

УДК 512.516.5

АЛГОРИТМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИПОЛЕЙ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ

Токарев Н. М.¹, Лежнев В. Г.²

ALGORITHM FOR THE PROBLEM OF DISTRIBUTED DIPOLES AIRFOIL

Tokarev N. M., Lezhnev V. G.

The stream function of an incompressible potential flow past a profile aliform, is the sum of the linear term and the double layer potential. Specifies an algorithm for determining the boundary condition potential density – density distributed on the boundary of the dipoles. The general solution is obtained by adding the capacity of the Robin coefficient.

Keywords: Dirichlet problem, potential Robin, airfoil problem.

1. Постановка задачи

Для задачи обтекания профиля потенциальным потоком приводится представление функции тока через потенциал двойного слоя, указывается проекционный алгоритм определения плотности диполей. Во внешней области $Q^+ = R^2 \setminus \bar{Q}$, где Q – ограниченная односвязная область с границей Ляпунова, требуется определить поле скоростей $\mathbf{w}(x) = \{u(x), v(x)\}$, $x = (x_1, x_2) \in Q^+$, удовлетворяющее условиям:

- a) $\operatorname{div} \mathbf{w}(x) = 0, \operatorname{rot} \mathbf{w}(x) = 0$;
- b) $\mathbf{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$,
- c) граница S – линия тока течения $\mathbf{w}(x)$.

Из первого условия следует, что существует функция $\psi(x)$ такая, что

$$\mathbf{w}(x) = \nabla_c \psi(x) \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \psi; -\frac{\partial}{\partial x_1} \psi \right\}.$$

Условие c) эквивалентно тому, что $\psi|_S \equiv b_1 = \text{const}$.

2. Представление функции тока, единственность

Будем определять функцию тока в виде

$$\psi(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \int_S q(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n(y)} dS_y, \quad (2.1)$$

где $E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в R^2 . Из a) следует, что функция $\psi(x)$ гармоническая, условия a) и b) выполняются при любой $q(y)$. Требуется определить функцию $q(y)$ (плотность диполей на границе S) так, чтобы выполнялось условие $\psi|_S \equiv b_1$.

Перейдем в (2.1) на границу при $x \rightarrow x' \in S$, $x \in Q^+$. Используя граничные свойства потенциала двойного слоя, получим [1]

$$\begin{aligned} b_1 - (u_0 x'_2 - v_0 x'_1) &= \\ &= -\frac{1}{2} q(x') + \int_S q(y) \frac{\partial E(x' - y)}{\partial n(y)} dS_y. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как $\lambda = 0,5$ – простое собственное число данного интегрального оператора, для однозначной разрешимости интегрального уравнения требуется, чтобы функция

¹Токарев Никита Михайлович, аспирант кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: lezhnvv@mail.ru.

²Лежнев Виктор Григорьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: nikitatok@gmail.com.

$b_1 - (u_0x_2 - v_0x_1)$ была ортогональна подпространству решений однородного сопряженного уравнения, то есть плотности $\varphi^*(x)$ потенциала Робена $R(x)$ [1]:

$$(b_1 - (u_0x_2 - v_0x_1), \varphi^*)_S = 0,$$

где $(\cdot, \cdot)_S$ — скалярное произведение в $L_2(S)$. Это условие определяет постоянную b_1 из c .

3. Алгоритм решения интегрального уравнения

Для решения интегрального уравнения (2.2) рассмотрим задачу минимизации V для функционала $F(q)$ в подпространстве $L_2^C(S) = \{1\} \oplus L_2(S)$:

$$F(q) = \left\| b - (u_0x_2 - v_0x_1) + \frac{1}{2}q(x) - \int_S q(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n(y)} dS_y \right\|_S^2$$

с произвольной постоянной b_1 .

Задача V . Найти $\mu = \inf_q F(q)$ и минимизирующую функцию.

Покажем, что функционал $F(q)$ строго выпуклый, то есть

$$\Phi_1\left(\frac{g_1 + g_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(\Phi_1(g_1) + \Phi_1(g_2)),$$

если $g_1 \neq g_2$.

Обозначим для краткости

$$l(x) = b_1 - (u_0x_2 - v_0x_1),$$

$$Aq_k(x) = \frac{1}{2}q_k(x) - \int_S q_k(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n(y)} dS_y,$$

$$k = 1, 2,$$

тогда

$$F(q_k) = \|l(x) + Aq_k(x)\|_S^2.$$

Для любых вещественных a, b справедливо числовое неравенство

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

строгое, если $a \neq b$.

Пусть $q_1 \neq q_2$, тогда $Aq_1(x) \neq Aq_2(x)$, иначе функция $q_1 - q_2$ была бы собственной функцией интегрального оператора потенциала двойного слоя (то есть константой), что невозможно при $q_k(x) \in L_2^C(S)$, $k = 1, 2$. Используя числовое неравенство для подынтегрального выражения в $F\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)$. Интегрируя его, получим

$$F\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(F(q_1) + F(q_2)).$$

Строгая выпуклость доказана.

В подпространстве $L_2^C(S)$ система функций $\{\beta_m^+(y)\}_1^\infty$

$$\beta_m^+(y) = \frac{\partial E(x^m - y)}{\partial n(y)}, \quad y \in S$$

является полной и линейно независимой, если последовательность точек x^m во внешней области Q^+ ограничена, отделена от границы и удовлетворяет условию единственности гармонических функций [2]. То есть аппроксимацию $q^M(y)$ искомой функции $q(y)$ можно представить в виде

$$q^M(y) = \sum_{m=1}^M c_m \beta_m^+(y).$$

Функционал $F(q)$ на подпространстве $\{\beta_m^+(y)\}_1^M$ также является строго выпуклым,

$$F(q^M) = \left\| b_1 - (u_0x_2 - v_0x_1) + \frac{1}{2}q^M(x) - \int_S q^M(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n(y)} dS_y \right\|_S^2,$$

$q^M(x) \in \{\beta_m^+(y)\}_1^M$. При этом $F(q^M)$ можно рассматривать как функцию M переменных $c_1, \dots, c_M$, $F(q^M) = G(c_1, \dots, c_M)$. Эта функция ограничена снизу, непрерывна и строго выпукла, то есть решение задачи V существует и единственно. Необходимое условие экстремума функции приводит к следующей системе уравнений с невырожденной матрицей

$$\sum_{k=1}^M a_{nk} c_k = b_n, \quad n = 1, 2, \dots, M,$$

где

$$a_{nk} = \int_S \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M c_k \beta_k(x) - \int_S \sum_{k=1}^M c_k \beta_k(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n(y)} dS_y \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{2} \beta_n(x) - \int_S \beta_n(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n(y)} dS_y \right) dS_x, \\ b_n = \int_S (b_1 - (u_0 x_2 - v_0 x_1)) \times \\ \times \left(\frac{1}{2} \beta_n(x) - \int_S \beta_n(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n(y)} dS_y \right) dS_x.$$

Классом единственности решений $q(y)$ уравнения (2.2) является подпространство $L_2^C(S)$.

4. Общее представление функции тока

Можно показать, что циркуляция Γ на профиле S обтекающего течения с функцией тока (2.1) равна нулю.

Для того чтобы получить общее решение задачи обтекания профиля, необходимо прибавить к $\psi(x)$ потенциал Робена с множителем γ . Рассмотрим функцию тока $\Psi(x)$ следующего вида

$$\Psi(x) = \psi(x) + \gamma R(x) = \\ = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \int_S q(y) \frac{\partial E(x-y)}{\partial n(y)} dS_y + \\ + \gamma \int_S \varphi^*(y) E(x-y) dS_y. \quad (4.1)$$

Найдем циркуляцию Γ на S для течения с функцией тока $\Psi(x)$. По определению

$$\Gamma = \int_S \mathbf{w}(x) \tau(x) ds,$$

следовательно,

$$\Gamma = \int_S \nabla_c \psi(x) \tau(x) dS_x = \\ = \int_S \nabla \psi(x) \mathbf{n}(x) dS_x = \int_S \frac{\partial \Psi(x)}{\partial n(x)} dS_x.$$

Здесь $\tau(x)$ и $\mathbf{n}(x)$ — единичная касательная в положительном направлении обхода и единичная внешняя нормаль к S , $x \in S$ (при переходе от ∇f к $\nabla_c f$ происходит поворот по часовой стрелке, как и при переходе от $\tau(x)$ к указанному $\mathbf{n}(x)$).

Обозначим второе слагаемое в (4.1) через $\zeta(x)$. Рассмотрим представление (4.1) функции тока и вычислим циркуляцию.

Производная $\Psi(x)$ по нормали имеет вид

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial n(x)} = \frac{\partial (u_0 x_2 - v_0 x_1)}{\partial n(x)} + \frac{\partial \zeta(x)}{\partial n(x)} + \gamma \frac{\partial R(x)}{\partial n(x)}.$$

Интеграл по S от функции $\frac{\partial (u_0 x_2 - v_0 x_1)}{\partial n}$ равен нулю, так как $(u_0 x_2 - v_0 x_1)$ — гармоническая в Q .

Если

$$Q_R^+ = Q^+ \cap \{|x| < R\}, \quad R \gg 1,$$

$$\partial Q_R^+ = S \cup S_R,$$

то для второго слагаемого имеем

$$\iint_{Q_R^+} \Delta \zeta(x) dx = \left(\int_S + \int_{S_R} \right) \frac{\partial \zeta(x)}{\partial n(x)} dS_x = 0,$$

где $\mathbf{n}(x)$ — внешняя к Q_R^+ единичная нормаль к границе ∂Q_R^+ .

Так как $\zeta(x)$ — ограниченная на бесконечности гармоническая функция, то

$$|\nabla \zeta(x)| = O(|x|^{-2}), \quad x \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{S_R} \frac{\partial \zeta(x)}{\partial n(x)} dS_x \right| \leq \frac{C}{R^2} \int_{S_R} dS_x \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$, откуда получим

$$\left| \int_S \frac{\partial \zeta(x)}{\partial n(x)} dS_x \right| = 0.$$

Для третьего слагаемого имеет место разложение

$$R(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x| \int_S \varphi^*(x) dS_x + \alpha(x),$$

$$x \in Q^+,$$

где $\alpha(x)$ — гармоническая в Q^+ и стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \frac{\partial R(x)}{\partial n(x)} dS_x &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_R} \frac{\partial \ln|x|}{\partial n(x)} dS_x \int_S \varphi^*(x) dS_x + o(1), \\ x &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{S_R} \frac{\partial \ln|x|}{\partial n(x)} dS_x = 2\pi,$$

окончательно получаем

$$\Gamma = \gamma \int_S \varphi^*(x) dS_x.$$

Следовательно, для представления (4.1) циркуляция Γ может принимать любые значения (вместе с множителем γ), и функция тока $\Psi(x)$ определяет общее решение задачи обтекания. В численном эксперименте можно подобрать такое значение, что будет выполняться условие Жуковского–Чаплыгина обтекания крыловидного профиля.

Замечание 1. Традиционный алгоритм решения внешней задачи Дирихле состоит в

представлении решения в виде потенциала двойного слоя и решении на границе интегрального уравнения, правая часть которого должна быть ортогональна плотности потенциала Робена, то есть требуется знать решение задачи Робена.

Здесь представлен вариационный алгоритм решения указанного уравнения, решение которого определяется в подпространстве $L_2^C(S)$ с использованием системы функций $\{\beta_m^+(x)\}_1^M$, полной в этом подпространстве. Решения задачи Робена не требуется.

Замечание 2. В теории крыла для решения внешней задачи Дирихле были разработаны методы, сводящие ее к решению гиперсингулярных уравнений и не требующие использования задачи Робена [3].

Литература

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
2. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 134 с.
3. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: Янус, 1995. 520 с.

Ключевые слова: задача Дирихле, потенциал Робена, задача обтекания.

Статья поступила 12 сентября 2011 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Токарев Н. М., Лежнев В. Г., 2011