

УДК 534.13

## ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЙ АЭС

Беляев А. К.<sup>1</sup>

THERMODYNAMIC APPROACH TO COMPUTING HIGH-FREQUENCY VIBRATIONS OF NUCLEAR POWER PLANTS

Belyaev A. K.

An alternative approach to high-frequency vibrations of complex engineering structures in the form of the boundary problem of vibrational conductivity is suggested. Identification of parameters of the vibrational conductivity is carried out. Application of the approach to nuclear power plant in the case of aircraft crash is demonstrated enabling determination of vibration of the outer shell of the plant.

Keywords: high-frequency vibrations, complex engineering structures, vibrational conductivity approach.

### Введение

Конструирование АЭС подразумевает выполнение более строгих нормативных требований и условий лицензирования, чем те, которые налагаются на обычные энергетические объекты. Эти требования и условия касаются не только нормальной эксплуатации, но и, в частности, кратковременных внешних динамических нагрузок в результате, например, авиакатастроф, землетрясений, взрыва и т.д. Для кратковременных нагрузок характерны широкополосные спектры.

Ввиду сложности динамических процессов и взаимодействия систем и подсистем АЭС с несущими конструкциями, механическая модель должна включать в себя всю систему от взаимодействия с грунтом и до мельчайших подсистем, что в конечном итоге требует очень мелкой сетки. Прямое применение стандартных методов структурного анализа, таких как МКЭ, метод синтеза подструктур и прочих не всегда удобно, так как они тоже требуют очень мелкой сетки для моделирования коротковолновых деформаций высших форм колебаний.

Настоящая статья посвящена альтернативному подходу к описанию высокочастотных вибраций в сложных инженерных сооружениях. Согласно основному результату Статистического Энергетического Анализа по-

ток высокочастотной вибрации между двумя связанными подструктурами пропорционален разности вибрационных энергий подструктуры. Налицо прямая аналогия с законом Фурье в теории теплопроводности, в котором поток тепла пропорционален разности температур. Эта аналогия рассматривается как обоснование применения методов термодинамики в высокочастотной динамике, что приводит к граничной задаче вибропроводности.

Демонстрируется применение термодинамического подхода к вычислению высокочастотных вибраций АЭС, вызванных падением самолета, что является одним из требований МАГАТЭ. С этой целью проведена идентификация параметров граничной задачи вибропроводности и применен МКЭ, позволяющий вычислить величину вибрации в любой точке внешнего купола.

### 1. Обоснование термодинамического подхода к описанию высокочастотной вибрации инженерных объектов. Граничная задача вибропроводности

Идея описания высокочастотной вибрации методами термодинамики основана на очевидной аналогии между тепловым движением молекул твердых тел и высокочастот-

<sup>1</sup>Беляев Александр Константинович, д-р физ.-мат. наук, заместитель директора по научной работе Института проблем машиноведения РАН; e-mail: vice.ipme@gmail.com.

ной вибрацией. Температура — термодинамический макропараметр, являющийся мерой вибрационной энергии молекул. Ключевая идея термодинамики заключается в игнорировании микроскопической природы материалов и утверждении, что термодинамическое состояние системы полностью определяется с помощью небольшого числа измеряемых макроскопических параметров.

Статистический Энергетический Анализ (СЭА) [1, 2], может рассматриваться как обоснование применения методов термодинамики в области высоких частот. Согласно основному уравнению СЭА, см. общий вывод в [3], в узком частотном диапазоне поток вибрационной энергии между двумя динамически слабосвязанными подсистемами пропорционален разности вибрационных энергий этих подсистем. Таким образом, фундаментальное соотношение СЭА между потоком вибрационной энергии и разностью вибрационных энергий подсистем находится в полном соответствии с законом Фурье в термодинамике, устанавливающим, что тепловой поток пропорционален разности температур. Эта аналогия позволила свести задачу о распространении вибрации в сложных системах к дискретной схеме распространения тепла в основополагающей работе [4]. Как показано в [3], необходимо еще учесть рассеяние вибрационной энергии в каждой подсистеме, которое оказывается пропорциональным вибрационной энергии этой подсистемы. Используемая ниже граничная задача вибропроводности представляет собой континуальное обобщение дискретной схемы вибropередачи. Впервые дифференциальное уравнение типа теплопроводности было предложено для анализа случайной вибрации в [5].

Вышеуказанные аналогии и наблюдения убеждают в принципиальной применимости граничной задачи теплопроводности для описания высокочастотной вибрации. Поэтому ниже приведено дифференциальное уравнение вибропроводности [3, 6]

$$K\Delta S - \alpha S = 0. \quad (1.1)$$

Это уравнение отличается от обычного уравнения теплопроводности тем, что в него добавлен «сток тепла»  $-\alpha S$ , как этого требуют аргументы. В уравнении вибропроводности  $S$  — вибротемпература,  $K$  — коэффициент вибропроводности,  $\alpha$  — коэффициент вибропоглощения и  $\Delta$  — оператор Лапласа. Граничное условие второго рода имеет вид

$$K \frac{dS}{dn} = \Gamma, \quad (1.2)$$

где  $\Gamma$  обозначает внешний вибрационный поток через поверхность тела.

Идентификация параметров граничной задачи вибропроводности проведена в [3, 6], где показано следующее

$$\begin{aligned} K &= \frac{\langle a \rangle^3 \langle \rho \rangle^2}{2\omega\kappa}, & \alpha &= 2\omega\kappa \langle a \rangle \langle \rho \rangle, \\ \Gamma &= \omega^2 S_f, & S &= U^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\langle a \rangle$  — средняя скорость звука в объекте,  $\langle \rho \rangle$  — средняя плотность объекта,  $\omega$  — частота и  $\kappa$  — частотно-частотный параметр пространственного поглощения вибрации в объекте. Внешний вибрационный поток  $\Gamma$  пропорционален спектральной плотности внешней нагрузки на частоте  $\omega$ . В случае детерминированного внешнего воздействия вибротемпература оказывается равной квадрату амплитуды на частоте  $\omega$ . Поскольку параметры подхода зависят от частоты, то граничная задача вибропроводности должна быть решена для каждой частоты внешнего воздействия.

Самая привлекательная сторона теории вибропроводности это одно скалярное дифференциальное уравнение второго порядка типа уравнения теплопроводности. Особенно эффективным является применение теории для объектов сложной геометрической формы. Этот факт позволяет использовать коммерческие пакеты программ, разработанные для расчета температурных полей. Пакеты должны быть модифицированы, и единственная требуемая модификация пакета это учет стока тепла  $-\alpha S$ . Эта модификация не накладывает никаких особых ограничений, т.к. любой пакет требует конкретного задания внешних источников тепла. Достаточно заявить, что мощность внешних распределенных источников тепла равна  $-\alpha S$ .

## 2. Определение механических параметров подхода

Для идентификации параметров по (1.3) следует определить следующие параметры АЭС:  $\langle a \rangle$ ,  $\langle \rho \rangle$  и  $\kappa$ . Для того чтобы определить среднюю скорость звука нужно найти усредненные жесткости и среднюю плотность конструкции. Один из способов определения заключается в сравнении жесткости здания АЭС с жесткостью модели вибропроводности. Будем считать, что подсистемы, прикрепленные к несущей конструкции, не меняют общую жесткость конструкции, таким образом, основной вклад в общую

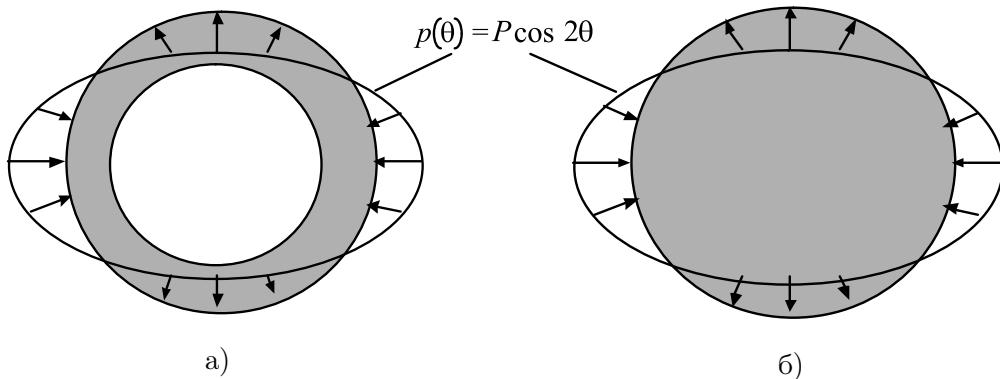


Рис. 1. а) Сечение внешней оболочки АЭС; б) сечение модели, подход вибропроводности

жесткость вносит внешняя оболочка, моделируемая круговой цилиндрической оболочкой радиуса  $R$  и толщины  $h$ . В рамках подхода вибропроводности конструкция считается сплошным телом, т.е. в нашем случае она должна быть сплошным цилиндром. Внешние локальные воздействия принадлежат к классу изгибных нагрузок. Одна из подходящих нагрузок приведена на рис. 1. Нагрузки, которые схематически показаны на рис. 1 имеют вид

$$p(\theta) = P \cos 2\theta, \quad (2.1)$$

где  $\theta$  — полярный угол.

Определяющие уравнения для прогиба при изгибе круговой оболочки написаны в стандартной форме [7]

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= p, \\ \Delta\Delta\Phi + \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $w$  — прогиб,  $\Phi$  — функция напряжений,  $R$  и  $h$  радиус и толщина оболочки, соответственно,  $E$  — модуль Юнга,  $D$  — цилиндрическая жесткость и  $z$  — осевая координата. Для простоты рассмотрим опертую оболочку длиной  $l$ , тогда граничные условия принимают вид

$$x = 0, l, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.3)$$

Ряд Фурье внешней нагрузки  $p(\theta)$  вида (2.1)

$$p(\theta) = \frac{4P \cos 2\theta}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi z}{l},$$

$$0 < z < l$$

определяет структуру решения краевой задачи (2.2) и (2.3), поэтому ряд Фурье для  $w$  и  $\Phi$  должен содержать  $\cos 2\theta$  и соответствующие синусы в направлении  $z$ , т.е.

$$\begin{aligned} w &= \cos 2\theta \sum_{n=1,3,5}^{\infty} w_n \sin \frac{n\pi z}{l}, \\ \Phi &= \cos 2\theta \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \Phi_n \sin \frac{n\pi z}{l}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.2) и исключая  $\Phi_n$  получаем

$$\begin{aligned} w &= P \cos 2\theta \sum_{n=1,3,5}^{\infty} R^4 \sin \frac{n\pi z}{l} \times \\ &\times \frac{1}{\pi n} \left[ 4D (1 + \lambda_n^2)^2 + \frac{1}{4} Eh R^2 \lambda_n^4 (1 + \lambda_n^2)^{-2} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Среднюю жесткость оболочки можно оценить следующим образом

$$\langle C \rangle = p(\theta) \left[ \frac{1}{l} \int_0^l w dz \right]^{-1},$$

что приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \langle C \rangle &= \frac{\pi^2 Eh}{2R^4} \times \\ &\times \left[ \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^{-2} \left[ \frac{h^2}{3(1-\nu^2)} (1 + \lambda_n^2)^2 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{4} R^2 \lambda_n^4 (1 + \lambda_n^2)^{-2} \right]^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Этот результат следует сравнить с усредненной жесткостью сплошного цилиндра.

В задаче о плоской деформации теории упругости [8], напряжения выражаются через функцию Эри  $\Psi$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2},$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right),$$

где функция Эри удовлетворяет бигармоническому уравнению  $\Delta \Delta \Psi = 0$ . Для нагрузки (2.1) решение ищется в виде

$$\Psi = (Ar^2 + Br^4) \cos 2\theta.$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий

$$\sigma_r|_{r=R} = -P \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}|_{r=R} = 0,$$

что приводит к следующим уравнениям для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -P \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= P \cos 2\theta \left[ 1 - 2 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \\ \tau_{r\theta} &= P \sin 2\theta \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Закон Гука и соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{\langle E \rangle} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{\langle E \rangle} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{2 \langle E \rangle (1 + \nu)} \tau_{r\theta}, \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $u$  и  $v$  обозначают соответственно радиальное и окружное перемещения,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\gamma_{r\theta}$  — деформации, и  $\langle E \rangle$  — усредненный модуль Юнга конструкции. Уравнения (2.6) и (2.7) позволяют получить выражения для  $u$  и  $v$

$$u = -\frac{Pr}{\langle E \rangle} \left[ 1 + \nu - \frac{2\nu}{3} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \cos 2\theta, \quad (2.8)$$

$$v = \frac{Pr}{\langle E \rangle} \left[ 1 + \nu - \left( 1 + \frac{\nu}{3} \right) \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \sin 2\theta.$$

Таким образом, жесткость сплошного кругового поперечного сечения найдена

$$\langle C_* \rangle = \frac{\sigma_r}{u} = \frac{\langle E \rangle}{R \left( 1 + \frac{\nu}{3} \right)}, \quad (2.9)$$

причем последний результат получен с помощью (2.6) и (2.8). Поскольку жесткости из уравнений (2.5) и (2.9) совпадают, то есть  $\langle C \rangle = \langle C_* \rangle$ , получаем следующее выражение для усредненного модуля Юнга конструкции:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{\pi^2 Eh \left( 1 + \frac{\nu}{3} \right)}{2R^4} \left[ \sum_{n=1,3,5}^{\infty} n^{-2} \times \right. \\ &\quad \times \left[ \frac{h^2}{3(1-\nu^2)} (1 + \lambda_n^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} R^2 \lambda_n^4 (1 + \lambda_n^2)^{-2} \right]^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Усредненная плотность конструкции может быть легко оценена по формуле  $\langle \rho \rangle = M/V$ , где  $M$  и  $V$  являются общей массой и общим объемом всей конструкции, соответственно. Численные значения параметров взяты из [9], а именно  $\langle \rho \rangle = 0,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $R = 30$  м,  $l = 35$  м,  $h = 1$  м,  $E = 2 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, что дает следующее значение для скорости звука:  $a = \sqrt{\langle E \rangle / \langle \rho \rangle} = 982$  м/с.

### 3. Численные результаты и заключительные замечания

Для численных расчетов возьмем так называемую верифицированную нагрузку МАГАТЭ, которая соответствует падению самолета типа Фантом [9]. Рис. 2а, 2б показывают верифицированную нагрузку  $F(t)$ , а также вибрационный поток  $\Gamma = \omega^2 |\hat{F}(\omega)|^2$ , где  $\hat{F}(\omega)$  — преобразование Фурье функции  $F(t)$ .

Код ABAQUS для расчета поля температур был использован для решения краевой задачи уравнения вибропроводности (1.1) и (1.2). Код был модифицирован так, что объемное производство тепла было заменено на сток тепла согласно уравнению (1.1). Результаты расчетов приведены на рис. 3 и 4 для частот 27 Гц и 70 Гц, соответственно. Именно на этих частотах поток вибрационной энергии в конструкцию достигает локальных максимумов (рис. 2б). Расчеты проведены в

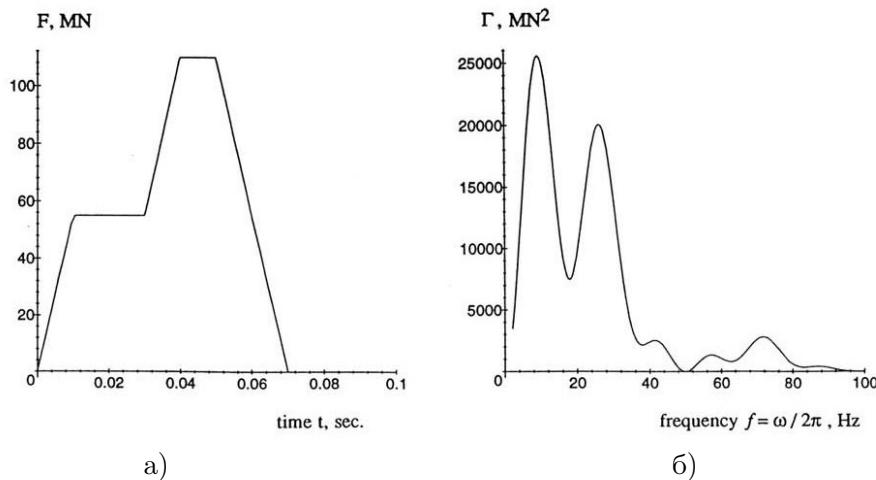
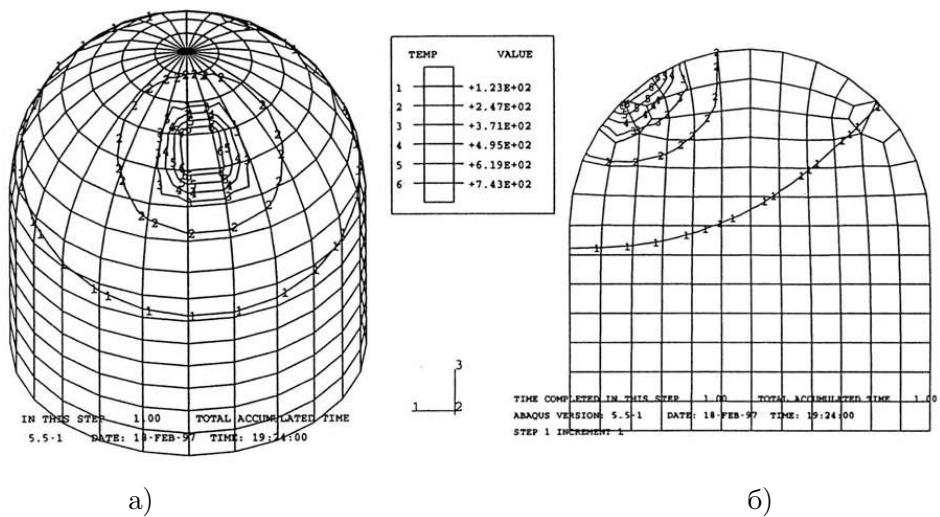


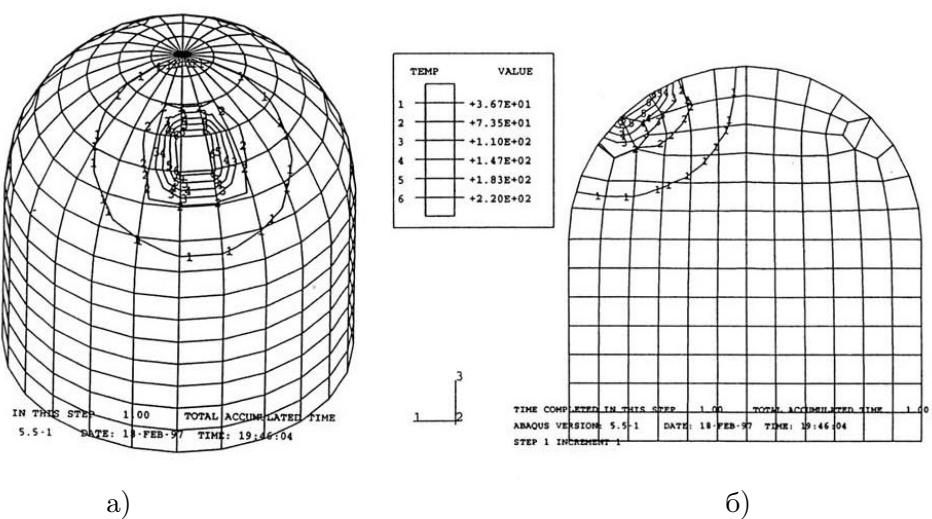
Рис. 2. а) верифицированная нагрузка как функция времени; б) вибрационный поток как функция частоты



а)

б)

Рис. 3. Поле вибротемпературы  $S$  на частоте 27 Гц



а)

б)

Рис. 4. Поле вибротемпературы  $S$  на частоте 70 Гц

предположении, что вибрация основания отсутствует, т.е. вибротемпература основания равна нулю. Налицо значительное снижение виброускорений по мере удаления от места удара.

В заключение можно сказать, что подход вибропроводности применим для оценки величин ускорений и спектральных плотностей несущих конструкций АЭС. Вибрация подсистем может быть оценена с помощью обычных методов теории колебаний или вычислительной механики. В [3] предложено использование гибридного метода, объединяющего глобальное описание с моделированием местных динамических свойств подсистем. Преимущество гибридного метода заключается в том, что он позволяет найти безопасное место для чувствительных компонентов на ранних стадиях проектирования, когда известны только общие механические свойства АЭС и динамические свойства отдельных компонентов.

### *Литература*

1. Lyon R. H. Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications. Cambridge: MIT Press, 1975. 422 p.
2. Fahy F. J. Statistical energy analysis: a critical overview // Philosophical Transaction of the Royal Society London A. 1994. Vol. 346. P. 431–447.
3. Belyaev A. K. Combining continuous and discrete energy approaches to high frequency dynamics of structures. In: Selectic topics in structronics and mechatronic systems, Belyaev A. K., Guran A. (eds). World Scientific Publishers, 2003. P. 221–267.
4. Eichler E. Thermal circuit approach to vibrations in coupled systems and noise reduction of a rectangular box // Journal of the Acoustical Society of America. 1965. Vol. 37. P. 995–1007.
5. Пальмов В. А. Описание высокочастотной вибрации сложных динамических систем методами теории теплопроводности / В сб. Избранные проблемы прикладной механики. Сборник, посвященный 60-летию академика В. Н. Челомея. М.: Наука, 1974. С. 214–221.
6. Belyaev A. K., Palmov V. A. Integral theories of random vibration of complex structures. In: Random Vibration – Status and Recent Developments. Elishakoff I., Lyon R. H. (eds). Amsterdam: Elsevier. 1986. P. 19–38.
7. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
8. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 912 с.
9. Krutzik N. J. Reduction of the dynamic response by aircraft crash on building structures // Nuclear Engineering and Design. 1988. Vol. 110. P. 191–200.

Ключевые слова: высокочастотная вибрация, сложные инженерные сооружения, граничная задача вибропроводности.

---

Статья поступила 13 января 2011 г.  
Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург  
© Беляев А. К., 2012