pm$, $\mathbf{T}_n^\pm$ — двумерные преобразования Фурье функций

$$\mathbf{u}_n^\pm = \mathbf{u}(x_1, x_2, h_n \pm 0),$$

$$\boldsymbol{\tau}_n^\pm = \boldsymbol{\tau}(x_1, x_2, h_n \pm 0),$$

полагается $\mathbf{U}_{N+1}^- \equiv \mathbf{U}_{N+1}$, $\mathbf{U}_1^+ \equiv \mathbf{U}_1$, аналогично $\mathbf{T}_{N+1}^- \equiv \mathbf{T}_{N+1}$, $\mathbf{T}_1^+ \equiv \mathbf{T}_1$. В отсутствие нарушений сплошности контакта $\mathbf{T}_n^+ = \mathbf{T}_n^- \equiv \mathbf{T}_n$, $\mathbf{U}_n^+ = \mathbf{U}_n^- \equiv \mathbf{U}_n$ ($n = \bar{2}, \bar{N}$).

С помощью возможных представлений для $\mathbf{D}_{l,k-1}^\pm$ и $\mathbf{L}_{l,k-1}^\pm$ [12] вводятся матрицы специального вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{k-1}^\pm = & \left((\mathbf{L}_{k-1,+})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\mp 1} \mathbf{L}_{k-1,+} - \right. \\ & \left. - (\mathbf{L}_{k-1,-})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\pm 1} \mathbf{L}_{k-1,-} \right)^{-1} \times \\ & \times \left((\mathbf{L}_{k-1,+})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\mp 1} \mathbf{D}_{k-1,+} - \right. \\ & \left. - (\mathbf{L}_{k-1,-})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\pm 1} \mathbf{D}_{k-1,-} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{k-1}^\pm = & - \left((\mathbf{L}_{k-1,+})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\mp 1} \mathbf{L}_{k-1,+} - \right. \\ & \left. - (\mathbf{L}_{k-1,-})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\pm 1} \mathbf{L}_{k-1,-} \right)^{-1} \times \\ & \times \left((\mathbf{L}_{k-1,+})^{-1} \mathbf{D}_{k-1,+} - (\mathbf{L}_{k-1,-})^{-1} \mathbf{D}_{k-1,-} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{k-1}^\pm = & \left((\mathbf{D}_{k-1,+})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\mp 1} \mathbf{D}_{k-1,+} - \right. \\ & \left. - (\mathbf{D}_{k-1,-})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\pm 1} \mathbf{D}_{k-1,-} \right)^{-1} \times \\ & \times \left((\mathbf{D}_{k-1,+})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\mp 1} \mathbf{L}_{k-1,+} - \right. \\ & \left. - (\mathbf{D}_{k-1,-})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\pm 1} \mathbf{L}_{k-1,-} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{k-1}^\pm = & - \left((\mathbf{D}_{k-1,+})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\mp 1} \mathbf{D}_{k-1,+} - \right. \\ & \left. - (\mathbf{D}_{k-1,-})^{-1} \mathbf{J}_{k-1}^{\pm 1} \mathbf{D}_{k-1,-} \right)^{-1} \times \\ & \times \left((\mathbf{D}_{k-1,+})^{-1} \mathbf{L}_{k-1,+} - (\mathbf{D}_{k-1,-})^{-1} \mathbf{L}_{k-1,-} \right), \end{aligned}$$

где $\mathbf{J}_{k-1}$ — диагональные матрицы,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{k-1} &= \\ &= \{ e^{i\alpha_{31,k-1}H_{k-1}}, e^{i\alpha_{32,k-1}H_{k-1}}, e^{i\alpha_{32,k-1}H_{k-1}} \}, \end{aligned}$$

$H_{k-1} = h_k - h_{k-1}$ — толщина слоя с номером $k-1$.

