УДК 517.9

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА–ЗИГМУНДА

Кряквин В. Д.[1]***, Омарова Г. П.***[2]

ON THE BOUNDEDNESS OF PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS IN HÖLDER-ZYGMUND SPACES

Kryakvin V. D., Omarova G. P.

A recent result on the boundedness of pseudodifferential operators in the scale of Hölder-Zygmund spaces is specified in the present article. Upper bound of the operator norm is presented.

Keywords: pseudodifferential operators, Hölder-Zygmund spaces.

Всюду будем использовать стандартные обозначения: для элементов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ вещественного n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ их скалярное произведение $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$, норма $|x| = \sqrt{(x, x)}$ и $dx = dx_1 \dots dx_n$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, как обычно, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и $\partial^{\alpha_j}_{x_j} = \partial^{\alpha_j}/\partial_{x_j}$, $\partial^\alpha_x = \partial^{\alpha_1}_{x_1} \dots \partial^{\alpha_n}_{x_n}$, $D_j = \partial/(i\partial_{x_j})$, $(i^2 = -1)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, $S(\mathbb{R}^n)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций и стремящихся к нулю на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой степени x.

В работе будут рассматриваться псевдодифференциальные операторы с символами из класса Л. Хермандера $S^m_{\rho,\delta}$ ($m \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$), состоящего из всех функций $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ таких, что для каждой пары мультииндексов α, β существуют постоянные $c_{\alpha,\beta} > 0$ (зависящие от a) такие, что справедливо неравенство

$$|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x a(x, \xi)| \leqslant c_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}$$

для любых x, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Пусть $c_{\alpha,\beta}(a)$ обозначают наименьшие константы для символа a, удовлетворяющие этому неравенству. Каждому символу $a \in S^m_{\rho,\delta}$ поставим в соответствие псевдодифференциальный оператор $T_a = T_a(x, D)$, действующий на функцию $f \in S(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$(T_a f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a(x, \xi) e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

где $\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x) dx$ — преобразование Фурье функции $f(x)$. Для того чтобы ввести функциональные пространства, в которых будут действовать псевдодифференциальные операторы, понадобится разбиение единицы Литтлвуда-Пэли.

Пусть λ_0 — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$, причем $\lambda_0(\xi) = 1$ для $|\xi| \leqslant 1$ и $\lambda_0(\xi) = 0$ для $|\xi| \geqslant 2$. Для целого $j \geqslant 1$ положим $\lambda_j(\xi) = \lambda_0(2^{-j}\xi) - \lambda_0(2^{-j+1}\xi)$.

Рассматривая функции λ_j как символы, построим псевдодифференциальные операторы $\Delta_j = \lambda_j(D)$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Очевидно, что $I = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \Delta_j$ и $\Delta_j = \Delta_j(\Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1})$ (здесь $\Delta_{-1} = 0$).

Будем говорить, что обобщенная функция f принадлежит пространству Гельдера-Зигмунда Λ_s, $s \in \mathbb{R}$, если существует такая константа $C > 0$, что $\|\Delta_j(f)\|_\infty \leqslant C2^{-js}, j = 1, 2 \dots$. Наименьшую постоянную $C > 0$, удовлетворяющую этим

[1]Кряквин Вадим Донатович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета; e-mail: vadkr@math.rsu.ru.

[2]Омарова Гульнара Перитхановна, магистрант кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета; e-mail: om.gulnara@yandex.ru.

неравенствам, можно взять в качестве нормы обобщенной функции f в пространстве Λ_s. Заметим, что при $s > 0$ для функции $f \in \Lambda_s$ конечна норма $\|f\|_\infty < \infty$.

Для любого положительного нецелого числа s пространство Λ_s совпадает [1] с простанством Гельдера $C^s(\mathbb{R}^n)$, состоящего из всех функций, непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ со всеми своими частными производными до порядка $[s]$, причем частные производные порядка $[s]$ равномерно непрерывны по Гельдеру на $\mathbb{R}^n$ с показателем $\{s\}$. Норма в $C^s(\mathbb{R}^n)$ равна

$$\|f\|_s = \sum_{|\alpha|\leq[s]} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_x^\alpha f(x)| + \\ + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n\\ x\neq y}} \frac{|\partial_x^\alpha f(x) - \partial_y^\alpha f(y)|}{|x-y|^{\{s\}}}.$$

Для целого положительного s норму в пространстве Λ_s можно задать с помощью конечной разности второго порядка [2].

Хорошо известно [1, 5, 6], что при $\rho = 1$ псевдодифференциальный оператор T_a с символом $a \in S^m_{1,\delta}$ ограничен из Λ_s в Λ_{s-m} для любого s и $0 \leqslant \delta \leqslant 1$.

В недавней работе [3] это утверждение об ограниченности псевдодифференциальных операторов было обобщено на произвольное ρ:

Теорема 1. Для $a \in S^m_{\rho,\delta}$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ и $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, псевдодифференциальный оператор T_a ограничен из Λ_s в $\Lambda_{s-m-(1-\rho)(n+1)}$, если $s > 0$ и $s > m + (1-\rho)(n+1)$.

Эта теорема нуждается в некотором уточнении, которое удалось установить и сформулировать в следующей теореме, являющейся основным результатом данной работы.

Теорема 2. Для $a \in S^m_{\rho,\delta}$, $0 \leqslant \delta < 1$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, любого s и любого $\varepsilon > 0$ псевдодифференциальный оператор T_a ограничен из Λ_s в $\Lambda_{s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon)}$. Кроме того, существуют постоянные $C > 0$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ такие, что для нормы оператора имеет место оценка

$$\|T_a\| \leqslant C \max_{|\alpha|\leqslant p, |\beta|\leqslant q} c_{\alpha,\beta}(a).$$

Доказательство. Так как псевдодифференциальный оператор $(1-\Delta)^{\frac{r}{2}}$ является топологическим изоморфизмом из Λ^s в Λ^{s-r}, то доказательство теоремы достаточно провести для положительных s, $s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon)$. Вложение $\Lambda_{s'} \subset \Lambda_s$ является непрерывным при $s' \geqslant s$. Поэтому можно считать, что число ε является рациональным. Дальнейшие выкладки будем проводить в соответствии с методом работы [1], уделяя основное внимание тем выкладкам, которые нуждаются в модификациях.

Разложим оператор T_a в ряд

$$T_a = \sum_{j=0}^\infty T_a \Delta_j = \sum_{j=0}^\infty T_{a_j},$$

где $a_j(x,\xi) = a(x,\xi)\lambda_j(\xi)$ для $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть для произвольного мультииндекса α функция $K_j^\alpha(x,z)$ есть ядро интегрального оператора $T_{a_j^\alpha} = \partial_x^\alpha T_{a_j}$.

Для любых мультииндексов β, γ и любого целого неотрицательного числа M найдутся [1, 3] константы $C_{M,\alpha,\beta,\gamma}$, не зависящие от $j \geqslant 0$ такие, что

$$|\partial_x^\beta \partial_z^\gamma K_j^\alpha(x,z)| \leqslant \\ \leqslant C_{M,\alpha,\beta,\gamma} |z|^{-M} 2^{j(n+m+|\alpha|-\rho M+|\gamma|+\delta|\beta|)}. \quad (1)$$

Неравенство (1) легко обощается на рациональное число M. Действительно, для того чтобы получить это нервенство с числом $M + \frac{l}{k}$ вместо M, нужно почленно перемножить левую и правую часть неравенства (1) $k-1$ раз с показателем M и еще один раз с показателем $M + l$ вместо M. Затем извлечь арифметический корень k-й степени.

Обобщенное неравенство (1) позволяет доказать, что оператор $T_{a_j^\alpha}$ является ограниченным в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и при любом положительном рациональном числе ε для нормы оператора справедливо неравенство

$$\|T_{a_j^\alpha}\| \leqslant C_\alpha 2^{j(m+|\alpha|+(1-\rho)(n+\varepsilon))}, \quad (2)$$

где постоянная C_α не зависит от j и оценивается сверху конечным числом констант $c_{\alpha,\beta}(a)$.

Действительно, запишем оператор $T_{a_j^\alpha}$ в форме интегрального оператора

$$T_{a_j^\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_j^\alpha(x,z) f(x-z)\,dz,$$

тогда

$$|T_{a_j^\alpha} f(x)| \leqslant ||f||_\infty \Bigg(\int_{|z|\leqslant 2^{-j}} |K_j^\alpha(x,z)|dz + \\ + \int_{|z|>2^{-j}} |K_j^\alpha(x,z)|dz \Bigg).$$

Применим оценку ядра (1) при $\beta = \gamma = 0$ к первому интегралу при $M = 0$, а ко второму — при $M = n + \varepsilon$. Получим

$$|T_{a_j^\alpha} f(x)| \leqslant ||f||_\infty C_\alpha 2^{j(n+m+|\alpha|)} \times \\ \times \left(\int\limits_{|z|\leqslant 2^{-j}} dz + \int\limits_{|z|\geqslant 2^{-j}} |z|^{-n-\varepsilon} 2^{j(-\rho(n+\varepsilon))}\, dz \right),$$

вычисление интегралов приводит к требуемому неравенству. Оценка сверху для постоянной C_α следует из аналогичной оценки для констант $C_{M,\alpha,\beta,\gamma}$ неравенства (1).

Пусть произвольная функции $f \in \Lambda_s$, это значит, что существует константа $C > 0$ такая, что $\|\Delta_j(f)\|_\infty \leqslant C2^{-js}$ для любого $j \geqslant 0$. Наименьшая постоянная C является нормой функции f в пространстве Λ_s.

