УДК 517.956.224+517.57

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА[1]

Марковский А. Н.[2]

INTEGRAL PRESENTATION OF LINEAR SYSTEM OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF LAPLACE EQUATION

Markovsky A. N.

Some properties of linear combination of fundamental solutions of Laplace equation with positive coefficients are considered. In particular, presentation of the linear combination as a Roben potential is proved. The results are considered from hydrodynamical point of view.

Keywords: fundamental solution of Laplace equation, Roben potential, integral representation, equipotential of finite range, harmonic extension, point vortices.

1. Свойства линейных комбинаций фундаментальных решений уравнения Лапласа

Зададим на плоскости множество различных точек $z_j = \{x_j, y_j\}$ и соответствующие этим точкам действительные числа c_j, $j = 1, \dots, n$. Образуем с помощью них линейную комбинацию

$$\Psi(z) := \sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j), \tag{1.1}$$

где

$$E(z) := -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z|}$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^2$. Далее выражение (1.1) будем называть просто линейной комбинацией.

Рассмотрим линию уровня S функции $\Psi(z)$, соответствующую постоянной B

$$\Psi(z)|_S = B. \tag{1.2}$$

В общем случае линия уровня S — несвязное множество, состоящее из конечного числа непересекающихся компонент S_j, ограничивающих на плоскости области Q_j так, что $S = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$ и $Q = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j$. Следуя [1], будем называть область Q односвязной, если её граница ∂Q является связным множеством; в противном случае Q будем называть неодносвязной, а соответствующую границу $S = \partial Q$ — несвязной кривой. Число k связных компонент границы ∂Q будем называть порядком связности, а Q — k-связной областью.

Утверждение 1. Если в линейной комбинации (1.1) имеются коэффициенты c_j разных знаков, то при любом значении константы B кривая S, удовлетворяющее тождеству (1.2), не ограничивает односвязную область Q, содержащую все точки z_j $(j = 1, \dots, n)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что $c_1 < 0$ и $c_2 > 0$. Допустим противное: пусть существует константа B такая, что область Q, содержащая точки z_j $(j = 1, \dots, n)$ и ограниченная кривой S, удовлетворяющей тождеству (1.2), является односвязной. Тогда в области Q существует непрерывный путь, соединяющий точки z_1 и z_2. Поскольку фундаментальное решение уравнения Лапласа $E(z)$ стремится к $-\infty$ при $z \to 0$, то функция

$$\Psi(z) = -|c_1| E(z - z_1) + c_2 E(z - z_2) + \\ + \sum_{j=3}^{n} E(z - z_j),$$

при $z \to z_1$ стремится к $+\infty$, а при $z \to z_2$ — к $-\infty$. Тогда, в силу непрерывности функции $\Psi(z)$, она принимает любое действительное

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (11-01-96511), Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2009–2010 гг. (2.1.1/3828).

[2]Марковский Алексей Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: mark@kubsu.ru.

значение, в том числе и значение B, значит, существует точка ζ на пути от z_1 к z_2 такая, что

$$\Psi(\zeta) = B.$$

Следовательно, ζ принадлежит границе S, что приводит к противоречию. Утверждение доказано. □

Покажем, что функция линейной комбинации $\Psi(z)$, определённая равенством (1.1), имеет $(n-1)$ стационарных седловых точек.

Действительно, поскольку функция

$$\Psi(z) = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n} \ln|z-z_j|^2$$

имеет те же особые точки, что и аналитическая в $R^2 \backslash \bigcup_{j=1}^{n}\{z_j\}$ функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{n} \ln(z-z_j)^2,$$

то, вычисляя производную по комплексной переменной z и приравнивая её к нулю

$$\frac{d}{dz}\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{z-z_j} = \\ = \frac{1}{2\pi}\frac{P_{n-1}(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)} = 0,$$

получаем, что особые точки удовлетворяют алгебраическому уравнению $(n-1)$-й степени

$$P_{n-1}(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \prod_{i=1,\ i\neq j}^{n}(z-z_i) = 0.$$

Функция $\Psi(z)$ — гармоническая в $R^2 \backslash \bigcup_{j=1}^{n}\{z_j\}$, поэтому не может иметь локальных экстремумов, следовательно, стационарные точки могут быть только седловыми.