На основе полученных соотношений для слоя с использованием элементов алгоритма, предложенного в [9], можно построить матрицы Грина для пакета слоев и слоистого полупространства, подверженных поверхностному воздействию. Кроме того, эти соотношения могут быть использованы для построения функционально-матричных соотношений, соответствующих различным случаям расположения дефектов типа трещин и жестких включений в слоистой структурированной среде. Дефекты могут присутствовать как в плоскостях раздела слоев, так и внутри слоев, поверхность пакета подвергается воздействию штампа или системы штампов. На поверхности в области контакта со штампами задаются смещения, на остальной части поверхности ставится условие отсутствия напряжений. Плоскости дефектов и плоскости раздела физико-механических свойств рассматриваются как блокообразующие границы. Если дефект находится внутри одного из слоев, свойства двух введенных блоков, граничащих в плоскости дефекта, полагаются одинаковыми.

На стыках слоев-блоков в областях, занятых трещинами, напряжения считаются заданными, ставится условие равенства напряжений на берегах разрезов. На остальной части плоскости раздела ставится условие идеального контакта. Далее считается, что во всех плоскостях раздела слоев на высотах h_n , $n = \bar{2}, \bar{N}$ имеются полости-трещины, занимающие односвязные области Ω_{jn} ($j = \bar{1}, M_n$) с кусочно-гладкими границами. Сформулированные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} x_3 &= h_{N+1} : \\ \mathbf{u}_{N+1} &= \mathbf{u}_{N+1}^0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{N+1}; \\ \boldsymbol{\tau}_{N+1} &= 0, \quad (x_1, x_2) \notin \Omega_{N+1}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= h_1 : \\ \mathbf{u}_1 &= 0, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= h_n : \\ \boldsymbol{\tau}_{jn} &= \boldsymbol{\tau}_{jn}^- = \boldsymbol{\tau}_{jn}^+, \quad (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}_{jn}; \\ \mathbf{u}_{jn}^* &= \mathbf{u}_{jn}^+ - \mathbf{u}_{jn}^- = 0, \quad (x_1, x_2) \notin \bigcup_{j=1}^{M_n} \tilde{\Omega}_{jn}, \\ & n = \bar{2}, \bar{N}. \end{aligned}$$

В многослойной среде, жестко сцепленной с недеформируемым основанием, реализован «вирус» вибропрочности класса

(1,2) $V(1/h_1; \infty/h_{N+1}; \Omega_{N+1}/2/h_2; \tilde{\Omega}_2/\dots/h_N; \tilde{\Omega}_N/h_{N+1}; \Omega_{N+1}^-)$, где Ω_{N+1}^- — дополнение Ω_{N+1} до всей плоскости [2, 13].

Используя введенные обозначения функционально-матричные соотношения для рассматриваемой задачи можно записать следующим образом:

$$\mathbf{K}^* \mathbf{U}^* = \tilde{\mathbf{T}}. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} &= \{\mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_N, \mathbf{U}_{N+1}^0\}, \\ \mathbf{U}^* &= \{\mathbf{U}_2^*, \dots, \mathbf{U}_N^*, \mathbf{T}_{N+1}\}, \\ \mathbf{U}_l^* &= \iint_{\tilde{\Omega}_l} \mathbf{u}_{jl}^*(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2, \\ \tilde{\Omega}_l &= \bigcup_{j=1}^{M_n} \tilde{\Omega}_{jl}, \quad l = \overline{2, N}. \end{aligned}$$

