УДК 532.517

К ПРОБЛЕМЕ ПОСТРОЕНИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ[1]

Бабешко В. А.[2], Евдокимова О. В.[3], Бабешко О. М.[4], Иванов П. Б.[5], Шестопалов В. Л.[6], Шишкин А. А.[7], Плужник А. В.[8], Мухин А. С.[9]

TO THE PROBLEM OF GLOBAL MODELS CONSTRUCTION

Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Ivanov P. B., Shestopalov V. L., Shishkin A. A., Pluzhnik A. V., Mukhin A. S.

This work describes the usage of automorphism for the sphere presenting a combination of classic spheres. This way one may describe complex space configurations which simulate quite precisely the spheres occupied, for example, by planets, their lithosphere plates and not always of a classical character. The example of constructing block element for such sphere is given in the work.

Keywords: block element method, boundary value problem, automorphism, pseudo differential equation, complicated dampen.

При построении методом блочного элемента представлений решений граничных задач для тел, занимающих сложные области, не всегда удается просто обеспечить выполнение автоморфизма многообразий с краем, лежащего в основе метода. В работах [1–5] показаны приемы применения автоморфизма для различных граничных задач. В работе [6] дано пояснение возникновения автоморфизма в факторизационных методах и систематизированы способы его реализации.

В настоящей работе излагается применение автоморфизма для области, являющейся комбинацией классических областей. Таким путем можно описывать сложные пространственные конфигурации, достаточно точно моделирующие области, занятые, например, планетами и не всегда являющиеся классическими.

1. Способ построения псевдодифференциальных уравнений основан на требовании автоморфизма многообразий с краем, то есть

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (11-08-00381) программы Юг России, проекты (11-08-96502), (11-08-96503), (11-08-96506), (11-08-96504), (11-08-96522), (11-08-96505), проекта НШ-914.2012.1, проекта ФЦП 2009-1.5-503-004-006, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН, государственного контракта от 1 сентября 2010 г. № 16.740.11.0135 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013.

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko@kubsu.ru.

[3]Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[4]Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[5]Иванов Павел Борисович, заместитель начальника ГУ МЧС по Краснодарскому краю; e-mail: ivanov_p@rambler.ru.

[6]Шестопалов Валерий Леонидович, канд. техн. наук, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН; e-mail: vlshestopalov@gmail.com.

[7]Шишкин Алексей Александрович, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[8]Плужник Андрей Валерьевич, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

[9]Мухин Алексей Сергеевич, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: muhin@mail.kubsu.ru.

носителей, на которых поставлена граничная задача. Основанием для выполнения автоморфизма является теорема, доказательство которой впервые опубликовано в [7]. Однако в некоторых частных случаях псевдодифференциальные уравнения удается построить, не прибегая к автоморфизму. Дадим краткое изложение основных особенностей автоморфизма [6].

На примере скалярной граничной задачи в выпуклой области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ для эллиптического дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами методом Винера-Хопфа строится псевдодифференциальное уравнение граничной задачи и изучается его связь с автоморфизмом. Доказано, что выполнение автоморфизма и обращение в нуль псевдодифференциального уравнения являются эквивалентными требованиями.

Описанная выше граничная задача в исходной декартовой системе координат дается уравнением

$$Q(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \\ = \sum_{m=1}^{2M}\sum_{p=1}^{2P}\sum_{n=1}^{2N} A_{mpn}\varphi^{(m)(p)(n)}_{x_1x_2x_3} = 0, \quad (1)$$

$$A_{mpn} = \mathrm{const}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3), \\ \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Не повторяя традиционную процедуру сведения граничной задачи к функциональному уравнению, запишем его в виде [1]

$$K^\nu(\alpha^\nu)\Phi^\nu(\alpha^\nu) = \iint\limits_{\partial\Omega} \omega^\nu, \quad (2)$$

$$-Q(-i\alpha_1^\nu, -i\alpha_2^\nu, -i\alpha_3^\nu) \equiv K^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu).$$

где ω^ν — внешняя форма, порождаемая дифференциальным уравнением на многообразии Ω, зависящая от всех производных функции φ вплоть $2N-1$ порядка включительно, рассматриваемых на границе $\partial\Omega$; $K^\nu(\alpha^\nu) = K^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu)$ — полином трех комплексных переменных в системе координат $\mathbf{x}^\nu$ касательного расслоения границы, α_1^ν, α_2^ν, α_3^ν — параметры преобразования Фурье, $\Phi^\nu(\alpha^\nu)$ — преобразование Фурье искомой функции граничной задачи. Ось x_3^ν направлена по нормали к границе.

Обозначим через $\alpha_{3r\pm}^\nu = \alpha_{3r\pm}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)$ — нули полинома $K^\nu(\alpha^\nu) = K^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3^\nu)$, лежащие в верхней полуплоскости, при знаке плюс, и в нижней — при знаке минус, полагая их однократными. Считаем, что число нулей каждой группы равно N в каждой системе координат. Будем также считать, что некоторый участок $\partial\Omega_0$ границы $\partial\Omega$ лежит в плоскости $x_3^\nu = 0$. Дополнение этого участка до всей границы обозначим $\partial\Omega_1$.

Согласно дифференциальному методу факторизации, соотношения (2) должны выполняться в каждой системе координат $\mathbf{x}^\nu$ касательного расслоения границы [1]. Учитывая, что Ω всегда расположена в области $x_3^\nu \leqslant 0$, соотношения (2) можно переписать в виде

$$K^\nu(\alpha^\nu)\Phi_-^\nu(\alpha^\nu) = F_-^\nu, \quad F_-^\nu = \iint\limits_{\partial\Omega} \omega^\nu. \quad (3)$$

Здесь используется традиционное для факторизационных методов обозначение функций, регулярных в верхней (знак плюс) или нижней (знак минус) полуплоскостях. Полученное соотношение является неполным функциональным уравнением Винера–Хопфа в связи с отсутствием второй неизвестной функции, регулярной в верхней полуплоскости [8, 9].

Применим к нему технику решения функциональных уравнений Винера–Хопфа [8, 9]. Решение будем искать в классе медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s$. Осуществим дифференциальную факторизацию коэффициента $K^\nu(\alpha^\nu)$ характеристического уравнения (2) как функции параметра α_3^ν.

$$K^\nu(\alpha^\nu) = K_+^\nu(\alpha^\nu)K_-^\nu(\alpha^\nu),$$

$$K_\pm^\nu(\alpha^\nu) = \prod_{r=1}^{N}(\alpha_3^\nu - \alpha_{3r\mp}^\nu).$$

Разделим уравнение (3) на $\mathrm{K}_+^\nu(\alpha^\nu)$ и введем обозначения

$$\left[K_+^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} F_{-1}^\nu = \\ = \left[K_+^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} \iint\limits_{\partial\Omega_1} \omega^\nu = D^\nu + T^\nu,$$

$$\left[K_+^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} F_{-0}^\nu = \\ = \left[K_+^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} \iint\limits_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\omega}^\nu = L^\nu + B^\nu,$$

$$F_-^\nu = F_{-0}^\nu + F_{-1}^\nu.$$

Здесь D^ν — полином переменного α_3^ν порядка $N-1$ с коэффициентами в виде экспонент, зависящих от α_3^ν, убывающих в нижней полуплоскости; T^ν — остаток от деления функций F_{-1}^ν на $K_+^\nu(\alpha^\nu)$; L^ν — полином с коэффициентами, зависящими от α_1^ν, α_2^ν; B^ν — рациональная функция, представляющую собой остаток от деления полиномов F_{-0}^ν на $K_+^\nu(\alpha^\nu)$.

Применив обычную технику факторизации [8, 9], приходим к соотношениям

$$\Phi_-^\nu(\alpha^\nu) = \left[K_-^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} \times \\ \times \left[D^\nu + L^\nu + T_-^\nu + B_-^\nu + G\right], \quad (4)$$

$$T_+^\nu + B_+^\nu - G = 0. \quad (5)$$

G — полином порядка $N-1$ переменного α_3^ν с произвольными коэффициентами, возникающий в связи с применением теоремы Лиувилля об оценке целой функции во всей плоскости [8,9]. Коэффициенты зависят от параметров α_1^ν, α_2^ν.

При построении формул (4), (5) использованы соотношения факторизации в виде суммы аналитических функций, заданных в некоторой полосе регулярности, содержащей вещественную ось $\operatorname{Im}\alpha_3^\nu = 0$, имеющие вид [8, 9]

$$\left[K_+^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} T^\nu = T_+^\nu + T_-^\nu,$$

$$\left[K_+^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} B^\nu = B_+^\nu + B_-^\nu.$$

2. Произведем некоторый анализ формул (4), (5).

Определение 1. Назовем псевдодифференциальным уравнением граничной задачи в методе блочного элемента соотношение

$$T_+^\nu + B_+^\nu. \quad (6)$$

Определение 2. Назовем автоморфизмом многообразия граничной задачи в методе блочного элемента соотношение

$$\begin{gathered} \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\} \notin \Omega. \end{gathered} \quad (7)$$

Теорема. В методе блочного элемента для граничной задачи (1) условие выполнения автоморфизма и обращение в нуль псевдодифференциального уравнения эквивалентны.

Приведем несколько способов доказательства этой теоремы.

1) Рассмотрим вначале область Ω, отличную от полупространства.

Тогда из уравнения (4) следует, что выполнение условия (7) возможно лишь при условии $G = 0$. Отсюда следует (6).

Обратно, если имеет место соотношение (6), то из формулы (5) следует равенство $G = 0$, что обеспечивает автоморфизм.

Рассмотрим теперь случай, когда область Ω является полуплоскостью. В этом случае соотношения (4), (5) принимают вид

$$\Phi_-^\nu(\alpha^\nu) = \left[K_-^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} \left[L^\nu + B_-^\nu + G\right], \quad (8)$$

$$B_+^\nu - G = 0. \quad (9)$$

Соотношение (8) обеспечивает автоморфизм, так как функция $\left[K_-^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} G$ является преобразованием Фурье функции с носителем в области Ω.

Рассмотрим соотношение (9). Как функция параметра α_3^ν оно представляет собой сумму рациональной функции и полинома. Равенство нулю для всех α_3^ν, обеспечивается тогда и только тогда, когда имеют место равенства

$$B_+^\nu = 0, \quad G = 0.$$

Для доказательства обратного исключим из соотношений (8), (9) полином G. Получим выражение вида

$$\Phi_-^\nu(\alpha^\nu) = \left[K_-^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} \left[L^\nu + B_-^\nu + B_+^\nu\right],$$

Из последней формулы видно, что функция $\varphi(\mathbf{x})$ будет иметь носитель в области Ω тогда и только тогда, когда обращается в ноль псевдодифференциальное уравнение, т.е. $B_+^\nu = 0$.

2) Второе доказательство основано на представлении функционального уравнения (3) в виде

$$\Phi_-^\nu(\alpha^\nu) = \left[K^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} F_-^\nu \quad (10)$$

и последующей факторизации в виде суммы правой части, что дает соотношения

$$\begin{gathered} \left[K^\nu(\alpha^\nu)\right]^{-1} F_-^\nu = M_+^\nu + M_-^\nu, \\ \Phi_-^\nu(\alpha^\nu) = M_-^\nu, \\ M_+^\nu = 0. \end{gathered} \quad (11)$$

Доказательство теоремы очевидно.

3) Третий способ предполагает непосредственное вычисление представления решения вне области Ω в локальной системе координат и наложение требования обращения его в нуль, то есть выполнение автоморфизма.

В результате преобразований из этого условия получаются псевдодифференциальные уравнения [1, 10]. Все три способа приводят к одним и тем же результатам.

Доказанная теорема обобщается на случай систем дифференциальных уравнений в частных производных. В общем, векторном случае, справедлива

Теорема. В методе блочного элемента для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами условие выполнения автоморфизма и обращение в нуль псевдодифференциального уравнения эквивалентны.

Доказательство теоремы аналогично приведенным выше, однако имеет свою специфику. Ограничимся некоторыми замечаниями.

Замечание. Кажущийся наиболее доступным для построения псевдодифференциального уравнения второй способ, дающий в векторном случае матричное представление псевдодифференциального уравнения (11), на деле дает вырожденную матрицу M_+^ν и извлечение из нее независимых соотношений является достаточно сложной задачей [11].

Первый метод является более предпочтительным в сочетании с факторизацией полиномиальных матриц-функций, представленной в работах [12,13]. Третий метод является наиболее общим, т.к. его можно использовать не только в декартовых, но и в криволинейных координатах, сочетая при этом с факторизацией матриц-функций. Как известно, класс граничных задач, допускающих сведение к уравнениям типа Винера–Хопфа, весьма ограничен. В частности, в криволинейных координатах это большая редкость. Поэтому не стоит надеяться на возможность получения функциональных уравнений, подобных (3). В связи с этим предпочтительно строить псевдодифференциальные уравнения, рассматривая автоморфизм многообразий как более доступный для анализа прием, особенно когда речь идет о сложных по постановке граничных задачах для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Однако, как сказано выше, использование этих теорем оправдано только в связи с доказательством теоремы о граничных свойствах решений исследуемых задач, доказанной в [7].

3. В качестве примера на применение автоморфизма к неклассическим областям построим псевдодифференциальные уравнения и представление решения методом блочного элемента для области типа «приплюснутого шара» или «чечевицы», формируемой как пересечение областей двух смещенных на некоторое расстояние шаров радиуса A. Предполагается, что их центры отстоят на расстоянии h. Ради простоты рассмотрим тот случай, когда имеет место соотношение

$$h - A < A < h., \tag{12}$$

означающее, что оси цилиндров находятся вне области $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Здесь Ω_1, Ω_2 — области, занятые первым и вторым шарами соответственно.

Требование автоморфизма [6] приводит к следующим псевдодифференциальным уравнениям, в формулах которых приняты обозначения работы [14]

$$\mathbf{B}_{21}^{-1}(\theta,\varphi)\Bigg[\left(r^{-0,5}J_{l+0,5}(kr)\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi-\theta_0} g_1\langle r^{-0,5}J_{l+0,5}(kr)\times\right.$$
$$\times\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \psi_1\frac{\partial r^{-0,5}J_{l+0,5}(kr)}{\partial r}\rangle A^2\sin\theta d\theta d\varphi +$$
$$+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\gamma_0}^{\pi} g_2(\gamma,\sigma,l,m)\langle f_1(\rho,\gamma,l,k)\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho} -$$
$$\left.-\psi_2\frac{\partial f_1(\rho,\gamma,l,k)}{\partial\rho}\rangle A^2\sin\gamma d\gamma d\sigma\right\}\Bigg] = 0, \tag{13}$$
$$\theta,\varphi\in\partial\Omega_{10}.$$

Во всех формулах как в значениях внешних форм на границах $\omega_{\nu\mu}$, так и под интегралами, после выполнения операций дифференцирования необходимо брать $r = A$, $\rho = A$. В формулах приняты обозначения

$$\theta_0 = \gamma_0 = \arccos\frac{h}{2A},$$

$$\mathbf{B}_{21}^{-1}(\gamma,\sigma)\Bigg[\left(\rho^{-0.5}J_{l+0.5}(k\rho)\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\gamma_0}^{\pi} g_2\left\langle\rho^{-0,5}J_{l+0,5}(k\rho)\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho} -\right.\right.$$
$$\left.-\psi_2\frac{\partial\rho^{-0,5}J_{l+0,5}(k\rho)}{\partial\rho}\right\rangle B^2\sin\gamma d\gamma d\sigma +$$
$$+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi-\theta_0} g_1(\theta,\varphi,s,n)\left\langle f_1(r,\theta,s,k)\frac{\partial\psi_1}{\partial r} -\right.$$
$$\left.\left.-\psi_1\frac{\partial f_1(r,\theta,s,k)}{\partial r}\right\rangle A^2\sin\theta d\theta d\varphi\right\}\Bigg] = 0,$$
$$\gamma,\sigma\in\partial\Omega_{20}.$$

При выполнении оператора $\mathbf{B}_{21}^{-1}(\gamma, \sigma)$ в формулах (4) необходимо брать вместо l, m параметры s, n соответственно. Интегрирование осуществляется согласно ориентации границ.

Общее представление решений во всех рассмотренных случаях дается соотношением

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \mathbf{B}_3^{-1}(r, \theta, \varphi) K^{-1}(\lambda, k) \int\limits_{\partial\Omega_k} \omega, \quad (14)$$

$$r, \theta, \varphi \in \Omega_k, \quad k = 3, 4, 5.$$

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Интегральные преобразования и метод факторизации в краевых задачах // ДАН. 2005. Т. 403. №. 6. С. 26–28.
2. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* О квантовомеханических свойствах блочных элементов в наноматериалах // ДАН. 2010. Т. 435. № 2. С. 190–194.
3. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Об особенностях метода блочного элемента в нестационарных задачах // (В печати, ДАН).
4. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* О блочных элементах в слоистых средах с рельефной границей // ДАН. 2010. Т. 435. № 1. С. 29–34.
5. *Бабешко В. А., Ритцер А.* Об особенностях метода блочного элемента // (В печати, ДАН).
6. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // ДАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 623–625.
7. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Выполнение граничных условий в дифференциальном методе факторизации // ДАН. 2007. Т. 412. № 5. С. 600–603.
8. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
9. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: Иностранная литература, 1962. 280 с.
10. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Дифференциальный метод факторизации в блочных структурах и нано структурах // ДАН. 2007. Т. 415, № 5. С. 596–599.
11. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
12. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 163–167.
13. *Евдокимова О. В.* О факторизации матриц-функций, возникающих в проблеме прочности материалов сложного строения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 2. С. 8–11.
14. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Блочные элементы со сферической границей // ДАН. 2010. Т. 434. № 5. С. 616–619.

Ключевые слова: метод блочного элемента, проблема граничной величины, автоморфизм, псевдодифференциальное уравнение, сложное демпфирование.

Статья поступила 10 февраля 2012 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар
Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Иванов П. Б., Шестопалов В. Л., Шишкин А. А., Плужник А. В., Мухин А. С., 2012