Обозначим z_j^* — стационарные точки функции $\Psi(z)$, определённой равенством (1.1), и $B_j = \Psi(z_j^*)$ $(j = 2,\ldots,n)$ — соответствующие значения функции в этих точках.

Утверждение 2. Если множество стационарных точек z_j^* $(j = 2,\ldots,n)$ функции $\Psi(z)$, определённой равенством (1.1) с положительными коэффициентами

$$c_j > 0 \ (j = 1,\ldots,n),$$

упорядочено так, что выполняются неравенства

$$B_{j+1} < B_j \ (j = 2,\ldots,n-1),$$

то геометрическое место точек z, удовлетворяющих тождеству

$$\sum_{j=1}^{n} c_j E(z-z_j) = B,$$

определяет:

1) при $B < B_n$ — кривую, ограничивающую n-связную область;

2) при $B_{k+1} < B < B_k$ $(k = 2,\ldots,n-1)$, — кривую, ограничивающую k-связную область; в случае $B = B_k$ кривая имеет одну точку самопересечения z_k^*;

3) при $B > B_2$ — кривую, ограничивающую односвязную область.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$L_j(z) = c_j E(z-z_j) \ (j = 1,\ldots,n).$$

Действительная константа B определяет n кривых S_j, удовлетворяющих тождествам

$$L_j(z)\big|_{S_j} = B,\ j = 1,2,\ldots,n.$$

Каждая такая кривая S_j ограничивает односвязную область Q_j — круг с центром в точке z_j и радиусом $r_j = \exp(\frac{4\pi B}{c_j})$. Очевидно, что при $c_j > 0$, если $B \to -\infty$, то $|S_j| \to 0$, и если $B \to +\infty$, то $|S_j| \to +\infty$.

Следовательно, для функции

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{n} L_j = \sum_{j=1}^{n} c_j E(z-z_j)$$

при $c_j > 0$ можно выбрать константу B так, что соответствующая линия уровня определяет кривую S, ограничивающую n-связную область $Q = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j$, где Q_j содержит точку z_j и не содержит стационарных точек, и при $z \in S = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$ выполняется тождество $\Psi(z) = B$.

Увеличение значения константы B ведет к увеличению длины кривых S_j, что приводит к пересечению изолиний функции $\Psi(z)$ в седловой точке z_n^*. Дальнейшее увеличение B приводит к необходимости объединения двух соприкоснувшихся кривых в одну кривую так, что линия уровня функции $\Psi(z)$ будет кривой, ограничивающей $(n-1)$-связную область. Аналогично, увеличивая константу B, приходим к пересечению изолиний функции $\Psi(z)$ в седловой точке z_{n-1}^* и необходимости объединения двух соприкоснувшихся кривых в одну кривую, и так далее, увеличивая B, получим, что геометрическое место точек, удовлетворяющих тождеству $\Psi(z) = B > B_2 = \Psi(z_2^*)$, определяет кривую, ограничивающую односвязную область. Утверждение доказано. □

Замечание 1. Нетрудно показать, что если значения некоторых констант B_j $(j = 2, \dots, n)$, равны между собой, например,

$$B_{i_1} = B_{i_2} = \ldots = B_{i_k} = B, \ 1 < k \leqslant n,$$

то линия уровня функции $\Psi(z)$, определяемая константой B, имеет не более k точек самопересечения; в зависимости от положений точек z_j возможны случаи, когда имеется одна точка самопересечения, в которой кривая самопересекается k раз — так называемая узловая точка кривой.