Блоки матрицы $\mathbf{K}^*$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{NN}^* &= \mathbf{K}_N, \quad \mathbf{K}_{Nj}^* = \prod_{l=N}^{j+1} \mathbf{B}_l^- \mathbf{H}_l^{-1}, \\ \mathbf{K}_{iN}^* &= (-1)^{N-i} \prod_{l=i+1}^N \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{B}_l^+, \\ i, j &= \overline{1, N-1}; \\ \mathbf{K}_{N-1, N-1}^* &= \mathbf{H}_{N-1}^{-1}, \\ \mathbf{K}_{N-1, j}^* &= \mathbf{K}_{N-1, N-1}^* \prod_{l=N-1}^{j+1} \mathbf{B}_l^- \mathbf{H}_l^{-1}, \\ \mathbf{K}_{i, N-1}^* &= \\ &= (-1)^{N-1-i} \left(\prod_{l=i+1}^{N-1} \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{B}_l^+ \right) \mathbf{K}_{N-1, N-1}^*, \\ i, j &= \overline{1, N-2}; \\ \mathbf{K}_{ii}^* &= \mathbf{H}_{i+1}^{-1} - \mathbf{H}_{i+1}^{-1} \mathbf{B}_{i+1}^+ \mathbf{K}_{i+1, i+1}^* \mathbf{B}_{i+1}^- \mathbf{H}_{i+1}^{-1}, \\ i &< N-1; \\ \mathbf{K}_{i, j}^* &= \mathbf{K}_{i, j+1}^* \mathbf{B}_{j+1}^- \mathbf{H}_{j+1}^{-1} \text{ для } j < i < N-1, \\ \mathbf{K}_{i, j}^* &= -\mathbf{H}_{i+1}^{-1} \mathbf{B}_{i+1}^+ \mathbf{K}_{i+1, j}^* \text{ для } i < j < N-1; \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{S}_1^+, \quad \mathbf{H}_{l+1} = \mathbf{S}_{l+1}^+ - \mathbf{K}_l; \quad \mathbf{K}_N \text{ — матрица Грина пакета из } N \text{ слоев без дефектов.} \end{aligned}$$

Перемещения $\mathbf{U}_i^-$ на границах раздела слоев могут быть определены через скачки перемещений

$$\mathbf{W}^* \mathbf{U}^* = \mathbf{U}, \quad (5)$$

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_2^-, \dots, \mathbf{U}_N^-\},$$

$$\mathbf{W}_{ij}^* = \mathbf{K}_i \mathbf{K}_{ij}^* \text{ для } i \leq j,$$

$$\mathbf{W}_{ij}^* = \prod_{l=i}^{j+1} \mathbf{B}_l^- \mathbf{H}_l^{-1} + \mathbf{K}_i \mathbf{K}_{ij}^* \text{ для } j < i < N.$$

Матрицы $\mathbf{K}_{ij}^*$, $\mathbf{W}_{ij}^*$ в (4), (5) определяют соответственно напряжения и перемещения в плоскости $x_3 = h_{i+1}$, вызванные скачком перемещений на границах трещины, расположенной в плоскости $x_3 = h_{j+1}$.

На основе (1) получены функционально-матричные соотношения для различных случаев расположения дефектов типа жестких включений в упругой среде. Пусть на верхней и нижней поверхностях пакета слоев заданы соответственно условия (2), (3), условия на блокообразующих границах ($n = \overline{2, N}$) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x_3 &= h_n : \\ \mathbf{u}_{jl} &= \mathbf{u}_{jl}^+ = \mathbf{u}_{jl}^-, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{jl}; \\ \tau_{jl}^* &= \tau_{jl}^+ - \tau_{jl}^- = 0, \quad (x_1, x_2) \notin \bigcup_{j=1}^{N_l} \Omega_{jl}, \\ j &= \overline{1, N_l}. \end{aligned}$$

В многослойной среде, жестко сцепленной с недеформируемым основанием, реализован «вирус» вибропрочности класса (1,2) $V(1/h_1; \infty/h_2; \Omega_2/\dots/h_{N+1}; \Omega_{N+1}/2/h_2; \Omega_2^-/\dots/h_{N+1}; \Omega_{N+1}^-)$ [2, 13].

Перемещения на границах раздела слоев могут быть выражены через скачки напряжений на включениях

$$\mathbf{R} \mathbf{T}^* = \mathbf{U}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \{\mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_{N+1}^0\}, \\ \mathbf{T}^* &= \{\mathbf{T}_2^*, \dots, \mathbf{T}_N^*, \mathbf{T}_{N+1}\}, \\ \mathbf{T}_l^* &= \iint_{\Omega_l} \tau_{jl}^*(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2, \\ \Omega_l &= \bigcup_{j=1}^{N_l} \Omega_{jl}, \quad l = \overline{2, N}. \end{aligned}$$

Напряжения $\mathbf{T}_i^-$ на границах раздела слоев могут быть определены через скачки напряжений на границах включений

$$\mathbf{W}\mathbf{T}^* = \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_2^-, \dots, \mathbf{T}_N^-\}$, блоки матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{W}$ имеют вид

$$\mathbf{R}_{NN} = \mathbf{K}_N^{-1},$$

$$\mathbf{R}_{Nj} = (-1)^{N-1-j} \mathbf{K}_N^{-1} \prod_{l=N}^{j+1} \mathbf{F}_l^- \mathbf{H}_l^{-1},$$

$$\mathbf{R}_{iN} = \left(\prod_{l=i+1}^N \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{F}_l^+ \right) \mathbf{K}_N^{-1},$$

$$i, j = \overline{1, N-1};$$

$$\mathbf{R}_{N-1, N-1} = \mathbf{H}_N^{-1} \mathbf{F}_N^+ \mathbf{K}_N^{-1} \mathbf{F}_N^- \mathbf{H}_N^{-1} - \mathbf{H}_N^{-1},$$

$$\mathbf{R}_{N-1, j} = (-1)^{N-1-j} \mathbf{R}_{N-1, N-1} \prod_{l=N-1}^{j+1} \mathbf{F}_l^- \mathbf{H}_l^{-1},$$

$$\mathbf{R}_{ii} = -\mathbf{H}_{i+1}^{-1} \mathbf{F}_{i+1}^+ \mathbf{R}_{i+1, i+1} \mathbf{F}_{i+1}^- \mathbf{H}_{i+1}^{-1} - \mathbf{H}_{i+1}^{-1},$$

$$i < N-1;$$

$$\mathbf{R}_{i, N-1} = \left(\prod_{l=i+1}^{N-1} \mathbf{H}_l^{-1} \mathbf{F}_l^+ \right) \mathbf{R}_{N-1, N-1},$$

$$i, j = \overline{1, N-2};$$

$$\mathbf{R}_{i, j} = -\mathbf{R}_{i, j+1} \mathbf{F}_{j+1}^- \mathbf{H}_{j+1}^{-1} \text{ для } j < i < N-1,$$

$$\mathbf{R}_{i, j} = \mathbf{H}_{i+1}^{-1} \mathbf{F}_{i+1}^+ \mathbf{R}_{i+1, j} \text{ при } i < j < N-1;$$

$$\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{K}_i \mathbf{R}_{ij} \text{ для } i \leq j,$$

$$\mathbf{W}_{ij} = (-1)^{i-j} \prod_{l=i}^{j+1} \mathbf{F}_l^- \mathbf{H}_l^{-1} + \mathbf{K}_i \mathbf{R}_{ij}$$

$$\text{для } j < i < N.$$

Здесь

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{Z}_1^- - \mathbf{Z}_2^+,$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{Z}_k^- - \mathbf{Z}_{k+1}^+ + \mathbf{F}_k^- \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{F}_k^+,$$

$$k = \overline{2, N-1},$$

$$\mathbf{K}_N^{-1} = \mathbf{K}_N.$$

Приведенные представления систем функционально-матричных уравнений (4), (6) соответствуют случаю, когда нарушения сплошности имеются на всех стыковочных границах слоев. В общем случае на некоторых границах раздела слоев

($x_3 = h_i, i = \overline{i_1, i_l}$) могут выполняться условия идеального контакта, тогда $\mathbf{U}_i^* = 0$, $\mathbf{T}_i^* = 0$ и из матриц $\mathbf{K}^*$ (4) и $\mathbf{R}$ (6) удаляются строки и столбцы с номерами $i = \overline{i_1, i_l}$, соответственно удаляются и $\mathbf{U}_i^*$, $\mathbf{T}_i^*$ из вектора неизвестных, и $\mathbf{T}_i$, $\mathbf{U}_i$ из правой части. Аналогично для случая свободной верхней границы $\mathbf{T}_{N+1} = 0$ из матрицы системы удаляются последняя строка и столбец.

Представленные функционально-матричные соотношения с учетом заданных смешанных граничных условий на границах элементов структуры позволяют построить интегральные уравнения динамических задач для слоисто-структурированных сред.