Для оператора T_a с символом $a \in S^m_{\rho,\delta}$ можно записать равенство

$$T_a f = \sum_{j=0}^{\infty} F_j,$$

где $F_j = T_{a_j} f'_j$, $f'_j = (\Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1})f$, $T_{a_j} = T_a \Delta_j$. Очевидно, что

$$||f'_j||_\infty \leqslant C(2^s + 1 + 2^{-s})2^{-js},$$

где константа C оценивается через норму функции f.

Применяя неравенство (2), получим для любого мультииндекса α

$$\|\partial_x^\alpha F_j\|_\infty = \|\partial_x^\alpha T_{a_j} f'_j\|_\infty \leqslant \\ \leqslant C_\alpha 2^{j(m+|\alpha|+(1-\rho)(n+\varepsilon))} \|f'_j\|_\infty \leqslant \\ \leqslant C_\alpha 2^{j(m+|\alpha|+(1-\rho)(n+\varepsilon)-s)}.$$

Для произвольного целого $l \geqslant 0$ воспользуемся разбиением единицы следующего вида [1]

$$I = \sum_{|\alpha|\leqslant l} T^\alpha \partial_x^\alpha,$$

где T^α — псевдодифференциальные операторы с не зависящими от х символами, принадлежащими $S^{-l}_{1,0}$.

Для любых $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, применяя это разбиение единицы и учитывая, что операторы коммутируют, получим

$$\Delta_j(F_i) = \sum_{|\alpha|\leqslant l} T^\alpha \Delta_j \partial_x^\alpha (F_i).$$

Применим (2) к операторам $T^\alpha \Delta_j$ с учетом того, что $m = -l$, $\rho = 1$, тогда

$$\|T^\alpha \Delta_j g\|_\infty \leqslant C2^{-jl} \|g\|_\infty$$

и, следовательно,

$$\|\Delta_j(F_i)\|_\infty \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant l} \|T^\alpha \Delta_j \partial_x^\alpha (F_i)\|_\infty \leqslant \\ \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant l} 2^{-jl} \|\partial_x^\alpha (F_i)\|_\infty \leqslant \\ \leqslant C_l 2^{-jl} 2^{j(m+l+(1-\rho)(n+\varepsilon)-s)}. \quad (3)$$

Если применить (3) с $l = l_1$, где l_1 наименьшее целое число, большее, чем $s - m - (1-\rho)(n+\varepsilon)$, то при $i \leqslant j$

$$\left\| \Delta_j \left(\sum_{i\leqslant j} F_i \right) \right\|_\infty \leqslant \sum_{i\leqslant j} \|\Delta_j(F_i)\|_\infty \leqslant \\ \leqslant C2^{-jl_1} \sum_{i\leqslant j} 2^{i(m+l_1+(1-\rho)(n+\varepsilon)-s)} \leqslant \\ \leqslant C2^{-j(s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon))}.$$

Для $i > j$ применим (3) с $l = 0$:

$$\|\Delta_j \Big(\sum_{i>j} F_i \Big)\|_\infty \leqslant \sum_{i>j} \|\Delta_j(F_i)\|_\infty \leqslant \\ \leqslant C \sum_{i>j} 2^{i(m+(1-\rho)(n+\varepsilon)-s)} \leqslant \\ \leqslant C2^{-j(s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon))}.$$

Объединенив две последние оценки, получим

$$||\Delta_j(Tf)||_\infty = ||\Delta_j(\sum_{i=0}^{\infty} F_i)||_\infty \leqslant \\ \leqslant C2^{-j(s-m-(1-\rho)(n+\varepsilon))},$$

что и завершает доказательство. □

Литература

1. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton: Princeton University Press, 1993. 685 pp.
2. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 343 с.
3. *Yan Lin, Shan Zhen Lu* Pseudo-differential operators on Sobolev and Lipschitz spases // Acta Mathematica Sinica. 2010. Vol. 26. No. 1. P. 131–142.

4. *Beals R.* L^p and Holder estimates for pseudo-differential operators:sufficient conditions // Ann. Inst. Fourier. 1979. Vol. 29. No. 3 P. 239–260.
5. *Rabinovich V. S.* Fredholm property of pseudo-differential operators on weighted Hölder–Zygmund spaces // Operator Theory: Advances and Applications. 2006. Vol. 164. P. 95-114.
6. *Кряквин В. Д.* Критерии компактности и нетеровости псевдодифференциальных операторов в весовых пространствах Гельдера-Зигмунда // Дифф. уравнения. 2009. №1. С. 101–110.

Ключевые слова: псевдодифференциальные операторы, пространства Гельдера–Зигмунда.

Статья поступила 1 декабря 2011 г.
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону