

Э К О Л О Г И Я

УДК 510.67:554+556.5.072+556.535.8

К РАСЧЕТУ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПОСЛЕДСТВИЙ СПИРАЛЕОБРАЗНЫХ ДВИЖЕНИЙ АТМОСФЕРЫ И ВОДНЫХ МАСС¹*О. М. Бабешко*²

THE CALCULATION OF THE ECOLOGICAL CONSEQUENCE OF THE ATMOSPHERE AND WATER MASS SPIRAL MOVING

Babeshko O. M.

The model of the pollutions transfer by the spiral moving atmosphere is studying. The formulas for the calculation of the concentration pollution in the atmosphere are received. Results of the calculation is presented.

Плоскопараллельное, вращательное и конвективное перемещения воздушных и водных масс охватывают основные виды ламинарного движения атмосферы и водных акваторий, наиболее часто наблюдаемых в мезомасштабном приближении. Спиралевидное движение описывает также быстропротекающие смерчи. Оперативное описание переноса загрязняющих веществ (ЗВ) для таких движений атмосферы является важной задачей при построении различного рода моделей оценки состояния окружающей среды, особенно при их нештатных выбросах [1–3].

Моделирование смерчей уравнениями гидродинамики затруднено, поэтому вопросы переноса ЗВ такими движениями изучены недостаточно полно. В то же время потребность в решении этих и других проблем, связанных с указанными движениями атмосферы, довольно велика. Восходящие и ниспадающие потоки воздушных масс вблизи аэродромов могут быть причиной осложнения взлетно-посадочных условий для воздушных лайнеров. Перенос ЗВ конвективными пото-

ками атмосферы, сопровождающийся циркуляцией воздушных масс, их движением в слое вблизи подстилающей поверхности, для некоторых типов ЗВ может приводить к появлению на последней свободных ионов водорода, концентрация которых обозначается pH . Это явление сопровождается такими последствиями, как окисление почв [4]. В связи с этим проблема оценки переноса ЗВ конвективными потоками и оседания их на разнотипные подстилающие поверхности чрезвычайно актуальна.

Далее излагается подход, основанный на методе факторизации, позволяющий решать проблему переноса ЗВ спиралеобразным ламинарным движением атмосферы и оперативно рассчитывать характер распространения и оседания ЗВ, вызванных такими движениями атмосферы. Приводятся результаты выполненных расчетов некоторых задач.

В совокупности с плоскопараллельными такие движения атмосферы включают в себя основные ламинарные случаи. Предлагаемый подход может применяться при разбие-

¹Работа выполнена по программам отделений ЭММПУ, наук о Земле и Президиума РАН, З/Н 241, 379, 380, ГН-374, при поддержке грантов Министерства образования и науки РФ (Е02-4.0-190), РФФИ (03-01-00694), РФФИ р2003юг (03-01-96537, 03-01-96527, 03-01-96519, 03-01-96587, 04-01-96822), ФЦП «Интеграция» (Б0121), гранта Президента РФ (НШ-2107.2003)

²Бабешко Ольга Мефодиевна, канд. хим. наук, заведующая отделом Государственного научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф при Кубанском государственном университете.

нии временного интервала на кратковременные промежутки стационарных ламинарных движений атмосферы с последующим объединением в непрерывный временной отрезок [7].

1. Приведем постановку задачи, следуя работам [5, 6].

Воспользуемся уравнениями переноса ЗВ [7], которые в цилиндрической системе координат имеют вид

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \right] + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - v_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - v_\lambda \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sigma \varphi = -f. \quad (1)$$

Здесь $\varphi(x, y, z, t)$ — концентрация ЗВ в точке x, y, z в момент времени t ; μ, ν — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии среды; σ — коэффициент поглощения ЗВ; $\mathbf{b} = (v_\rho, v_\lambda, v_z)$ — вектор скорости в цилиндрических координатах; f — функция, описывающая источник выброса ЗВ.

Наряду с этим уравнением должно выполняться уравнение неразрывности вида

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

В качестве среды распространения ЗВ рассмотрим слой толщиной H с границами, параллельными плоскости z . Будем считать, что концентрация ЗВ на верхней границе

$$\varphi = 0, \quad z = H.$$

На подстилающей поверхности имеется источник ЗВ, описываемый градиентом

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = g(\rho, \lambda), \quad z = 0.$$

Выбор подходящих значений скорости \mathbf{b} обеспечит выполнение условия неразрывности (2).

Рассмотрим два случая при нулевых начальных условиях.

Первый случай. Положим

$$\begin{aligned} v_z &= \text{const}, & v_\lambda &= v_{\lambda_0} \rho, \\ v_{\lambda_0} &= \text{const}, & v_\rho &= c_\rho \rho^{-1}. \end{aligned}$$

Этот случай описывает движение воздушных или водных масс вблизи оси вихря, поскольку движение происходит со скоростями твердого тела.

Здесь c_ρ — постоянная, характеризующая направление скорости v_ρ .

Будем искать решение уравнения в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, \lambda, z, t) &= \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi(u, k, z, p, \rho) \times \\ &\quad \times e^{ik\lambda - pt} du dp, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(u, k, z, p, \rho) &= \\ &= \Phi_1(u, k, z, p) I_{\nu_0}(u\rho) \rho^{-\alpha - \frac{1}{2}} \sqrt{u\rho}. \end{aligned}$$

Это представление связано с преобразованием Мейера [8]

$$\Phi_1(u) = \int_0^{\infty} \varphi_1(\rho) \rho^{\alpha + \frac{1}{2}} K_{\nu_0}(u\rho) \sqrt{u\rho} d\rho, \quad (4)$$

$$\varphi_1(\rho) = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_1(u) \rho^{-\alpha - \frac{1}{2}} I_{\nu_0}(u\rho) \sqrt{u\rho} du,$$

Внеся эти представления в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \rho^2} + \frac{\mu - c_\rho}{\rho \mu} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho} - \frac{k^2}{\rho^2} \varphi_1 + \\ + \frac{1}{\mu} (ikv_{\lambda_0} + \nu \theta^2 - v_z \theta - \sigma - p) \varphi_1 = \frac{f_0}{\mu}. \end{aligned}$$

2. Применение этого преобразования требует в рассматриваемой задаче дополнительного изучения свойств подынтегральных функций [5, 6].

Вычисление преобразования Мейера в виде (4) требует, чтобы функция $\Phi_1(u)$ была регулярной в правой полуплоскости, поэтому для построения по формуле (4) функции $\Phi_{1\Pi}$, регулярной в правой полуплоскости, факторизуем $\Phi_1(u)$ относительно мнимой оси в виде суммы

$$\Phi_1(u) = \Phi_{1\Pi}(u) + \Phi_{1\Lambda}(u). \quad (5)$$

Используем для этого представление

$$\Phi_{1\Pi}(u) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Phi_1(\xi)}{(\xi - u)} d\xi, \quad \operatorname{Re} u > 0.$$

Построенная таким образом функция $\Phi_{1\Pi}(u)$ является преобразованием Мейера функции $\varphi_1(\rho)$. Оставив в формуле (5) лишь функцию $\Phi_{1\Pi}(u)$, получим в силу взаимности преобразования и обращения Мейера функцию φ_1 .

Таким образом, формулы обращения и преобразования Мейера принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho) &= \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} I_{\nu_0}(u\rho) \rho^{-\alpha-\frac{1}{2}} \Phi_{1\Pi}(u) \sqrt{u\rho} du, \\ \Phi_{1\Pi}(u) &= \int_0^\infty \varphi_1(\rho) \rho^{\alpha+\frac{1}{2}} K_{\nu_0}(u\rho) \sqrt{u\rho} d\rho. \end{aligned}$$

Используя эти формулы, а также результаты, полученные в [5,6], приходим к следующему представлению функций, описывающих решение (3):

$$\begin{aligned} \Phi_1(u, k, z, p) &= -\frac{e^{\tau_1[H-z]} sh\tau_2(H-z)}{\tau_1 sh\tau_2 H + \tau_2 ch\tau_2 H} G(u), \\ \tau_1 &= \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2), \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2), \\ \theta_{1,2} &= \frac{v_z \pm \sqrt{v_z^2 - 4vS}}{2\nu}, \\ S &= \mu u^2 + ikv\lambda_0 - \sigma - p. \end{aligned}$$

В результате подстановки получаем

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{v_z}{2\nu}, \\ \tau_2 &= \frac{i\sqrt{4v(\mu u^2 + ikv\lambda_0 - \sigma - p) - v_z^2}}{2\nu}. \end{aligned}$$

Будем считать, что источник конвективных движений — окружность радиуса ρ_0 , лежащая на подстилающей поверхности. Тогда функцией $g(\rho)$ является

$$g(\rho) = \delta(\rho, \rho_0).$$

Используя вытекающее из преобразования Мейера представление δ -функции

$$\begin{aligned} \delta(\rho, \xi) &= \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} I_{\nu_0}(u\rho) K_{\nu_0}(u\xi) \left(\frac{\xi}{\rho}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \sqrt{\rho\xi} u du, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho_0) &= \int_0^\infty \delta(\rho_0, \xi) \varphi_1(\xi) d\xi, \\ G(u) &= \rho_0^{\alpha+\frac{1}{2}} K_{\nu_0}(u\rho_0) \sqrt{u\rho_0}. \end{aligned}$$

Решение задачи в этом случае

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho) &= \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} I_{\nu_0}(u\rho) \rho^{-\alpha-\frac{1}{2}} \Phi_1(u) \sqrt{u\rho} du, \\ \nu_0 &= \frac{\sqrt{c_\rho^2 + 4\mu^2 k^2}}{2\mu}, \quad \alpha = -\frac{c_\rho}{2\mu}. \end{aligned}$$

Второй случай. Рассмотрим еще одно сочетание параметров, обеспечивающих выполнение уравнения неразрывности.

Примем

$$v_\rho = c_\rho \rho^{-1}, \quad v_z = \text{const.}$$

$$v_\lambda = v_{\lambda_0} \rho^{-1}, \quad v_{\lambda_0} = \text{const.}$$

В отличие от первого случая, скорости кругового движения воздушных или водных масс уменьшаются по мере удаления от центра вихря.

Аналогично предыдущему приходим вновь к решению в форме (3), но с параметрами

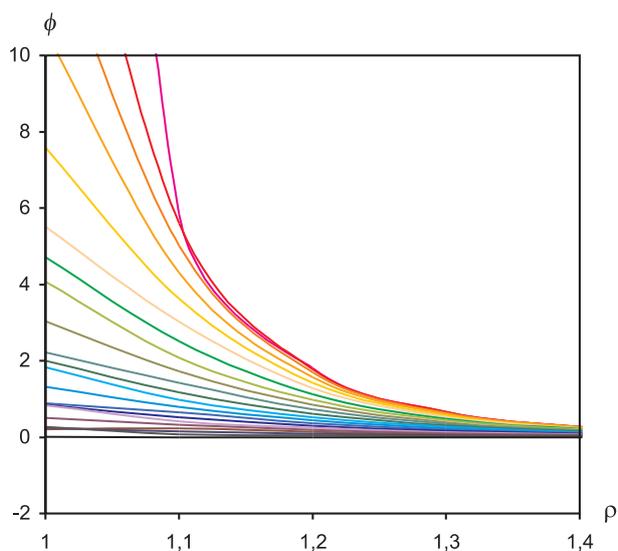
$$\begin{aligned} S &= \mu u^2 - \sigma - p, \\ \nu_0 &= \frac{\sqrt{c_\rho^2 + 4\mu^2 k^2 + 4ik\mu v_{\lambda_0}}}{2\mu}, \\ \alpha &= -\frac{c_\rho}{2\mu}. \end{aligned}$$

На рисунке приводятся кривые, описывающие концентрацию ЗВ осевших на подстилающую поверхность, а также насыщающих слой для второго случая. Безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$\mu = 1,0; \quad \nu = 0,1; \quad \rho = 1,0; \quad c_\rho = 1,0;$$

$$p = k = 0; \quad v_z = 0,1; \quad \nu_0 = 0,5; \quad \alpha = -0,5;$$

$$H = 2; \quad \sigma = 0.$$



Кривые на рисунке описывают концентрацию ЗВ в области $\rho \geq 1$ по всей толщине слоя с шагом 0,1. Кривая, соответствующая концентрации ЗВ на подстилающей поверхности, т.е. на нижнем основании слоя, на рисунке располагается сверху. По мере подъема по толщине слоя с шагом 0,1 концентрация ЗВ описывается кривыми, располагающимися под предыдущими.

Для построения решения в областях сложного строения с рельефной подстилающей поверхностью, а также сложным строением субстанций ЗВ необходимо использовать специально развитые для этих целей методы, изложенные в [3, 8, 9], которые требуют привлечения теории топологических многообразий.

Литература

1. Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Евдокимов С. М. Об учете типов источников и зон оседания загрязняющих веществ // ДАН. Т. 371. 2000. № 1.
2. Евдокимов С. М., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. К проблеме учета типов зон оседания загрязняющих веществ // Наука Кубани. Проблемы физико-математического моделирования. Естественные и технические науки. 1999. № 1. С. 31–34.
3. Бабешко О. М. Новый подход в оценке оседания веществ на разнотипные поверхности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 82–87.
4. Израэль Ю. А., Назаров И. М., Прессман А. Я., Ровинский Ф. Я., Рябошапка А. Г., Филиппова Л. М. Кислотные дожди. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 272 с.
5. Бабешко В. А., Бабешко О. М. К оценке экологических последствий спиралеобразных движений атмосферы и водных масс // Известия международной Академии наук Высшей школы. 2002. № 3(21). С. 105–110.
6. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Вильямс Р. К проблеме переноса загрязняющих веществ конвективными движениями атмосферы // Межвуз. сб. науч. тр. СПб: СПбГУ, 2002. С. 44–49.
7. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
8. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
9. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Обобщенная факторизация в краевых задачах в многосвязных областях // ДАН. 2003. Т. 392. № 2. С. 163–167.