При взаимодействии системы штампов, занимающих области $\Omega_{j, N+1}$, $j = \overline{1, M_{N+1}}$, с пакетом из N слоев при наличии совокупностей включений, занимающих области Ω_{ml} ($m = \overline{1, N_l}$), и совокупностей трещин, располагающихся в областях $\tilde{\Omega}_{jl}$ ($j = \overline{1, M_l}$), на стыках слоев ($l = \overline{2, N}$) система интегральных уравнений примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M_l} K_{nl} \left(\tilde{\Omega}_{jl+1} \right) \mathbf{u}_{j, l+1}^* + \\ & + \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N_l} K_{n, l+N-1} (\Omega_{jl+1}) \boldsymbol{\tau}_{j, l+1}^* + \\ & + \sum_{j=1}^{M_{N+1}} K_{n, 2N-1} (\Omega_{j, N+1}) \boldsymbol{\tau}_{j, N+1} = \boldsymbol{\tau}_{m, n+1}, \end{aligned}$$

$$x_3 = h_{n+1}, \quad (x_1, x_2) \in \tilde{\Omega}_{m, n+1},$$

$$m = \overline{1, M_n}, \quad n = \overline{1, N-1};$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M_l} K_{n+N-1, l} \left(\tilde{\Omega}_{jl+1} \right) \mathbf{u}_{j, l+1}^* + \\ & + \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N_l} K_{n+N-1, l+N-1} (\Omega_{jl+1}) \boldsymbol{\tau}_{j, l+1}^* + \\ & + \sum_{j=1}^{M_{N+1}} K_{n+N-1, 2N-1} (\Omega_{j, N+1}) \boldsymbol{\tau}_{j, N+1} = \mathbf{u}_{m, n+1}, \end{aligned}$$

$$x_3 = h_{n+1}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{m, n+1},$$

$$m = \overline{1, N_n}, \quad n = \overline{1, N-1};$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M_l} K_{2N-1,l} \left(\tilde{\Omega}_{jl+1} \right) \mathbf{u}_{j,l+1}^* + \\
& + \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N_l} K_{2N-1,l+N-1} \left(\Omega_{jl+1} \right) \boldsymbol{\tau}_{j,l+1}^* + \\
& + \sum_{j=1}^{M_{N+1}} K_{2N-1,2N-1} \left(\Omega_{j,N+1} \right) \boldsymbol{\tau}_{j,N+1} = \mathbf{u}_{p,N+1},
\end{aligned}$$

$$x_3 = h_{N+1}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_{p,N+1},$$

$$p = \overline{1, M_{N+1}}.$$

Здесь интегральные операторы представляются соотношениями

$$\begin{aligned}
K_{nl}(\Omega_{jm}) \psi = & \iint_{\Omega_{jm}} \mathbf{k}_{nl}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \times \\
& \times \psi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{nl}(x_1, x_2) = & \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}_{nl}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\
& \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (8)
\end{aligned}$$

Подынтегральные матрицы-символы описываются соответствующими блоками матриц-функций $\mathbf{K}^*$, $\mathbf{W}^*$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{W}$, приведенных выше.

Метод факторизации, в результате применения которого получены матрицы-символы ядер интегральных уравнений задач для сред с дефектами, дает возможность исследовать с единых позиций все основные типы краевых задач, возникающих при изучении напряженно-деформированного состояния сред при наличии воздействий внешних полей любой природы, описываемых системами линейных уравнений в частных производных конечного порядка с постоянными коэффициентами. Достоинством предложенного подхода является его тесная связь с методом преобразований Фурье в областях с плоскопараллельными границами, кроме того, использование метода факторизации упрощает построение систем интегральных уравнений рассматриваемых задач.

В [13, 14] проведено аналитическое исследование корневых и полярных множеств элементов и определителей матриц-символов ряда динамических задач для многослойных сред с неоднородностями. Приведенные в настоящей работе представления матриц-блоков символов ядер систем интегральных

уравнений для слоисто-структурированных сред с нарушениями сплошности на структурных границах позволяют реализовать численные алгоритмы построения корневых и полярных множеств их элементов и определителей.