Замечание 2. При $n = 2$, если заданы точки $z_1 = \{x_1, y_1\}$, $z_2 = \{x_2, y_2\}$ и соответствующие значения положительных коэффициентов c_1 и c_2, то линейная комбинация двух фундаментальных решений

$$\Psi(z) = c_1 E(z - z_1) + c_2 E(z - z_2)$$

имеет одну стационарную точку $z^* = \{x^*, y^*\}$,

$$x^* = \frac{c_1^2 x_2 + c_1 c_2 (x_1 + x_2) + c_2^2 x_1}{(c_1 + c_2)^2},$$

$$y^* = \frac{c_1^2 y_2 + c_1 c_2 (y_1 + y_2) + c_2^2 y_1}{(c_1 + c_2)^2}.$$

В случае $c_1 = c_2 = 1$, если $B = \Psi(z^*)$, кривая S, удовлетворяющая тождеству $\Psi(z) = B$, определяет лемнискату Бернулли с точкой симметрии z^*, если $B < \Psi(z^*)$, то S ограничивает двухсвязную область — овалы Кассини [2].

2. Эквипотенциаль конечного ранга, единственность

Из утверждения 2 непосредственно вытекает, что, если в линейной комбинации (1.1) все коэффициенты $c_j > 0$ положительны, то существует константа B_2 такая, что линия уровня, соответствующая константе $B > B_2$, определяет кривую, ограничивающую односвязную область, содержащую все точки z_j. Выделим этот класс кривых, вводя следующее определение.

Определение. Геометрическое место точек z, удовлетворяющих тождеству

$$\Psi(z) = B > B_2, \tag{2.1}$$

где $\Psi(z)$ — линейная комбинация (1.1) с положительными коэффициентами $c_j > 0$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, будем называть *эквипотенциалью конечного ранга.*

Из определения следует, что эквипотенциаль конечного ранга — кривая S, ограничивающая односвязную область Q, содержащую все заданные точки z_j $(j = 1, 2, \dots, n)$. Далее эквипотенциаль конечного ранга будем называть просто эквипотенциалью.

Утверждение 3. Множество точек z_j и соответствующих им коэффициентов $c_j > 0$ линейной комбинации (1.1), определяющее эквипотенциаль, удовлетворяющую тождеству (2.1), единственно.

Доказательство. Предположим противное, то есть существует другой набор точек $\tilde{z}_i$, принадлежащих области Q, и соответствующий набор положительных коэффициентов $\tilde{c}_i$ $(i = 1, \dots, \tilde{n})$, таких, что для функции

$$\widetilde{\Psi}(z) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{c}_i E(z - \tilde{z}_i)$$

эквипотенциаль S удовлетворяет тождеству

$$\widetilde{\Psi}(z)\Big|_S = \widetilde{B}.$$

Рассмотрим разность

$$F(z) = \Psi(z) - \widetilde{\Psi}(z) = \\ = \sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j) - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{c}_i E(z - \tilde{z}_i),$$

для которой на S, по построению, должно выполняться

$$F(z)|_S = B - \widetilde{B}. \tag{2.2}$$

Поскольку $\tilde{c}_i > 0$ $(i = 1, \dots, \tilde{n})$, то в линейной комбинации $F(z)$ имеются отрицательные коэффициенты и, согласно утверждению 1, кривая S, удовлетворяющая условию (2.2), не может ограничивать односвязную область Q, содержащую все точки z_j и $\tilde{z}_i$, при любой константе $B - \widetilde{B}$, то есть S не может быть эквипотенциалью. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

Замечание 3. Таким образом, при фиксированной константе $B > B_2$ набор точек и соответствующих коэффициентов $\{(z_j, c_j)\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ однозначно определяет эквипотенциаль S или однопараметрическое семейство эквипотенциалей в случае, если константа B выступает параметром.

3. Свойства модуля градиента функции линейной комбинации на эквипотенциали

Пусть эквипотенциаль S, ограничивающая область Q, задана набором определяющих точек z_j и соответствующих положительных коэффициентов c_j $(j = 1, \ldots, n)$.

Нетрудно показать, что вектор коградиента

$$\nabla_c \Psi(z) := \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y), -\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y) \right\}$$

линейной комбинации (1.1) в каждой точке $z = \{x, y\} \in S$ всюду касателен эквипотенциали S, тогда как вектор градиента

$$\nabla \Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{|z - z_j|^2} \{x - x_j, y - y_j\}$$

коллинеарен на S вектору нормали

$$\mathbf{n}(z) = \frac{1}{|\nabla \Psi(z)|} \nabla \Psi(z), \ z \in S. \tag{3.1}$$

Рассмотрим функцию модуля градиента линейной комбинации

$$|\nabla \Psi(z)| = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{x - x_j}{|z - z_j|^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{y - y_j}{|z - z_j|^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

на эквипотенциали S.

Утверждение 4. Справедливо тождество

$$|\nabla \Psi(z)| = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(z), \ z \in S, \tag{3.3}$$

где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ — операция дифференцирования по внешней для области Q нормали к границе S в точке $z \in S$.

Доказательство. По определению

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(z) = (\nabla \Psi(z), \mathbf{n}(z)),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Тогда с учётом (3.1) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(z) = (\nabla \Psi(z), \frac{1}{|\nabla \Psi(z)|} \nabla \Psi(z)) = |\nabla \Psi(z)| \,.$$

Утверждение доказано. □

Непосредственно вычисляя $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(z)$ и учитывая (3.2) тождество утверждения 4 при $z = \{x, y\} \in S$ запишется в виде

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{x - x_j}{|z - z_j|^2} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{y - y_j}{|z - z_j|^2} \right)^2 = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j \frac{(z - z_i, z - z_j)}{|z - z_i|^2 \, |z - z_j|^2},$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение радиус-векторов точек.

4. Интегральное представление линейной комбинации

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. Для линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа с положительными коэффициентами $c_j > 0$,

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j)$$

и любой эквипотенциали S, удовлетворяющей тождеству

$$\Psi(z)|_S = B$$

при некоторой заданной действительной константе B, найдется непрерывная функция $q^*(\zeta)$, определённая на S, такая, что в $\overline{Q}^+ = \mathbb{R}^2 \backslash Q$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j) = \int_S q^*(\zeta) E(z - \zeta) dS_\zeta, \tag{4.1}$$

и функция плотности представляется в виде

$$q^*(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} E(\zeta - z_j), \tag{4.2}$$

$$\zeta \in S.$$

Доказательство. Для функции линейной комбинации $\Psi(z)$ справедливы равенства

$$\Delta\Psi(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta(z - z_j),\ z \in Q,$$

$$\int_Q \Delta\Psi(\zeta)E(z-\zeta)d\zeta = \\ = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_Q \delta(\zeta - z_j)E(z-\zeta)d\zeta = \\ = \sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j),$$

где $\delta(z)$ — дельта функция.

Воспользуемся интегральным представлением функции [4]

$$\alpha\Psi(z) = \int_Q \Delta\Psi(\zeta)E(z-\zeta)d\zeta + \\ + \int_S \Psi(\zeta)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta}E(z-\zeta)dS_\zeta - \\ - \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta}\Psi(\zeta)E(z-\zeta)dS_\zeta$$

и свойством потенциала двойного слоя [5]

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta}E(z-\zeta)dS_\zeta = \alpha,$$

где $\alpha = 0$, при $z \in Q^+$, $\alpha = 1/2$, при $z \in S$.

Поскольку по условию на S выполняется тождество

$$\Psi(z) = B,\ z \in S,$$

то потенциал двойного слоя равен

$$\int_S \Psi(\zeta)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta}E(z-\zeta)dS_\zeta = \\ = B\int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta}E(z-\zeta)dS_\zeta = B\alpha.$$

Тогда интегральное представление имеет вид

$$B\alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j) + \\ + B\alpha - \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta}\Psi(\zeta)E(z-\zeta)dS_\zeta,$$

откуда при $z \in Q^+$ и $z \in S$ окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j) = \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\zeta}\Psi(\zeta)E(z-\zeta)dS_\zeta, \\ z \in \overline{Q}^+.$$

Теорема доказана. □

5. Некоторые свойства потенциала Робена определенного на эквипотенциали

Потенциал простого слоя

$$R(z) = \int_S q^*(\zeta)E(z-\zeta)dS_\zeta,\ z \in \overline{Q}^+,$$

для которого выполняется условие на границе $S \in C^{1+\lambda}$ $(\lambda > 0)$

$$R(z)|_S = R_0 \equiv \mathrm{const},$$

называется потенциалом Робена [5]. Функция $q^*(\zeta)$ и константа R_0 называются соответственно плотностью и постоянной Робена.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 справедливо

$$\int_S q^*(\zeta)dS_\zeta = \sum_{j=1}^{n} c_j. \tag{5.1}$$

Доказательство. Согласно теореме 1 плотность потенциала $q^*(\zeta)$ выражается через функцию линейной комбинации (4.2)

$$q^*(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Psi(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}E(\zeta - z_j).$$

Проинтегрируем это выражение по S, получим

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\Psi(\zeta)dS = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}E(\zeta - z_j)dS.$$

Опираясь на элементарное свойство потенциала двойного слоя [5]

$$\int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}E(\zeta - z_j)dS = 1,\ z_j \in Q, \\ j = 1, \ldots, n,$$

получаем исходное тождество. Следствие доказано. □

Известно, что нормальная производная потенциала простого слоя при переходе через границу терпит скачок [5], в связи с чем возникает проблема гармонического продолжения внутрь области [3].

Следствие 2. Для потенциала Робена $R(z)$, определённого на эквипотенциали S, заданной множеством пар $\{(z_j, c_j)\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, линейная комбинация

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j)$$

является гармоническим продолжением внутрь области $Q \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \{z_j\}$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1 — интегрального представления линейной комбинации.

6. Гидродинамическая интерпретация теоремы

Линейную комбинацию фундаментальных решений уравнения Лапласа

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j E(z - z_j), \quad z \in \mathbb{R}^2$$

можно рассматривать как функцию тока конфигурации точечных вихрей, заданных своими координатами z_j и интенсивностями c_j $(j = 1, \ldots, n)$ в некоторый момент времени.

Течение, индуцируемое точечными вихрями с положительными интенсивностями $c_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$,

$$\mathbf{w}(z) := \nabla_c \Psi(z), \quad z \in \mathbb{R}^2,$$

является чисто циркуляционным, то есть все линии тока замкнуты, циркуляция векторного поля $\mathbf{w}(z)$ в положительном направлении обхода равна

$$\Gamma = \int_L (\mathbf{w}, \mathbf{t}) dL = \sum_{j=1}^{n} c_j,$$

где $\mathbf{t}$ — единичный касательный вектор, L — кривая, ограничивающая область, в которой содержатся все точечные вихри.

Если кривая S_B – линия уровня функции линейной комбинации $\Psi(z)$, определяемая константой B, то S_B — линия тока векторного поля $\mathbf{w}(z)$, и наоборот, при $c_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ и $B > B_2$, S_B — эквипотенциаль.

На эквипотенциали S_B по утверждению 4 выполняется

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(z) = |\nabla \Psi(z)| = |\nabla_c \Psi(z)|, \quad z \in S_B,$$

по теореме 1 справедливо соотношение

$$q^*(z) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Psi(z), \quad z \in S_B.$$

Таким образом, модуль вектора скорости циркуляционного течения $\mathbf{w}(z)$, идуцированного точечными вихрями z_j, касательного линии тока — эквипотенциали S_B, равен плотности потенциала Робена $q^*(\zeta)$, определенного на S_B, и, в силу следствия 1, плотность $q^*(\zeta)$ интегрально на S_B равна циркуляции векторного поля $\mathbf{w}(z)$

$$\int_{S_B} q^*(\zeta) dS = \sum_{j=1}^{n} c_j.$$

Автор выражает признательность коллегам по кафедре за обсуждение результатов работы на кафедральном семинаре.

Литература

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного. М.: Наука, 1985. 336 с.
2. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. М.: ГИФ-МЛ, 1960. 296 с.
3. Тиман А. Ф., Трофимов В. Н. Введение в теорию гармонических функций. М. Наука, 1968. 208 с.
4. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 425 с.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

Ключевые слова: фундаментальное решение уравнения Лапласа, потенциал Робена, интегральное представление, эквипотенциаль конечного ранга, гармоническое продолжение, точечные вихри.

Статья поступила 17 октября 2011 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар