УДК 551.251:519,711.3, 539.3

МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ В МЕХАНИКЕ ГОРНЫХ ПОРОД И ГЕОДИНАМИКЕ [1]

***Аннин Б. Д.*[2], *Коробейников С. Н.*[3]**

METHODS OF ELASTICITY AND PLASTICITY THEORY IN ROCK MECHANICS AND GEODYNAMICS

Annin B.D., Korobeynikov S.N.

Application of methods of elasticity and plasticity theory in problems of deformation and fracture of rocks and a collision of lithospheric slabs is discussed.

Keywords: elasticity, plasticity, rocks, lithospheric plates, a collision of plates, underthrust, subduction.

Модели деформирования, критерии прочности и разрушения геоматериалов широко применяются для поиска полезных ископаемых, проектирования объектов для их добычи, прогнозирования природных процессов в земной коре. Трудность заключается в выборе модели, критериев прочности и разрушения, а также входящих в них параметров. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Трансверсально–изотропная модель геоматериалов

.

Для описания анизотропного упругого деформирования горных пород часто используют модель трансверсально изотропного упругого тела

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\,\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda'\varepsilon_{33},$$

$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda'\varepsilon_{33},$$

$$\sigma_{33} = \lambda'(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\lambda' + 2\mu')\varepsilon_{33},$$

$$\sigma_{23} = 2G'\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2G'\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}.$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij}, $ij = 1, 2, 3$ — компоненты симметричных тензоров напряжений и деформаций соответственно в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3, причем плоскость x_1, x_2 — плоскость изотропии; λ, μ, $\lambda'\mu'$, G' — суть независимые параметры. Анализ экспериментальных данных показывает [1], что для ряда горных пород (филит, сильвинит, зубер, магматит, плагиогранит, песчаник и др.) выполняется условие Гассмана [2]

$$\frac{1}{G'} = \frac{\lambda + 2\mu + 3\lambda' + 2\mu'}{(\lambda + 2\mu)\,(\lambda' + 2\mu') - \lambda'^2}. \qquad (1.1)$$

Оно также выполняется для горной породы периодического строения Верхнекамского месторождения соли, где слои каменной соли чередуются со слоями корнелита.

В случае выполнения условия (1.1) вектор перемещения $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ в динамической задаче имеет представление

$$u_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + \alpha\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3},$$

$$u_2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3},$$

$$u_3 = \alpha\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},$$

где $\alpha \equiv (G' + \lambda')/(\lambda + 2\mu - G') \neq 1$, функции $\varphi_i\,(x_1, x_2, x_3, t)\,i = 1, 2$, удовлетворяют уравнениям

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-246.2012.1).

[2]Аннин Борис Дмитриевич, ак. РАН, заведующий отделом механики деформируемого твердого тела Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН; email: annin@hydro.nsc.ru.

[3]Коробейников Сергей Николаевич, д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией механики разрушения Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН; e-mail: korob@hydro.nsc.ru.

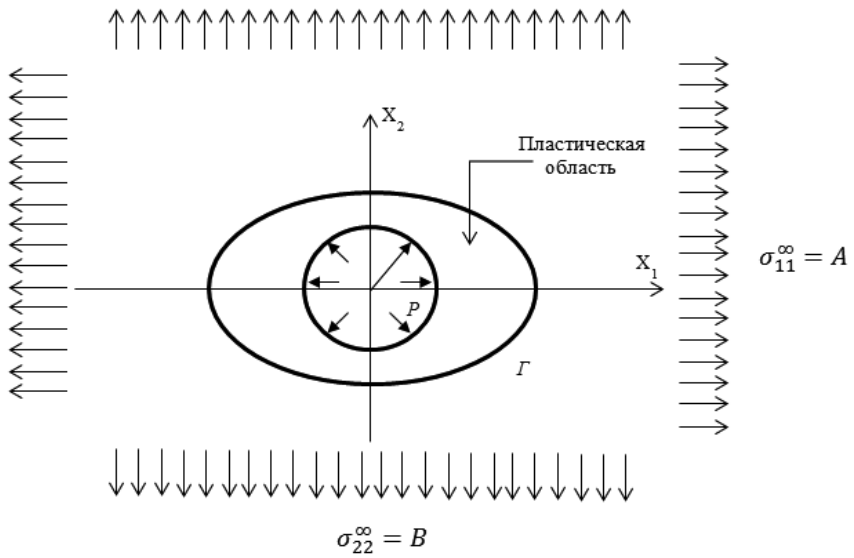


Рис. 1

$$(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2}\right) + \left(\lambda' + 2\mu'\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_3^2} = \rho\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2^2}\right) + G'\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3^2} = \rho\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2},$$

а функции $\psi_i(x_1, x_2, x_3 t)$, $i = 1,\ 2$ удовлетворяют уравнению

$$G'\left(\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_3^2}\right) = \rho\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} \qquad (1.2)$$

и условию

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} = 0.$$

Следовательно, функции ψ_i можно взять в виде

$$\psi_1 = \frac{\partial\chi}{\partial x_1}, \psi_2 = \frac{\partial\chi}{\partial x_2},$$

где $\chi = \chi(x_1, x_2, x3, t)$ удовлетворяет уравнению (1.2). Это позволяет исследовать аналитически задачи о распространении упругих волн в трансверсально изотропной среде. Описание упруго-пластического деформирования трансверсально-изотропной среды дано в [3].

2. Зона пластичности около круговой горной выработки

Плоская упругопластическая задача распределения напряжений около круглого отверстия радиуса R (рис. 1) состоит [4] в определении функций σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} в бесконечной плоскости (x_1, x_2), удовлетворяющих уравнениям равновесия во всей плоскости

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$$

условию

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 = f(\sigma)^2,$$

$$\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$$

в пластической области;

уравнению

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$$

и неравенству

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 < f(\sigma)^2$$

в упругой области, где Δ — оператор Лапласа.

При этом напряжения σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} непрерывны при переходе через неизвестную упругопластическую границу Г. На окружности задано постоянное нормальное давление p, а на бесконечности компоненты тензора напряжений равны $\sigma_{11} = A, \sigma_{12} = 0$, $\sigma_{22} = B$ причем $A \neq B$.

Функция $f(\sigma)$ определяет зависимость предела текучести от среднего напряжения,

что характерно для горных пород. Если взять

$$f(\sigma) = \\ = 2K\left[\left[1-\exp\left(-\frac{\sigma_0}{K}+\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2K}\right)\right]\right], \quad (2.1)$$

где постоянные σ_0, K определяются из [5], то зависимость (2.1) хорошо аппроксимирует экспериментальные данные для широкого класса горных пород. В частности для угля имеем K =7,04 MPa, σ_0 =0,32 MPa.

Для условия пластичности (2.1) упругопластическая задача решается аналитически [6], при этом упругопластическая граница L является эллипсом, полуоси которого зависят от R, σ_0, K, A, B, P.

3. Моделирование контактного взаимодействия блоков при сжатии

Массив горных пород состоит из достаточно однородных блоков, разделенных прослойками с более слабыми прочностными свойствами. Наличие таких прослоек и их характеристики оказывают значительное влияние на деформирование среды в целом, в частности на распространение в ней упругих волн, а также на разрушение блоков, составляющих среду. Приведем результаты экспериментальных исследований влияния прослоек, состоящих из мелких частиц материала блоков, на деформирование среды в целом и разрушение блоков, из которой она состоит [7, 8]. Прослойка представляет собой множественные мелкие неровности на поверхностях контакта либо тонкий слой осколков различного размера, разделяющий блоки с ровными торцами. В качестве модели участка блочной среды использованы пары соприкасающихся торцами цементных цилиндров, подверженных одноосному квазистатическому сжатию вдоль оси симметрии. Для сравнения рассматривается пара блоков с ровными поверхностями контакта без прослойки. Измерялись относительное уменьшение длины пары блоков, приложенная сила и максимальная сила до начала разрушения блоков.

В случае, когда прослойка отсутствует, пара нагружается упруго до момента разрушения, соответствующего разделению обоих блоков на части продольными трещинами. При наличии равномерно распределенных неровностей сначала происходит частичное разрушение последних, после чего возникают трещины в блоках. Трещины зарождаются в местах контакта не разрушившихся относительно крупных неровностей с торцом противоположного блока. При этом пара выдерживает большую нагрузку, чем пара с гладкими торцами. В случае неравномерного распределения неровностей их скопление служит концентратором напряжений, инициирующим разрушение блоков при нагрузках. не превышающих предельную нагрузку первого случая. Если же имеется осколочная прослойка, разрушению блоков предшествует полное разрушение осколков. Полученная порошковая прослойка между блоками способствует оптимальному перераспределению напряжений, в результате чего пара с осколочной прослойкой выдерживает максимальную нагрузку из всех трех рассмотренных случаев (рис. 2).

Рассмотрено два варианта численного моделирования пары блоков упругого материала с неровными поверхностями контакта, подвергаемых импульсному нагружению на одном из торцов. В одном случае зона контакта неровных поверхностей моделировалась цепью отверстий, где перемычки между отверстиями заменяют соприкасающиеся выступы на поверхностях контактирующих торцов. Во втором случае блоки разделены сплошной прослойкой упругого материала, модуль упругости которого меньше модуля упругости материала блоков. Ширина равна диаметру отверстий в первой модели. Показано, что вторая модель, существенно более простая, чем первая, дает решение, достаточно близкое к решению по первой модели при условии что

$$\frac{H}{h} \approx \frac{E}{E_*},$$

где E — модуль Юнга материала блоков, E_* — модуль Юнга материала прослойки, H — ширина блока, h — суммарная ширина промежутков между отверстиями.

4. Моделирование хрупкого разрушения упругих блоков

Рассмотрим алгоритм численного решения нелинейных задач геомеханики [9].

Пусть t — монотонно возрастающий параметр, характеризующий процесс деформирования тела. В динамических задачах под t понимается естественное время, а в квазистатических задачах t может означать внешнюю силу, характерное перемещение и т.д. Про-

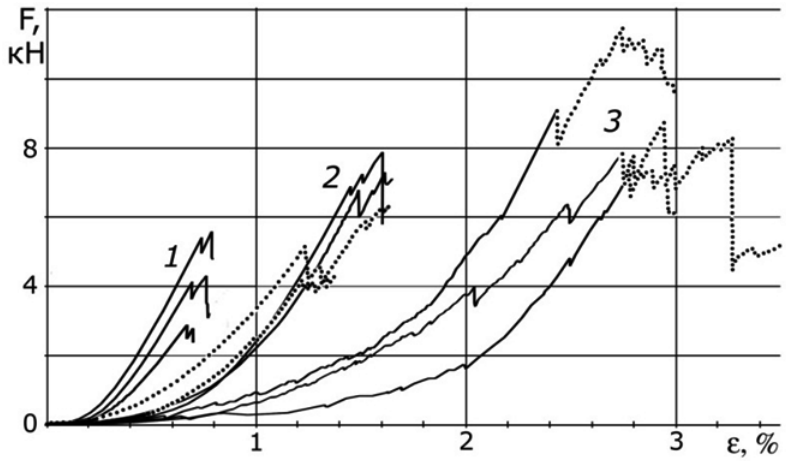


Рис. 2. Зависимость относительного сжатия пары блоков от приложенной силы для случаев *1*) ровных контактных поверхностей, *2*) бугристых контактных поверхностей, *3*) наличия осколочной прослойки

водя дискретизацию уравнений движения по пространственным переменным методом конечных элементов, приходим к задаче Коши с системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [10]

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{R},\\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{V}_0.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{M}$ — симметричная матрица масс, $\mathbf{U}$ — вектор узловых перемещений, $\mathbf{F}$ — вектор внутренних сил, обусловленных напряжениями в теле, $\mathbf{R}$ — вектор внешних сил, который учитывает действие объемных, поверхностных, сосредоточенных сил, а также сил, действие которых эквивалентно заданным перемещениям; $\mathbf{U}_0$, $\mathbf{V}_0$ — заданные векторы узловых начальных перемещений и их скоростей; здесь и далее точка над величиной обозначает производную этой величины по t. Число уравнений в системе (4.1) равно числу независимых степеней свободы ансамбля узловых точек.

Зависимость $\mathbf{F}$ от $\mathbf{U}$ задается посредством определяющих соотношений

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})],$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — векторы напряжений и деформаций, составленные из компонент одноименных тензоров. Эта зависимость может быть как явной (например, для упругого материала), так и неявной (например, для материала с хрупким разрушением). В последнем случае в определяющие соотношения также входят внутренние параметры, учитывающие историю деформирования. Таким образом,

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}\{\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})]\}.$$

Для интегрирования уравнений движения используется метод конечных разностей.

Рассмотрим материал с возможностью хрупкого разрушения при действии растягивающих напряжений.

Модель хрупкого материала определяется тремя константами: E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, σ_t — предел прочности материала при растяжении, а также двумя внутренними параметрами, определенными в каждой точке интегрирования (при определении векторов и матриц элементов интегралы приближаются квадратурными формулами Гаусса–Лежандра) в каждый дискретный момент времени t:

а) n_c^i — параметр i-й ($i = 1, 2, 3$) трещины (предполагается, что в каждой материальной точке тела могут существовать либо одна, либо две, либо три трещины, плоскости которых ортогональны друг другу), так что $n_c^i = 0$ для неповрежденного материала, $n_c^i = 1$ в том случае, если трещина открыта и $n_c^i = 2$, если трещина закрыта.

б) ϕ_{ij} — углы ($i, j = 1, 2, 3$) наклона i-го главного направления по отношению к j-й оси декартовой системы координат.

В начальный момент интегрирования уравнений движения ($t = 0$) материал предполагается неповрежденным и во всех точках интегрирования полагаются ${}^0n_c^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), углы ϕ_{ij} не определяются. Для неповрежденного материала определяющие

соотношения принимают вид закона Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E \boldsymbol{\varepsilon}$$

с матрицей $\mathbf{C}^E$, элементы которой определяются двумя константами: E и ν.

Пусть в момент времени t известны значения внутренних параметров ${}^t n_c^i$, ϕ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, а в момент времени $t + \Delta t$ — значения компонент вектора деформаций ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}$, которые получаются по известным значениям матрицы ${}^t\mathbf{C}$ и вектора ${}^t\boldsymbol{\sigma}$. Приведем алгоритм определения матрицы ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}$ и вектора ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$.

1) *Материал не поврежден* $({}^t n_c^i = 0,$ $i = 1, 2, 3)$. Определяются пробные значения компонент вектора напряжений

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{E\ t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Находим главные значения $\tilde\sigma_1 \geqslant \tilde\sigma_2 \geqslant \tilde\sigma_3$ и главные направления (т.е. определяем значения углов ϕ_{ij}). Сравниваем значение $\tilde\sigma_1$с пределом прочности $\sigma_t > 0$.

1.1) Если $\tilde\sigma_1 < \sigma_t$, то в данной точке материал предполагается неповрежденным. Окончательно определяем

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{C} = \mathbf{C}^E, \quad {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Полагаем ${}^{t+\Delta t}n_c^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, углы $\phi_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ не запоминаем.

1.2) Если $\tilde\sigma_1 \geqslant \sigma_t$ и $\tilde\sigma_3 \leqslant \tilde\sigma_2 < \sigma_t$, то предполагается, что в данной материальной точке образовалась трещина, плоскость которой ортогональна оси первого главного напряжения. Корректируем главные напряжения

$${}^{t+\Delta t}\sigma_1 = 0, \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_2 = \tilde\sigma_2, \quad {}^{t+\Delta t}\sigma_3 = \tilde\sigma_3.$$

Определяем матрицу ортотропного упругого материала с модулем Юнга, ослабленным в первом главном направлении. Преобразованием компонент вектора напряжения и матрицы определяющих соотношений от их значений в главных осях к значениям в осях декартовой системы координат получаем вектор напряжений ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ и матрицу определяющих соотношений ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}$. Полагаем ${}^{t+\Delta t}n_c^1 = 1$, ${}^{t+\Delta t}n_c^2 = {}^{t+\Delta t}n_c^3 = 0$ и запоминаем значения углов ϕ_{1j} $(j = 1, 2, 3)$.

1.3) Если $\tilde\sigma_1 \geqslant \tilde\sigma_2 \geqslant \sigma_t$и $\tilde\sigma_3 < \sigma_t$, то предполагается, что в данной материальной точке образовались две трещины, плоскости которых ортогональны друг другу (плоскость каждой трещины ортогональна соответствующей оси главного напряжения). Определение вектора напряжений ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ и матрицы ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}$ проводится так же, как в случае 1.2. Полагаем ${}^{t+\Delta t}n_c^1 = {}^{t+\Delta t}n_c^2 = 1$, ${}^{t+\Delta t}n_c^3 = 0$ и запоминаем значения ϕ_{1j}, ϕ_{2j} $(j = 1, 2, 3)$.

1.4) Если $\tilde\sigma_3 \geqslant \sigma_t$, то в данной точке материал предполагается полностью разрушенным, при этом

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} = \mathbf{0}.$$

Полагаем ${}^{t+\Delta t}n_c^i = 1$, $(i = 1, 2, 3)$, значения углов ϕ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ не запоминаем.

2) *Материал имеет только одну трещину* $({}^t n_c^1 \neq 0,$ ${}^t n_c^2 = {}^t n_c^3 = 0)$. Пользуясь законом Гука определяем два пробных главных напряжения в плоскости первой трещины: $\tilde\sigma_2 \geqslant \tilde\sigma_3$. Сравниваем эти напряжения с пределом прочности σ_t.

2.1) Если $\tilde\sigma_2 < \sigma_t$, то в материальной точке остается одна трещина. Устанавливаем состояние трещины: является ли трещина открытой или она закрылась. Для этого, значение ${}^{t+\Delta t}\tilde\varepsilon_{11}$ компонента тензора деформации в главных осях тензора напряжений (деформация в направлении, ортогональном плоскости трещины) сравниваем с нулем.

2.1.1) Если ${}^{t+\Delta t}\tilde\varepsilon_{11} < 0$, то предполагаем, что трещина закрыта («залечена»). Вектор напряжения ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ и матрица ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}$ определяются из закона Гука

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{E\ t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{C} = \mathbf{C}^E.$$

Полагается ${}^{t+\Delta t}n_c^1 = 2$, ${}^{t+\Delta t}n_c^2 = {}^{t+\Delta t}n_c^3 = 0$, значения углов ϕ_{1j} $(j = 1, 2, 3)$ не изменяются.

2.1.2) Если ${}^{t+\Delta t}\tilde\varepsilon_{11} \geqslant 0$, то предполагается, что трещина открыта. Определение вектора напряжений ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ и матрицы ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}$ проводится точно так же, как в случае 1.2; полагается ${}^{t+\Delta t}n_c^1 = 1$, ${}^{t+\Delta t}n_c^2 = {}^{t+\Delta t}n_c^3 = 0$, значения углов ϕ_{1j} $(j = 1, 2, 3)$ не изменяются.

2.2) Если $\tilde\sigma_2 \geqslant \sigma_t$и $\tilde\sigma_3 < \sigma_t$, то в данной материальной точке возникает вторая трещина, плоскость которой ортогональна второй главной оси. Определение вектора ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$, матрицы ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}$ и параметров n_c^i и ϕ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ проводится сочетанием алгоритмов, представленных для случаев 1 и 2.1.

2.3) Если $\tilde\sigma_2 \geqslant \tilde\sigma_3 \geqslant \sigma_t$, то в данной точке материал предполагается разрушенным и справедливы равенства пункта 1.4.

3) *Материал разрушен с потерей несущей способности.* Предполагается, что при полном разрушении материал ни при каких условиях не может восстановить несущую способность. Вектор напряжений ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$

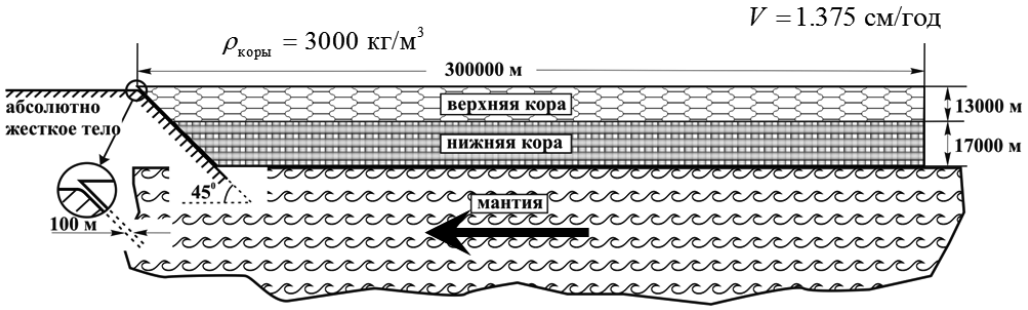


Рис. 3. Плоская модель континентальной коры в начальный момент времени

и матрица ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}$ определяется по соотношениям пункта 1.4, полагается ${}^{t+\Delta t}n_c^i = 1$ ($i = 1, 2, 3$), значения углов ϕ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) не запоминаются.

Приведенные уравнения позволяют решать три класса задач геомеханики, учитывающих возможность хрупкого разрушения упругих блоков:

а) *Задачи сейсмики.* Этот класс задач по распространению волн в упругой среде при высокоскоростном внешнем воздействии выгодно решать по явной схеме интегрирования уравнений движения с использованием диагональной матрицы $\mathbf{M}$. Ограничение устойчивости схемы на шаг во времени Δt компенсируется сравнительно малым числом операций для определения вектора ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ в (4.1).

б) *Задачи низкоскоростного деформирования горных массивов.* Для решения этого класса задач выгодно использовать неявную схему Ньюмарка решения уравнения (4.1).

в) *Задачи квазистатического деформирования горных массивов.* Эти задачи надо решать пошаговым интегрированием уравнений равновесия, которые получаются из уравнений (4.1) пренебрежением инерционным членом.

5. Моделирование коллизии плит [11–20]

Моделирование основано на численном решении методом конечных элементов (МКЭ) уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ) с использованием пакета MSC.Marc. В этом пакете реализованы все типы нелинейностей (геометрическая, физическая и контактная), используемые в формулировках уравнений, требуемых для математического моделирования геофизических процессов. Все задачи решаются в двумерной постановке в условиях плоской деформации.

При коллизии плит различают явления надвига и поддвига/субдукции. В первом случае изучают процессы деформирования и разрушения плит, приводящие к горообразованиям, а во втором случае рассматривают процессы «подслаивания» или глубокого погружения одной плиты под другую. Отметим, что в реальности эти процессы происходят одновременно, но при математическом моделировании в первых двух подходах авторы их искусственно разделяют для уменьшения больших математических и вычислительных трудностей одновременного учета обоих явлений, а в последнем подходе оба явления учитываются одновременно.

6. Надвиг деформируемой плиты на абсолютно жесткую плиту

Континентальная кора представляет область, состоящую из двух блоков. Участок области, моделирующий надвиг, определяется контактом между блоками, один из которых задается в виде абсолютно жесткого неподвижного упора с заданным углом наклона контакта 45°. Второй (деформируемый) блок двигается под действием заданного горизонтального перемещения со скоростью 1,375 см/год (рис. 3).

Предполагается, что деформируемая плита состоит из двух слоев, находящихся в жестком сцеплении. Материал верхнего слоя предполагается хрупким (см. п. 4), а материал нижнего слоя предполагается упругопластическим. Общий вид деформированного состояния в финальной стадии приведен на рис. 4.

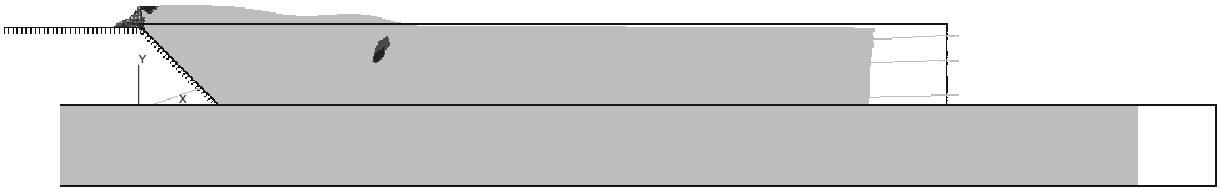


Рис. 4. Моделирование надвига при использовании *UL*-формулировки уравнений МДТТ, разрушенный материал коры обозначен темным цветом

7. Поддвиг/субдукция деформируемой плиты под абсолютно жесткую плиту

Целью исследований была разработка в рамках используемых уравнений МДТТ такой математической модели коллизии плит, при которой возможно явление глубокой субдукции, приводящей в реальных природных процессах к погружению плит в мантию на сотни километров. Левая (деформируемая) плита сближается с правой (абсолютно жесткой) плитой с постоянной скоростью 1,357 см/год (рис. 5). Предполагается, что материал плиты уплотняется непосредственно при погружении в мантию. При этом плотность материала изменяется от значения 3 000 кг/м^3 до значения 3 510 кг/м^3 (увеличивается на 17 %).

Материал мантии описывается идеальным упругопластическим материалом с поверхностью текучести Хубера–Мизеса с низким значением предела текучести, а для материала коры использовались различные модели пластичности с различными поверхностями текучести (Хубера–Мизеса, Друкера–Прагера с конической поверхностью текучести и с параболической поверхностью текучести). При рассмотрении дна деформируемой плиты в виде гладкой нижней поверхности численное моделирование показывает, что реализуется явление поддвига деформируемой плиты под жесткую плиту независимо от выбора модели пластичности. Явление субдукции реализуется только в том случае, если деформируемая плита изначально имеет выступ, который является пусковым механизмом этого явления (рис. 6).

8. Моделирование процесса формирования рельефа дневной поверхности в районе коллизии плит

В этом разделе оба процесса (надвига и субдукции) учитываются одновременно. При этом обе плиты моделируются деформируемыми телами, что позволяет определять форму дневной поверхности плит в районе их коллизии. Целью работы является сравнение рельефа дневной поверхности плит в районе их коллизии, полученной в результате математического моделирования, с рельефом, наблюдаемым в природе. Установлено их качественное и количественное соответствия, в то время как при раздельном моделировании надвига и поддвига/субдукции невозможно получить даже качественное соответствие.

При решении задачи коллизии плит задается горизонтальное движение торца левой плиты со скоростью 5 см/год (рис. 7). На рис. 8 представлен сценарий развития субдукции/поддвига плит, полученный в расчетах без учета трения между плитами. Из сравнения полученных в расчетах профилей дневной поверхности следует, что спустя около 1 млн лет после начала движения первоначальный сравнительно большой подъем $h_b \approx 2,3$ км становится незначительным, причем в расчетах без учета трения подъем практически исчезает, а при расчетах с учетом трения подъем h_c составляет до 1 км. Эта величина согласуется с наблюдаемой высотой хребта островной дуги ($1 \sim 2$ км) в Курило-Камчатской зоне субдукции. Однако, влияние трения на величину впадины не столь существенно. Для впадины получены значения около 5,5–6 км, что довольно близко к величине глубоководного желоба (около 7 км) в районе Курило-Камчатской зоны субдукции.

Литература

1. *Аннин Б. Д.* Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов // Сиб. журн. идустр. математики. 2009. Т. XII. № 3(39). С. 5–14.
2. *Gassmann F.* Introduction to seismic travel time in anisotropic media // Pure and Applied Geophysics. 1964. T. II Vol. 58. P. 63–112.

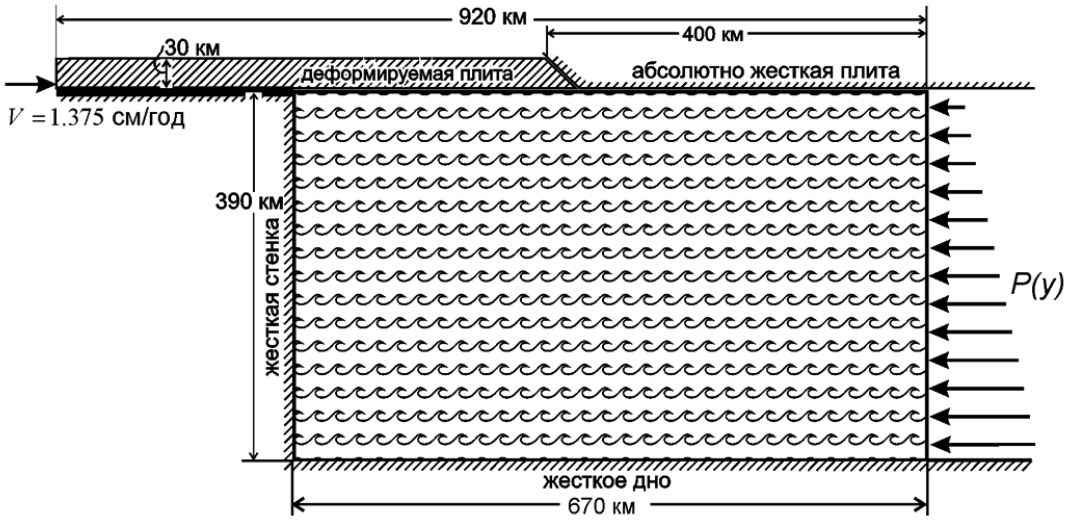


Рис. 5. Геометрические параметры области, включающие плиты и мантию до приложения веса в момент времени $t = 0$

3. *Аннин Б. Д.* Модели упругопластического деформирования трансверсально-изотропных материалов // Сиб. журн. идустр. математики. 1999. Т. 2, № 2(4). С. 3–7.
4. *Annin B. D., Cherepanov G. P.* Elastic-plastic problems. New York: ASME, 1988. 250 p.
5. *Протодьяконов М. М.* Обобщенные уравнения к предельным кругам напряжений Мора / В кн.: Исследование физико-механических свойств горных пород применительно к задачам управления горным давлением. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 27–38.
6. *Аннин Б. Д.* Одна упругопластическая задача при экспоненциальном условии пластичности // Инж. журн. АН СССР. 1966. № 6. С. 122–123.
7. *Аннин Б. Д., Карпов Е. В.* Моделирование процесса деформирования горных пород с неровными поверхностями контакта блоков в условиях квазистатического и динамического нагружения // Прикл. механика и техн. физика. 2007. Т. 48. № 3. С. 173–178.
8. *Опарин В. Н., Аннин Б. Д., Чугуй Ю. В. и др.* Методы и измерительные приборы для моделирования и натурных исследований нелинейных деформационно-волновых процессов в блочных массивах горных пород. Новосибирск: изд-во СО РАН, 2007. 320 с.
9. *Аннин Б. Д., Коробейников С. Н., Шутов А. В.* Моделирование хрупкого разрушения упругих блоков // Напряженно-деформированное состояние и сейсмичность литосферы. Тр. Всеросс. совещ. «Напряженное состояние литосферы, ее деформации и сейсмичность». Иркутск, Ин-т земной коры СО РАН, 26–29 августа 2003. С. 225–228.
10. *Коробейников С. Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
11. *Коробейников С. Н., Полянский О. П., Лиханов И. И., Свердлова В. Г., Ревердатто В. В.* Математическое моделирование надвига как причины формирования андалузит-кианитовой метаморфической зональности в Енисейском кряже // ДАН. 2006. Т. 408. № 4. С. 512–516.
12. *Коробейников С. Н., Ревердатто В. В., Полянский О. П., Свердлова В. Г., Бабичев А. В.* Оценка эффекта геометрической нелинейности при математическом моделировании тектонических процессов // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 278–293.
13. *Коробейников С. Н., Полянский О. П., Свердлова В. Г., Бабичев А. В., Ревердатто В. В.* Компьютерное моделирование поддвига и субдукции в условиях перехода габбро-эклогит в мантии // ДАН. 2008. Т. 420. № 5. С. 654–658.
14. *Бабичев А. В., Новиков И. С., Полянский О. П., Коробейников С. Н.* Компьютерное моделирование деформирования земной коры Горного Алтая в Кайнозое // Геология и геофизика. 2009. Т. 50. № 2. С. 137–151.
15. *Коробейников С. Н., Ревердатто В. В., Полянский О. П., Свердлова В. Г., Бабичев А. В.* Компьютерное моделирование поддвига и субдукции при столкновении плит // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12. № 1. С. 71–90.
16. *Полянский О. П., Коробейников С. Н., Бабичев А. В., Ревердатто В. В., Свердлова В. Г.* Компьютерное моделирование диапиризма гранитной магмы в Земной коре // ДАН. 2009. Т. 429. № 1. С. 1–5.

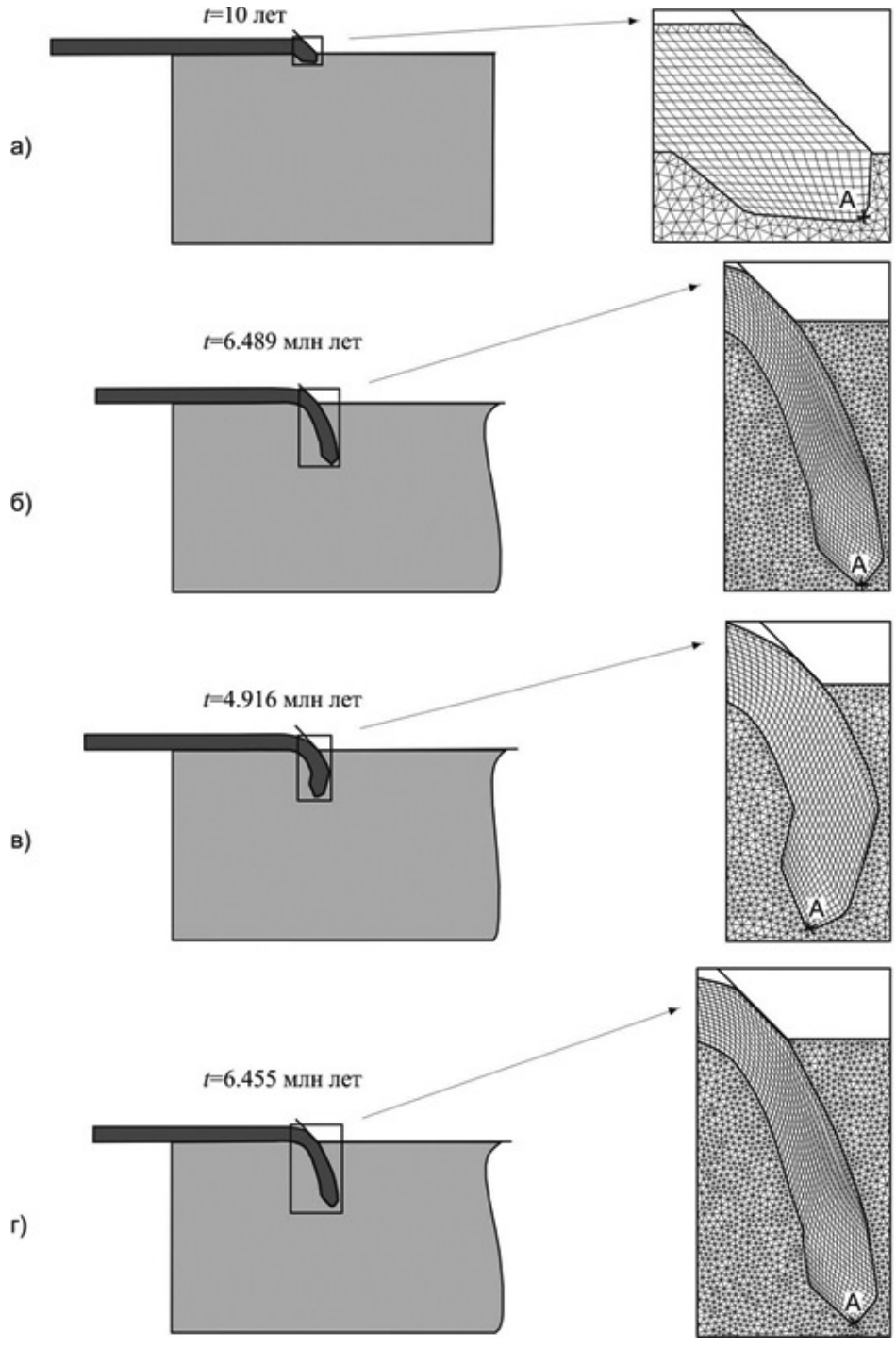


Рис. 6. Коллизия плит (модель деформируемой плиты с выступом на нижней поверхности): (*а*) расчетная область после решения вспомогательной задачи о приложении веса к плите; (*б*), (*в*), (*г*) деформированные конфигурации в финальные моменты времени в расчетах с поверхностями текучести: (*б*) Хубера–Мизеса, (*в*) конической Друкера–Прагера, (*г*) параболической Друкера–Прагера

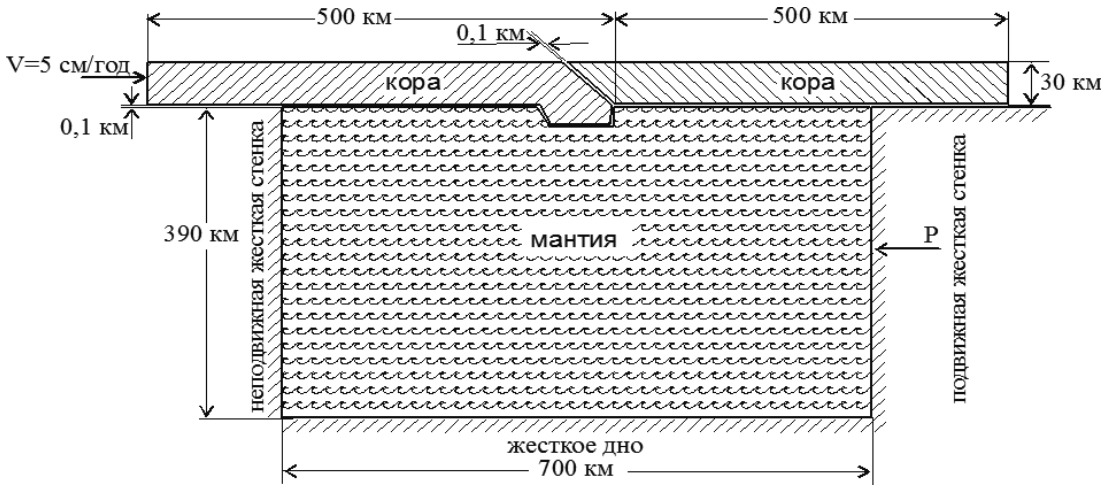


Рис. 7. Геометрические параметры области, включающие плиты и мантию до приложения веса

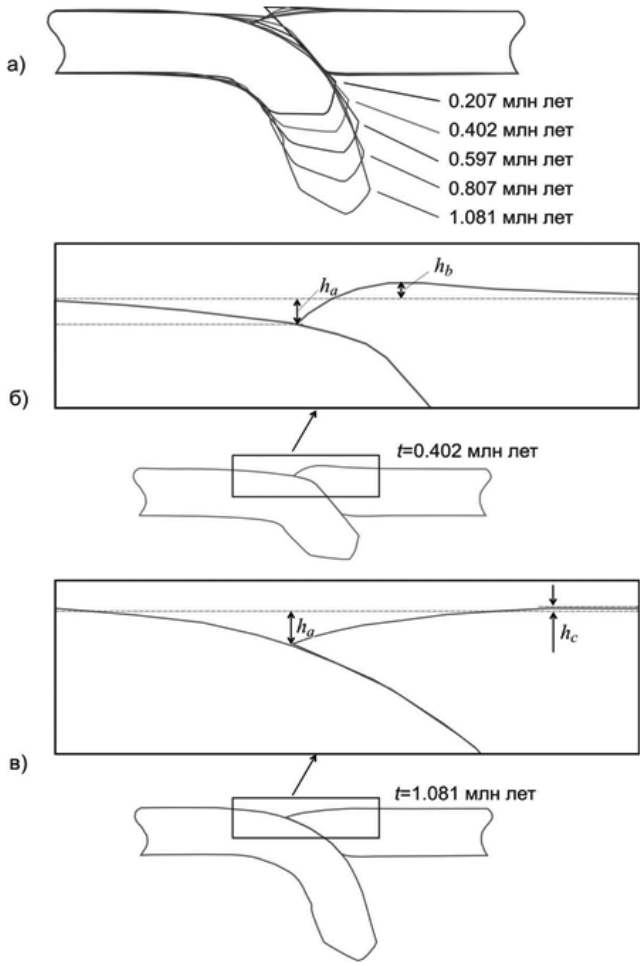


Рис. 8. Сценарий развития коллизии плит: ($а$) конфигурации деформированных плит в процессе их коллизии; ($б$), ($в$) конфигурации деформированных плит при $t = 0,402$ млн лет и при $t = 1,081$ млн лет

17. *Полянский О. П., Коробейников С. Н., Свердлова В. Г., Бабичев А. В., Ревердатто В. В.* Влияние реологии коры на характер субдукции плит по результатам математического моделирования // ДАН. 2010. Т. 430. № 4. С. 518–522.
18. *Ревердатто В. В., Бабичев А. В., Коробейников С. Н., Полянский О. П.* Определение глубины становления магматического интрузива на основании данных о распределении изоград в окружающей метаморфической зональности (модельное приближение) // ДАН. 2010. Т. 430. № 6. С. 802–805.
19. *Полянский О. П., Бабичев А. В., Коробейников С. Н., Ревердатто В. В.* Компьютерное моделирование гранитогнейсового диапиризма в земной коре: контролирующие факторы, длительность и температурный режим // Петрология. 2010. Т. 18. № 4. С. 450–466.
20. *Коробейников С. Н., Ревердатто В. В., Полянский О. П., Свердлова В. Г., Бабичев А. В.* О влиянии выбора реологического закона на результаты компьютерного моделирования субдукции плит // Сибирский журнал вычислительной математики. 2011. Т. 14. № 1. С. 71–90.

Ключевые слова: упругость, пластичность, горные породы, литосферные плиты, коллизия плит, поддвиг, субдукция.

Статья поступила 15 декабря 2011 г.
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск
© Аннин Б. Д., Коробейников С. Н., 2012