На рисунках представлены нули и полюса элементов и определителей матриц-блоков для задачи о колебаниях среды с дефектом типа трещины на стыке слоев в случае пакета из двух слоев (рис. 1) и между вторым и третьим слоями для случая трехслойного пакета (рис. 2). Толщины слоев приведены в безразмерных величинах, $\nu_i = 0,28$ ($i = \overline{1,3}$).

Сплошные линии представляют полюса функции, пунктирные — нули. По оси абсцисс откладывается безразмерная частота, по оси ординат — параметр преобразования Фурье.

В приложении к идентификации внутренних неоднородностей в качестве первого приближения физически наблюдаемых на поверхности среды явлений можно рассматривать задачу, когда характеристики неоднородностей (скачки амплитуд перемещений или напряжений) заданы.

В качестве примеров расчетов на рис. 3 в условной шкале изображены абсолютные величины амплитуды вертикальных перемещений поверхности $|u_3^N(x_1, x_2, 0)|$, создаваемых механическим внутренним источником в виде группы неоднородностей. Рассматривается вариант двухслойного пакета, содержащего единичную неоднородность, и трехслойного пакета, содержащего парные дефекты.

На неоднородностях задается одинаковая амплитуда скачка вертикальных перемещений в виде следующей осесимметричной функции

$$u_3^*(r) = \begin{cases} A \frac{m+1}{\pi} (1-r^2)^m, & r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

Константа A определяет величину амплитуды $u_3^*(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Значения $m \geq 2$ обеспечивают быструю сходимость расчетных интегралов для рассматриваемых дефектов. В частности, для $m = 2$ имеем $U_3^*(\alpha) = 48 \frac{J_3(\alpha)}{\alpha^3} A$. На границах раздела физико-механических свойств один под другим расположены круговые дефекты единичного радиуса, $\rho_2/\rho_3 = 1,14$, $\mu_2/\mu_3 = 1,3$, $\rho_1/\rho_3 = 1$, $\mu_1/\mu_3 = 1$, колеблющиеся синфазно (рис. 3а) или в противофазе (рис. 3б, 3в) соответствует случаю одной неоднородности на границе раздела двух слоев $\rho_1/\rho_2 = 1,14$,

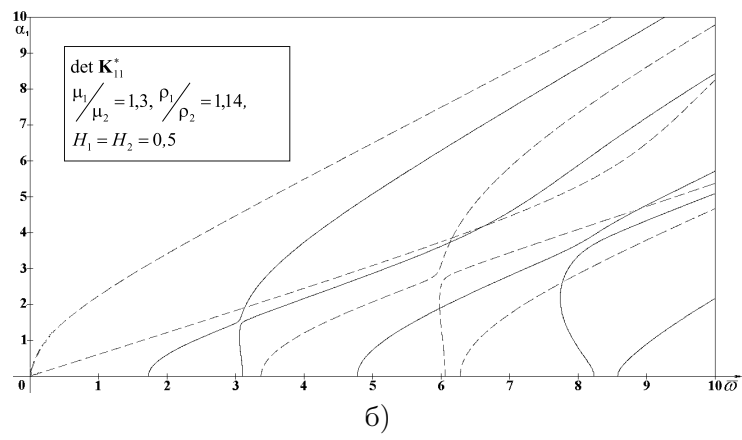
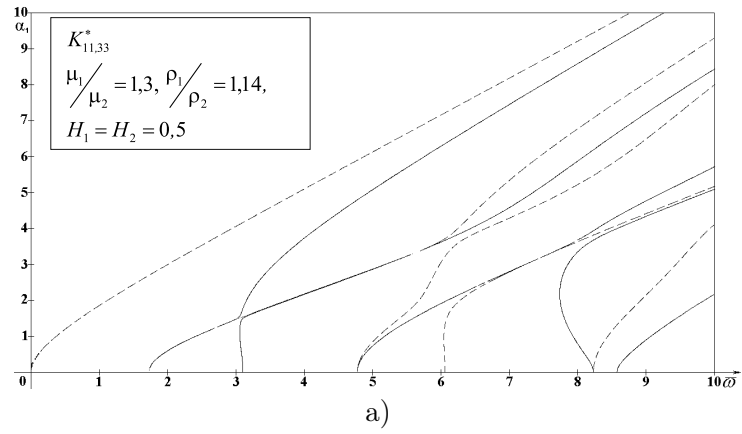


Рис. 1

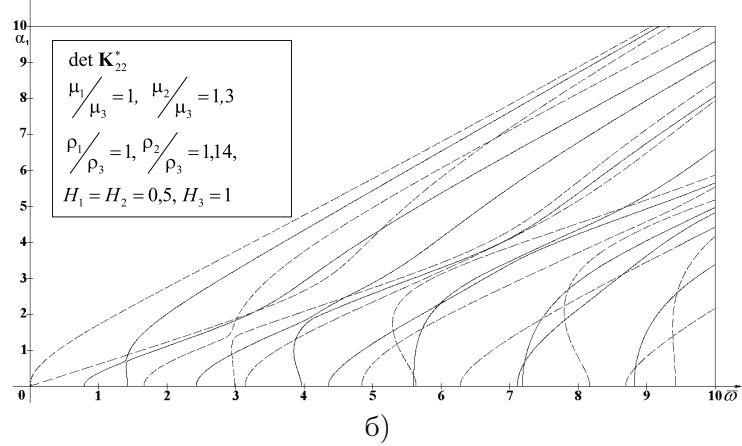
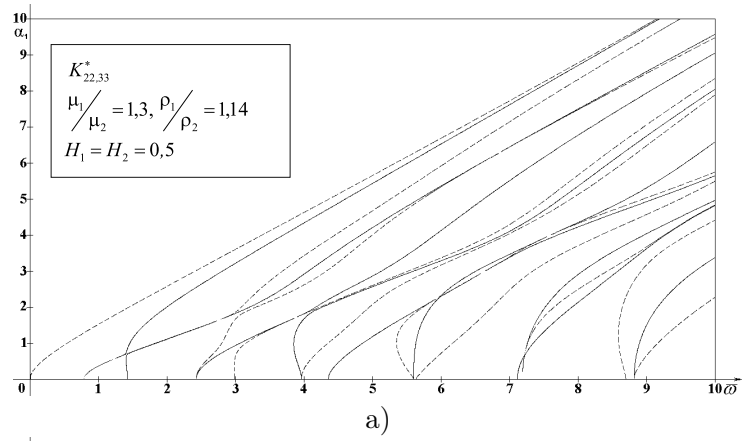
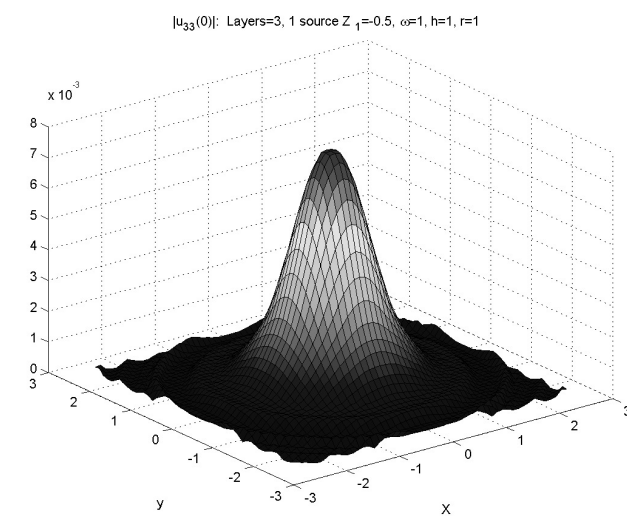
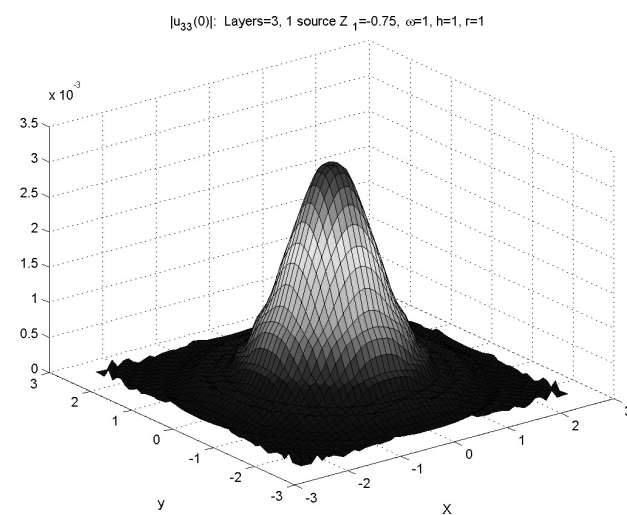


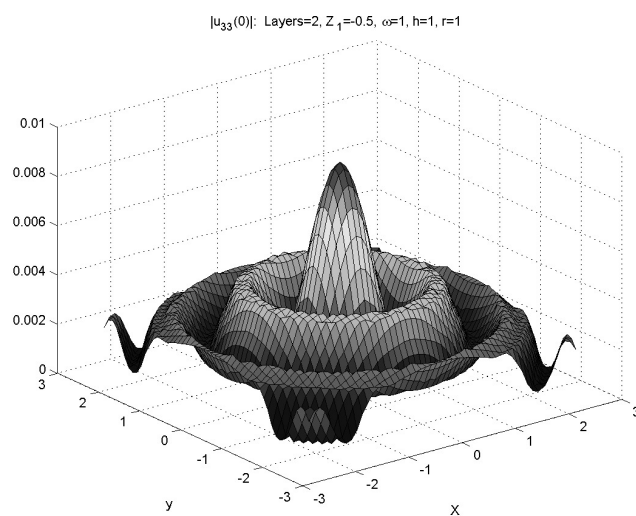
Рис. 2



а)



б)



в)

Рис. 3

$\mu_1/\mu_2 = 1,3$. Во всех случаях расчеты проводились для пакета слоев с толщинами, соответствующими данным рис. 1–2, и безразмерной частоты $\bar{\omega} = 1$.

Изучение процессов формирования и реализации сейсмических явлений, разработка способов их прогноза и профилактики остаются наиболее важными задачами наук о Земле. В связи с этим актуальным является и совершенствование методов, используемых при изучении процессов возбуждения сейсмических полей регионального масштаба. Предлагаемый подход является эффективным инструментом исследования динамического поведения сложных сред при наличии локальных резонансных структур.

Литература

1. Кузьмин Ю. О. Современные суперинтенсивные деформации земной поверхности в зонах платформенных разломов // Геологическое изучение и использование недр: информ. сб. М., 1996. № 4. С. 43–45.
2. Бабешко В. А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и трещин) // Известия РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
3. Адушкин В. В. Актуальные проблемы геомеханики земной коры // Вестник ОГГН РАН. 2001. № 1(16). URL: http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h_dgggms/1-2001/adushkin.htm#begin (дата обращения: 17.12.2009).
4. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. Дифференциальный метод факторизации в статических задачах // ДАН. 2008. Т. 423, № 6. С. 758–752.
5. Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А. О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418, № 3. С. 321–323.
6. Евдокимова О. В. Дифференциальный метод факторизации в неоднородных и нестационарных задачах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 2. С. 51–55.
7. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В. Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН. 2009. Т. 424, № 1. С. 36–39.
8. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М: Наука, 1989. 344 с.
9. Ворович И. И., Бабешко В. А., Прякина О. Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
10. Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р. Задача о вибрации упругого полупространства, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 386. № 1. С. 625–628.
11. Павлова А. В., Рубцов С. Е. К решению динамических задач для слоистого полупространства с дефектами // Наука технологии: труды XXIV Росс. Школы. М.: Изд. РАН, 2004. С. 283–290.
12. Бабешко В. А., Буржан В. В., Павлова А. В., Ратнер С. В. Упругое пространство с совокупностью неоднородностей // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск. С. 26–29.
13. Прякина О. Д., Смирнова А. В. Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов» вибропрочности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 2. С. 44–53.
14. Прякина О. Д., Смирнова А. В. К исследованию резонансных свойств сред с неоднородностями различной природы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 3. С. 34–41.

Ключевые слова: дифференциальный метод факторизации, слоистая среда, «вирус» вибропрочности, неоднородность.